Eksamen i Ikkelineær dynamikk, fag TFY 4305
Tirsdag 16. desember 2003
Løsninger

1a) Et autonomt dynamisk system "styrer seg selv", det betyr at dynamikken ikke er eksplisitt tidsuavhengig. For eksempel, hvis systemet er endimensjonalt og tiden t er kontinuerlig, og hvis bevegelsesligningen er av formen $\dot{x} = f(x)$, er systemet autonomt. Hvis derimot hasighetsfeltet f avhenger eksplisitt av t, dvs. at $f = f(x,t)$, så er systemet ikke autonomt. Hvis tiden t erstattes av en diskret variabel $n = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$, og hvis tidsutviklingen har formen $x_{n+1} = g(x_n)$, så er systemet autonomt. Tidsutviklingen for et ikke-autonomt system med diskret tid har formen $x_{n+1} = g(x_n, n)$.
Svingninger kan ikke forekomme i et endimensjonalt autonomt system med kontinuerlig tid. For hvis $\dot{x} = f(x)$, altså hvis hastigheten er en funksjon av posisjonen x og ingenting annet, i en dimensjon, kan systemet aldri bevege seg fram og tilbake.
I et endimensjonalt ikke-autonomt system med kontinuerlig tid kan svingninger forekomme, for der kan hastigheten ved posisjonen x variere med tiden, og gjerne være positiv ved ett tidspunkt og negativ ved et annet tidspunkt.
I et endimensjonalt autonomt system med diskret tid kan også svingninger forekomme. Et slikt system kan f.eks. godt være en stroboskopisk avbildning av et ikke-autonomt endimensjonalt system med kontinuerlig tid. Eller vi kan argumentere mer direkte. Anta at tidsutviklingen har formen $x_{n+1} = g(x_n)$. Da er det for eksempel ingenting i veien for at $x_2 > x_1$, $x_3 < x_2$, $x_4 > x_3$, og så videre.

1b) I en Hopf-bifurkasjon av et fikspunkt i et todimensjonalt dynamisk system med kontinuerlig tid støter fikspunktet sammen med en grensesyklus, som enten skapes eller ødelegges i sammenstøtet. Fikspunktet forandrer stabiliteten, det går over fra å være stabilt til å bli ustabilt, eller omvendt. Bifurkasjonen er superkritisk dersom grensesyklusen eksisterer sammen med det ustabile fikspunktet. Den er subkritisk dersom grensesyklusen eksisterer sammen med det stabile fikspunktet.
I den superkritiske Hopf-bifurkasjonen skjer det ikke noe verre enn at stabiliteten til et fikspunkt overtas av en grensesyklus, den stabile bevegelsen foregår fremdeles i det samme området av faserommet. Den subkritiske Hopf-bifurkasjonen derimot kan være katastrofal, fordi bevegelsen til systemet plutselig blir fullstendig ustabil, og kan flytte over til et helt annet område i faserommet.
Andre muligheter for hvordan et fikspunkt i det todimensjonale systemet kan forandre stabilitet er (f.eks.) en sadel-knutepunkt-bifurkasjon (et stabilt og et ustabilt fikspunkt møtes og forsvinner), en transkritisk bifurkasjon (to fikspunkt utveksler stabilitet idet de møtes), en høygaffelbifurkasjon (ett fikspunkt utveksler stabilitet med to andre fikspunkt, som enten oppstår eller ødelegges idet alle de tre fikspunktene møtes).
Karakteristisk for en Hopf-bifurkasjon når vi gjør en lineær stabilitetsanalyse av fikspunktet er at Jacobi-matrisen til vektorfeltet i fikspunktet har to komplekse egenverdier, som er komplekskonjugerte av hverandre. Bifurkasjonen skjer idet begge egenverdiene passerer den imaginære aksen i det komplekse planet. Ved andre typer bifurkasjoner, f.eks. ved en sadel-knutepunkt-bifurkasjon, er det en reell egenverdi som blir lik null.

1c) Vi tenker oss et infinitesimalt kuleskall omkring et punkt i faserommet. Når systemet beveger seg, deformeres kuleskallet til en ellipsoide. Prinsipalaksene til ellipsoiden øker

eller avtar i lengde som $e^{\lambda_i t}$ når $t \to \infty$, der $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ er Lyapunov-eksponentene. At en Lyapunov-eksponent er positiv, betyr at avstanden mellom nærliggende punkter øker eksponensielt med tiden. Og omvendt, at den er negativ, betyr at avstanden mellom nærliggende punkter avtar eksponensielt.
Denne definisjonen av Lyapunov-eksponentene gjelder enten tiden t er kontinuerlig eller diskret.
I et system med kontinuerlig tid er alltid den ene Lyapunov-eksponenten lik null, når systemet holder seg hele tiden i et begrenset område av faserommet. Det skyldes at avstanden mellom to punkter i faserommet som følger den samme banen, med en konstant tidsforskjell, hverken øker eller avtar med tiden, i gjennomsnitt over lang tid.
I et tredimensjonalt system med kontinuerlig tid som beveger seg i en stabil grensesyklus, er den ene Lyapunov-eksponenten lik null, mens de to andre er negative. Det vil si at systemet er marginalt stabilt mhp. perturbasjoner langs banen (grensesyklusen), og stabilt mhp. perturbasjoner bort fra banen.
Dersom bevegelsen er en stabil kvasiperiodisk bane (fremdeles i et tredimensjonalt system med kontinuerlig tid), så er to av Lyapunov-eksponentene lik null, mens den tredje er negativ. En kvasiperiodisk bane fyller opp en todimensjonal flate, i den forstand at banen enten går gjennom eller kommer vilkårlig nært ethvert tilfeldig valgt punkt på flaten. Bevegelsen på denne flaten er marginalt stabil i to retninger, det tilsvarer to Lyapunov-eksponenter lik null, mens flaten selv er stabil, det tilsvarer at den tredje Lyapunov-eksponenten er negativ.

1d) Deterministisk kaos er bevegelse i et begrenset område i faserommet som avhenger følsomt av initialbetingelsene, dvs. at minst en Lyapunov-eksponent er positiv.
Deterministisk kaos kan ikke forekomme i et todimensjonalt autonomt system med kontinuerlig tid, fordi de eneste mulighetene er fikspunkter og grensesykler, i følge Poincar'e–Bendixson-teoremet.
Et endimensjonalt autonomt system med diskret tid kan f.eks. beskrive et tre-dimensjonalt autonomt system med kontinuerlig tid, i hvert fall tilnærmet. Først kan det tre-dimensjonale systemet representeres ved en todimensjonal Poincar'e-avbildning, og denne representasjonen er eksakt. Hvis dessuten attraktoren i systemet er tilnærmet endimensjonal, så kan dimensjonen til avbildningen reduseres videre fra to til en, selv om den siste overgangen innebærer en viss tilnærming. Lorenz-avbildningen er et eksempel på en slik reduksjon av dimensjonen.

2a) At x er et fikspunkt, betyr at $x = f(x) = c + \epsilon x - x^2$, dvs. at

$$x^2 + (1-\epsilon)x - c = 0\,.$$

Denne ligningen har to reelle løsninger,

$$x = x_\pm = \frac{-1+\epsilon \pm \sqrt{(1-\epsilon)^2 + 4c}}{2}\,,$$

dersom uttrykket under rottegnet er positivt, dvs. at

$$c > -\frac{(1-\epsilon)^2}{4}\,.$$

Et fikspunkt x er stabilt dersom $|f'(x)| < 1$, og ustabilt dersom $|f'(x)| > 1$, der

$$f'(x) = \epsilon - 2x = \epsilon - 2x_\pm = 1 \mp \sqrt{(1-\epsilon)^2 + 4c}\,.$$

Vi ser at fikspunktet x_- alltid er ustabilt, unntatt i grensetilfellet $c = -(1-\epsilon)^2/4$, der $x_- = x_+$ og $f'(x_-) = f'(x_+) = 1$, slik at stabiliteten er marginal. Det andre fikspunktet x_+ er stabilt dersom $f'(x_+) = 1 - \sqrt{(1-\epsilon)^2 + 4c} > -1$, som betyr at

$$c < 1 - \frac{(1-\epsilon)^2}{4} .$$

2b) Vi så ovenfor at fikspunktet x_+ blir ustabilt ved verdier for parametrene ϵ og c slik at $f'(x_+) = -1$. Verdien -1 for den deriverte $f'(x_+)$ kjennetegner en periodedobling, der fikspunktet x_+ blir ustabilt samtidig som det oppstår en stabil to-syklus. Etter hvert som c økes videre, vil vi få en uendelig sekvens av periodedoblinger, som går direkte over i kaos. Det er i hvert fall det vi vil vente, på grunnlag av det vi vet om kvadratiske avbildninger, som f.eks. den logistiske avbildningen $x \mapsto rx(1-x)$.
Dette er tilstrekkelig svar på spørsmålet. Men for å gi et litt mer utførlig svar kan vi analysere den første peiodedoblingen eksakt. Kaller vi punktene i to-syklusen for u og v, så har vi at

$$v = c + \epsilon u - u^2 , \qquad u = c + \epsilon v - v^2 .$$

En metode til å løse disse ligningene for u og v er å trekke den ene ligningen fra den andre, det gir at

$$u - v = \epsilon(v-u) - v^2 + u^2 = (u-v)(-\epsilon + u + v) .$$

For en to-syklus må $u \neq v$, da kan vi forkorte med $u - v$ og få at

$$u + v = 1 + \epsilon .$$

Deretter legger vi sammen ligningene for u og v, det gir at

$$u^2 + v^2 = -(1-\epsilon)(u+v) + 2c = -1 + \epsilon^2 + 2c .$$

Vi kan da også finne $u - v$, idet

$$(u-v)^2 = 2(u^2+v^2) - (u+v)^2 = 2(-1+\epsilon^2+2c) - (1+\epsilon)^2 = -4 + (1-\epsilon)^2 + 4c .$$

Vi ser at to-syklusen eksisterer for $c > 1 - ((1-\epsilon)^2/4)$, som er nettopp det parameterområdet der fikspunktet x_+ er ustabilt.
To-syklusen er stabil når $|f'(u)f'(v)| < 1$, og vi har at

$$\begin{aligned}
f'(u)f'(v) &= (\epsilon - 2u)(\epsilon - 2v) = \epsilon^2 - 2\epsilon(u+v) + 4uv \\
&= \epsilon^2 - 2\epsilon(u+v) + 2(u+v)^2 - 2(u^2+v^2) \\
&= \epsilon^2 + 2(u+v-\epsilon)(u+v) - 2(u^2+v^2) \\
&= \epsilon^2 + 2(1+\epsilon) + 2 - 2\epsilon^2 - 4c = 4 + 2\epsilon - \epsilon^2 - 4c \\
&= 5 - (1-\epsilon)^2 - 4c .
\end{aligned}$$

Vi ser at to-syklusen oppstår med stabilitet $f'(u)f'(v) = 1$ idet $4c = 4-(1-\epsilon)^2$. Den blir stabil når c øker videre, men blir ustabil igjen idet $4c = 6 - (1-\epsilon)^2$. Da er stabiliteten $f'(u)f'(v) = -1$, det indikerer sterkt at det skjer en ny periodedobling.

2c) Jacobi-matrisen er

$$A = \begin{pmatrix} -2x & \epsilon \\ \epsilon & -2y \end{pmatrix} .$$

Den har trase $\tau = \operatorname{Tr} A = -2(x+y)$ og determinant $\Delta = 4xy - \epsilon^2$, og egenverdiene λ er røtter i ligningen

$$0 = \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = \lambda^2 + 2(x+y)\lambda + 4xy - \epsilon^2 .$$

Derfor er egenverdiene

$$\lambda = -x - y \pm \sqrt{(x+y)^2 - 4xy + \epsilon^2} = -x - y \pm \sqrt{(x-y)^2 + \epsilon^2} .$$

2d) Når vi setter $x = y$, reduseres den todimensjonale avbildningen til den endimensjonale avbildningen $x \mapsto f(x) = c + \epsilon x - x^2$. Fikspunktene til denne endimensjonale avbildningen har vi allerede skaffet oss full oversikt over.
Linearisert stabilitetsanalyse går ut på å studere hva som skjer med en infinitesimal perturbasjon, når vi flytter et punkt (x, y) til et infinitesimalt nærliggende punkt $(x + \delta x, y + \delta y)$. En mulig måte å perturbere et todimensjonalt system på, er å la perturbasjonen være "diagonal" (vi kan også kalle det "symmetrisk"), altså velge $\delta x = \delta y$. Hvis $x = y$, og dessuten $\delta x = \delta y$, så oppnår vi ikke noe annet enn å perturbere den endimensjonale avbildningen, der den nødvendige og tilstrekkelige betingelsen for stabilitet av et fikspunkt x er den velkjente at $|f'(x)| < 1$, eller helt eksplisitt at

$$-1 < \epsilon - 2x < 1 .$$

Det betyr, som vi fant, at bare fikspunktet x_+ kan være stabilt, og en nødvendig betingelse for stabilitet i den endimensjonale avbildningen er ulikheten $-1 < \epsilon - 2x_+$, som betyr at $c < 1 - ((1-\epsilon)^2/4)$.
Dette er en nødvendig betingelse for stabilitet også i den todimensjonale avbildningen. Det er nemlig nødvendig at den er stabil med hensyn på alle mulige perturbasjoner, deriblant de diagonale perturbasjonene, med $\delta x = \delta y$.
Det er ikke sikkert at betingelsen er tilstrekkelig i det todimensjonale tilfellet, fordi den ikke garanterer stabilitet med hensyn på ikke-diagonale perturbasjoner, f.eks. med $\delta x = -\delta y$. Den fullstendige betingelsen for stabilitet er at begge egenverdiene til Jacobimatrisen i fikspunktet skal være mindre enn 1 i absoluttverdi. Egenverdiene kjenner vi, når $x = y$ er de

$$\lambda = -2x \pm \sqrt{\epsilon^2} = -2x \pm |\epsilon| ,$$

der fortegnet $\pm$ er uavhengig av det fortegnet som identifiserer de ene eller andre fikspunktet $x_\pm$. Stabilitetsbetingelsene er at $|\lambda| < 1$ for begge egenverdiene, det gir betingelsene

$$-2x - |\epsilon| > -1 \qquad \text{og} \qquad -2x + |\epsilon| < 1 .$$

(Vi ser her at de to betingelsene ikke kan oppfylles samtidig uten at $|\epsilon| < 1$.)

Den første betingelsen, $-2x - |\epsilon| > -1$, er den samme som vi hadde fra før dersom $\epsilon < 0$. Men dersom $\epsilon > 0$ gir den en strengere ulikhet. Her er bare det endimensjonale fikspunktet $x = x_+$ interessant (det andre er alltid ustabilt), og den nye betingelsen, dersom $\epsilon > 0$, er at

$$-1 < -2x - |\epsilon| = -2x_+ - \epsilon = 1 - 2\epsilon - \sqrt{(1-\epsilon)^2 + 4c}\,.$$

Eller ekvivalent,

$$\sqrt{(1-\epsilon)^2 + 4c} < 2(1-\epsilon)\ ,$$

som igjen er ekvivalent (husk: $\epsilon < 1$) med at

$$c < \frac{3(1-\epsilon)^2}{4}\ ,$$

Kommentar I:
Den andre ulikheten, $-2x + |\epsilon| < 1$, gir også noe nytt dersom $\epsilon < 0$, nemlig ulikheten

$$1 > -2x_+ - \epsilon = 1 - 2\epsilon - \sqrt{(1-\epsilon)^2 + 4c}\,.$$

eller

$$\sqrt{(1-\epsilon)^2 + 4c} > -2\epsilon\ ,$$

eller

$$4c > 4\epsilon^2 - (1-\epsilon)^2 = -(1+\epsilon)(1-3\epsilon)\ .$$

Kommentar II:
Det kan være instruktivt å se på egenvektorene til Jacobi-matrisen (husk: $x = y$)

$$A = \begin{pmatrix} -2x & \epsilon \\ \epsilon & -2x \end{pmatrix}.$$

For et diagonalt fikspunkt ser den lineariserte todimensjonale avbildningen ut slik:

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}.$$

Egenvektorene til A er

$$w_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Egenvektoren w_+ svarer til de diagonale (symmetriske) perturbasjonene, med $\delta x = \delta y$, og den tilhørende egenverdien er $\lambda_+ = \epsilon - 2x = f'(x)$.
Egenvektoren w_- svarer til de utenomdiagonale (antisymmetriske) perturbasjonene, med $\delta x = -\delta y$, og den tilhørende egenverdien er $\lambda_- = -\epsilon - 2x$. Denne egenverdien er det nye elementet som kommer inn fordi vi har en todimensjonal avbildning.

2e) Ligningene for den utenomdiagonale to-syklusen $(u, v) \mapsto (v, u) \mapsto (u, v) \mapsto \ldots$ er:

$$x_2 = c + \epsilon y_1 - x_1^2 \; , \qquad y_2 = c + \epsilon x_1 - y_1^2 \; ,$$

der $x_1 = y_2 = u$ og $y_1 = x_2 = v$, altså:

$$v = c + \epsilon v - u^2 \; , \qquad u = c + \epsilon u - v^2 \; .$$

Vi trekker den ene ligningen fra den andre, det gir at

$$u - v = \epsilon(u - v) + u^2 - v^2 = (u - v)(\epsilon + u + v) \; .$$

Det interessante tilfellet er når $u \neq v$, da kan vi forkorte med $u - v$ og få at

$$u + v = 1 - \epsilon \; .$$

Deretter legger vi sammen ligningene for u og v, det gir at

$$u^2 + v^2 = -(1 - \epsilon)(u + v) + 2c = -(1 - \epsilon)^2 + 2c \; .$$

Vi finner $u - v$ ved at

$$(u - v)^2 = 2(u^2 + v^2) - (u + v)^2 = 2(-(1 - \epsilon)^2 + 2c) - (1 - \epsilon)^2 = -3(1 - \epsilon)^2 + 4c \; .$$

Vi ser at denne to-syklusen eksisterer for $c > 3(1 - \epsilon)^2/4$. For den kritiske verdien $c = 3(1 - \epsilon)^2/4$ er

$$u = v = \frac{u + v}{2} = \frac{1 - \epsilon}{2} = \frac{-1 + \epsilon + \sqrt{(1 - \epsilon)^2 + 4c}}{2} = x_+ .$$

To-syklusen oppstår altså av fikspunktet $x = y = x_+$ i en periodedobling. Et fikspunkt der bevegelsen er synkron og i fase går over til en to-syklus der bevegelsen er synkron og i motfase.
Stabiliteten av fikspunktet og to-syklusen avhenger av fortegnet til ϵ. Hvis $\epsilon > 0$, så er det slik at fikspunktet er stabilt når $c < 3(1 - \epsilon)^2/4$, mens det er ustabilt med hensyn på de utenomdiagonale perturbasjonene med $\delta x = -\delta y$ når $c > 3(1 - \epsilon)^2/4$. I det siste tilfellet, altså når $c > 3(1 - \epsilon)^2/4$, er det den utenomdiagonale to-syklusen som er stabil (vi har ikke bevist her at den er stabil). Siden to-syklusen oppstår når fikspunktet går over fra å være stabilt til å bli ustabilt, er bifurkasjonen superkritisk.

3a) Vi spør etter løsninger som er permanente bølger, dvs. at de har formen $u(x, t) = \phi(x - ct)$ der c er en konstant hastighet. Innsatt i KdV-ligningen $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ gir det ligningen

$$-c\phi' - 6\phi\phi' + \phi''' = 0 \; .$$

Den kan integreres umiddelbart og gir da ligningen

$$-c\phi - 3\phi^2 + \phi'' = D \; ,$$

der D er en integrasjonskonstant. Vi multipliserer med ϕ' og integrerer en gang til, det gir ligningen

$$-\frac{c}{2}\,\phi^2 - \phi^3 + \frac{1}{2}\,(\phi')^2 = D\phi + E \; ,$$

der E er en ny integrasjonskonstant. Vi antar at $\phi(x-ct) \to 0$, $\phi'(x-ct) \to 0$ og $\phi''(x-ct) \to 0$ når $x \to \pm\infty$, da må $D = 0$ og $E = 0$. Ligningen

$$-\frac{c}{2}\,\phi^2 - \phi^3 + \frac{1}{2}\,(\phi')^2 = 0$$

er separabel, den kan skrives på formen

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{c\phi^2 + 2\phi^3}} = \pm \mathrm{d}\xi \ ,$$

der $\xi = x - ct$, og kan da integreres.
Posisjonen til bølgen, dvs. posisjonen til den dypeste bølgedalen, er $x = x_0 + ct$. Bølgen beveger seg altså med konstant hastighet c, og posisjonen ved $t = 0$ er x_0. Merk at vi må ha $c > 0$ for at ligningen $(\phi')^2 = c\phi^2 + 2\phi^3$ skal ha løsninger som avtar eksponensielt når $x \to \pm\infty$.

3b) Nei. Slike to-solitonløsninger, dersom de eksisterer, må ha formen $u(x,t) = \phi(x - ct)$. Men det eksisterer bare en-solitonløsninger som har denne formen.

3c) Vi kan sette $c_1 = c_2 = c$ i de oppgitte to-solitonløsningene. Da blir $C = 0$, og

$$u(x,t) = -\frac{2c(f_1 + f_2)}{(1 + f_1 + f_2)^2} \ .$$

Her er

$$f_1 + f_2 = \mathrm{e}^{-\sqrt{c}(x - x_1^0 - ct)} + \mathrm{e}^{-\sqrt{c}(x - x_2^0 - ct)} = \mathrm{e}^{-\sqrt{c}(x - x_0 - ct)} \ ,$$

der vi definerer x_0 ved at

$$\mathrm{e}^{\sqrt{c}\,x_1^0} + \mathrm{e}^{\sqrt{c}\,x_2^0} = \mathrm{e}^{\sqrt{c}\,x_0} \ .$$

Følgelig er

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -\frac{2c\mathrm{e}^{-\sqrt{c}(x-x_0-ct)}}{\left(1 + \mathrm{e}^{-\sqrt{c}(x-x_0-ct)}\right)^2} = -\frac{2c}{\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{c}}{2}\,(x-x_0-ct)} + \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{c}}{2}\,(x-x_0-ct)}\right)^2} \\ &= -\frac{c}{2\cosh^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}\,(x - x_0 - ct)\right]} \ . \end{aligned}$$

Dette er en-solitonløsningen om igjen, i samsvar med konklusjonen under punkt 3b).

3d) Når potensialet $u(x)$ forsvinner i begge grensene $x \to \pm\infty$, så får Schrödinger-ligningen $-\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi$ den enkle asymptotiske formen

$$-\psi_{xx} = \lambda\psi \ .$$

I begge grensene $x \to \pm\infty$ må derfor

$$\psi(x) = a_{\pm}\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,x} + b_{\pm}\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \ ,$$

med konstanter a_+ og b_+ for $x \to +\infty$, a_- og b_- for $x \to -\infty$. For at ψ skal være normerbar, må for det første $\lambda < 0$, slik at $\sqrt{-\lambda}$ er reell, og for det andre må både $a_+ = 0$ og $b_- = 0$. For de fleste negative verdier av λ er det umulig å oppfylle begge de asymptotiske grensebetingelsene på ψ, det er bare helt spesielle verdier av λ som gir en løsning. Hver av de to grensebetingelsene $a_+ = 0$ og $b_- = 0$ impliserer at det finnes maksimalt en løsning for ψ, for en gitt verdi av λ.

Sammenhengen mellom dette resultatet og spørsmålet om det eksisterer to-soliton-løsninger av KdV-ligningen der de to solitonene beveger seg med samme hastighet, er følgende. Hvis vi tar potensialet $u = u(x,t)$ til å være en N-solitonløsning med $N = 1, 2, 3, \ldots$, så har Schrödingerligningen N negative egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, slik at hastigheten c_i til soliton nr. i er proporsjonal med egenverdien λ_i, helt presist er $\lambda_i = -c_i/4$. Fordi Schrödingerligningen (i en dimensjon med et potensial som forsvinner i det uendelige) ikke kan ha degenererte egenverdier, dvs. at N normerbare egenfunksjoner må ha N forskjellige egenverdier, så kan vi slutte at de N solitonene må ha N forskjellige hastigheter.