NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Løysingsframlegg TFY4305 Ikkjelineær dynamikk Haust 2013

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Laurdag 21. desember 2013
kl. 09.00-13.00

Tilletne hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Oppgåve 1

a) Dersom vi definerer $u = \dot{R}$, gjev Newtons andre lov

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \ddot{R} \\ &= -\alpha g + \frac{\beta}{R^3} \,. \end{aligned} \tag{1}$$

b) Fikspunktet er gjeve ved $\dot{R} = 0$ og $\dot{u} = 0$. Første likninga gjev da $u = 0$ og andre likninga gjev $\frac{\beta}{(R^*)^3} = \alpha g$ eller $R^* = \left(\frac{\beta}{\alpha g}\right)^{\frac{1}{3}}$. Fikspunktet er difor

$\underline{\underline{(R^*, u^*) = \left(\left(\frac{\beta}{\alpha g}\right)^{\frac{1}{3}}, 0\right)}}$. Jacobimatrisa er

$$A(R,u) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3\beta}{R^4} & 0 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Evaluert i fikspunktet får ein

$$A(R^*,u^*) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3\left(\frac{\alpha^4 g^4}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}} & 0 \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Eigenverdiane til $A(R^*, u^*)$ er $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}\left(\frac{\alpha^4 g^4}{\beta}\right)^{\frac{1}{6}}$. Eigenverdiane er reint imaginære og fikspunktet er difor eit senter.
Sidan systemet er reversibelt, det vil seie invariant under $(t, u) \to (-t, -u)$ gjev teorem 6.6.1. Alternativt kan vi bruke at systemet er konservativt. Energifunksjonen E finn ein ved å multiplisere Newtons likning med $u = \dot{R}$. Dette gjev

$$\dot{R}\left(\ddot{R} + \alpha g - \frac{\beta}{R^3}\right) \quad = \quad 0 \, , \tag{4}$$

eller

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{R}^2 + \alpha g R + \frac{\beta}{2R^2}\right) \quad = \quad 0 \, . \tag{5}$$

eller $\frac{dE}{dt} = 0$ der

$$E \quad = \quad \frac{1}{2}\dot{R}^2 + \alpha g R + \frac{\beta}{2R^2} \, . \tag{6}$$

Integrasjon gjev $E =$ konstant og vi kan bruke teorem 6.5.1.

c) Vi skriv bevegelseslikninga som eit system av to likningar

$$\underline{\underline{\dot{R} = u}} \tag{7}$$

$$\underline{\underline{\dot{u} = -\gamma u - \alpha g + \frac{\beta}{R^3}}} \, . \tag{8}$$

Fikspunktet er framleis $\underline{\underline{(R^*, u^*) = \left(\left(\frac{\beta}{\alpha g}\right)^{\frac{1}{3}}, 0\right)}}$. Jacobimatrisa er

$$A(R,u) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3\beta}{R^4} & -\gamma \end{pmatrix} . \tag{9}$$

Evaluert i fikspunktet får ein

$$A(R^*, u^*) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3\left(\frac{\alpha^4 g^4}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}} & -\gamma \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Dette gjev $\tau = -\gamma$ og $\Delta = \frac{3\beta}{(R^*)^4}$. Sidan $\tau < 0$ er fikspunktet stabilt. Vidare har vi:

1) Viss $\tau^2 - 4\Delta > 0$, det vil seie viss $\gamma^2 - \frac{12\beta}{(R^*)^4} > 0$ har vi ein stabil node.

2) Viss $\tau^2 - 4\Delta < 0$, det vil seie viss $\gamma^2 - \frac{12\beta}{(R^*)^4} < 0$ har vi ein stabil spiral. Dette tilsvarer at systemet oscillerer att og fram med minkane amplityde.

3) Dersom $\gamma^2 = 4\Delta$, har vi ein degeneret node. Dette tilsvarer kritisk demping. Systemet kjem raskast til ro.

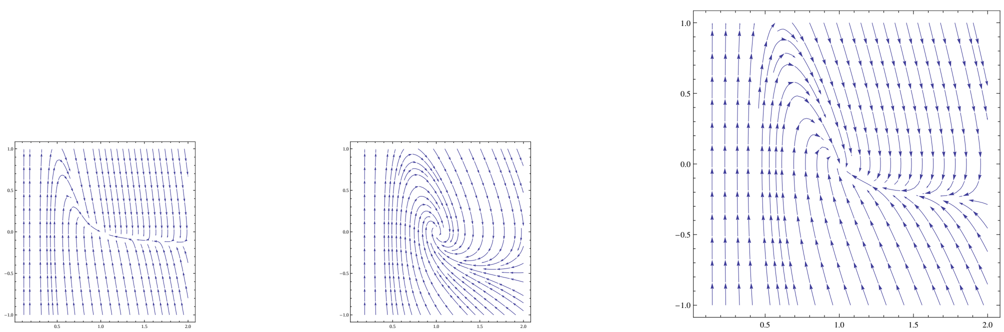

Figure 1: Faseportrett for stabil node, spiral og degenerert node. Verdiane er $\alpha g = \beta = 1$ og $\gamma = 2\sqrt{12}$, $\sqrt{12}$ og $\sqrt{3}$.

Oppgåve 2

a) Fikspunkta er gjeve ved $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Addisjon av desse likningane gjev $x^* = \underline{\underline{a + b}}$ og difor $y^* = \frac{b}{x^2} = \underline{\underline{\frac{b}{(a+b)^2}}}$.

b) Jacobimatrisa er

$$A(x, y) \quad = \quad \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 + 2xy & x^2 \\ -2xy & -x^2 \end{pmatrix}}}. \tag{11}$$

Dette gjev $\tau = -1 + 2xy - x^2$. Evaluert i (x^*, y^*) får vi $(a+b)\tau = [b - a - (a+b)^3]$. Sidan a og b er positive, er stabiliteten til fikspunktet gjeve ved forteiknet til $b - a - (a+b)^3$. Kurva som tilfredsstiller likninga $b - a = (a+b)^3$ deler difor a–b planet inn i eitt område der fikspunktet er stabilt og eit område der fiks punktet er ustabilt. Det stabile området er gjeve ved$[b - a - (a+b)^3] < 0$ og det ustabile området er gjeve ved$[b - a - (a+b)^3] > 0$. Området er vist i figur 2.

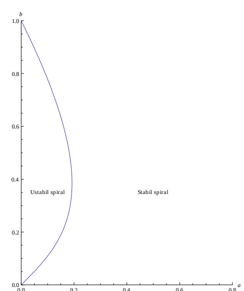

Figure 2: Kurva $[b - a - (a+b)^3] = 0$ deler a–b planet inn eit stabilt og ustabilt område. Spiralen er stabil for $[b - a - (a+b)^3] < 0$ og ustabil for $[b - a - (a+b)^3] > 0$.

c) I figur 3 har vi plotta faseportrettet for $a = \frac{1}{10}$ og $b = \frac{1}{2}$ til venstre og for $a = \frac{1}{2}$ og $b = \frac{1}{2}$ til høgre. Til venstre er fikspunktet er ein ustabil spiral og ein ser ein grensesyklus. Til høgre er fikspunktet stabilt og grensesyklusen er borte. Dette er altså ein superkritisk Hofp bifurkasjon.

Oppgåve 3

a) Isoklinane er gjeve ved $\dot{x} = 0$ og $\dot{y} = 0$. $\dot{x} = 0$ gjev $c = 0$ eller $y = x - x^2$. $\dot{y} = 0$ gjev $y = 0$ eller $x = a$. Isoklinane er skissert i figur 4 for $a = \frac{5}{4}$.

b) Fikspunkta er gjeve ved $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Andre likning gjev $y = 0$ eller $x = a$. For $y = 0$ har vi anten $x = 0$ eller $x = 1$. For $x = a$ har vi $y = a - a^2$ unntatt når $a = 0$. Da er $x = 0$ og y vilkårleg. For $a > 0$ er fikspunkta $(0,0)$, $(1,0)$ og $(a, a - a^2)$. For $a = 0$ er y-aksen ei linje av ikkje-isolerte fikspunkt.

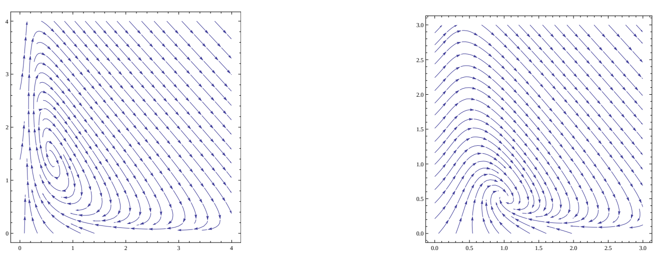

Figure 3: Faseportrett for $a = \frac{1}{10}$ og $b = \frac{1}{2}$ (venstre). Ein ser at fikspunktet er ein ustabil spiral og ein ser grensesyklusen. Faseportrett for $a = \frac{1}{2}$ og $b = \frac{1}{2}$ (høgre). Ein ser at fikspunktet er ein stabil spiral.

Vi noterer oss at det siste fikspunktet berre eksisterer for $a \leq 1$ sidan $y \geq 0$. Sjå figur 4 som indikerer dette fikspunktet for $a = \frac{5}{4}$. For å finne stabiliteten reknar vi ut Jacobimatrisa

$$A(x, y) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2x - 3x^2 - y & -x \\ y & x - a \end{pmatrix}}}. \tag{12}$$

Dette gjev

$$A(0, 0) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}}} \tag{13}$$

Eigenverdiane er $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = -a$. Sidan $\Delta = 0$ har vi eit grensetilfelle og vi må vere forsiktige. Lineær teori seier at $(0, 0)$ er eit ikkje-isolert fikspunkt, men vi har nettopp vist at det er isolert. På y-aksen er $\dot{x} = 0$ og $\dot{y} = -ay < 0$ slik at vi flyt mot fikspunktet. På x-aksen er $\dot{y} = 0$ $\dot{x} = x - x^2 > 0$ viss $x < 1$. Vi flyt vekk frå fikspunktet som altså er ustabilt.

Vidare har vi

$$A(1, 0) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 - a \end{pmatrix}}} \tag{14}$$

Eigenverdiane er $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 1 - a$. $(1, 0)$ er ein stabil node for $\lambda_2 < 0$ bortsett frå når $\lambda_2 = -1$. I dette tilfellet er fikspunktet ein degenerert node. Dette tilsvarer $a > 1$, men $a \neq 2$ for den stabile noden og $a = 2$ for den

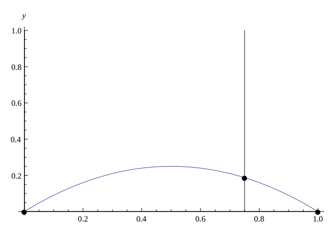

Figure 4: Isoklinane for $a = \frac{5}{4}$.

degenererte noden. $(1,0)$ er eit sadelpunkt for $\lambda_2 > 0$, det vil seie for $a < 1$. For $a = 1$ har vi framleis ein stabil node sidan vektorfeltet er det same som for $a > 1$. Vi noterer oss at linearisering gjev ei linje av ikkje-isolerte fikspunkt som er feil.

Til slutt

$$A(a, a - a^2) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} a - 2a^2 & -a \\ a - a^2 & 0 \end{pmatrix}}} \tag{15}$$

Her har vi $\Delta = a(a - a^2) \geq 0$. For $a = 1$ fell dette fikspunktet saman med $(1,0)$. For $a < 1$ er $\Delta > 0$ slik at stabiliteten er gjeve ved $\tau = a - 2a^2$. Fikspunktet er ein stabil spiral for $\tau < 0$, altså for $a > \frac{1}{2}$. Fikspunktet er ein ustabil spiral for $\tau > 0$, altså for $a < \frac{1}{2}$. Fikspunktet er eit senter for $a = \frac{1}{2}$.

c) For $a > 1$ er $(1,0)$ eit stabilt fikspunkt. Dersom ein ser på vektorfeltet for $a > 1$ ser ein at ein flyt mot dette fikspunktet bortsett frå viss ein startar på y-aksen. I dette tilfellet er det berre ulv tilstades. Men i dette tilfellet ser ein at $\dot{x} = 0$ og $\dot{y} = -ay < 0$ slik at vi flyt mot $(0,0)$. Uansett kva fikspunkt ein ender opp i, er $y = 0$, altså døyr ulven ut.

d) I punkt b) viste vi at fikspunktet $(a, a - a^2)$ er ein ustabil spiral for

$a < \frac{1}{2}$ og er ein stabil spiral for $a > \frac{1}{2}$. Dette er ein Hopf-bifurkasjon med $\underline{\underline{a_c = \frac{1}{2}}}$. Vi har $T = 2\pi/\omega$, der $\omega \approx \text{Im}(\lambda)$, og λ er ein av eigenverdiane til systemet evaluert i $a = a_c$ Vi har $\text{Im}(\lambda) = \sqrt{\Delta} = \sqrt{a(a - a^2)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Dette gjev $T = \underline{\underline{4\sqrt{2}\pi}}$.
Merk: Bifurkasjonen er superkritisk sidan den lukka kurva eksisterer for $a < \frac{1}{2}$ og da er fikspunktet ustabilt. Dette er vist i figur 5, men er ikkje krevd i oppgåva.

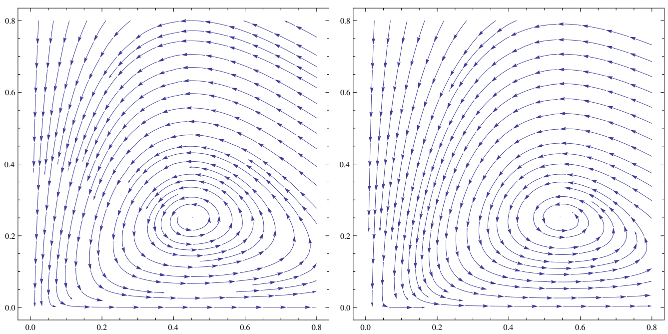

Figure 5: Fase portrett for $a = .0.45$ (venstre) og $a = 0.55$ (høgre). Ein ser grensesyklusen og det ustabile fikspunktet i plottet til venstre.

Oppgåve 4

a) Vi kan skrive eit vilkårleg tal x i totalssystemet:

$$x \quad = \quad a.a_0a_1a_2a_3... \, . \tag{16}$$

Dette gjev

$$f(x) \quad = \quad 0.a_1a_2... \, . \tag{17}$$

Dersom x^* skal vere eit fikspunkt må vi ha $x^* = f(x^*)$ eller

$$a.a_1a_1a_2a_3 = 0.a_1a_2... \, . \tag{18}$$

Viss vi samanliknar desimal for desimal, får vi $a = 0$, $a_0 = a_1$, $a_1 = a_2$. Einaste moglegheiter er

$$a_i = 0 \, , \vee \;\; a_i = 1 \, , i \in \mathbb{N} \, . \tag{19}$$

Altså er $x^* = 0.00000...$ eller $x^* = 0.111111...$ I titallsystemet tilsvarer dette $\underline{\underline{x^* = 0}}$ eller $\underline{\underline{x^* = 1}}$. Det siste finn ein ved hjelp av summen til ei geometrisk rekkje:

$$x^* = 0.111110... = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \, .$$

Alternativt kan teikne avbildninga $f(x) = 2x \pmod 1$ og finne skjæringspunkta med $g(x) = x$. Sjå figur 6.

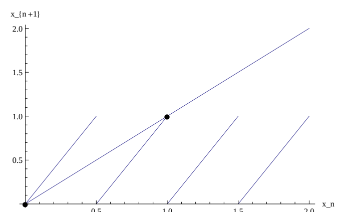

Figure 6: Avbildninga $x_{n+1} = 2x_n \pmod 1$ og $y = x$. Skjæringspunkta er indikert med ein blob.

b) I analogi med a) må eit punkt p i ein periode-2 syklus tilfredsstille $f(f(p)) = p$. Dersom vi skriv $p = a.a_0a_1a_2a_3\ldots$., gjev dette

$$a.a_1a_1a_2a_3\ldots = 0.a_3a_4\ldots \tag{20}$$

Ved å samanlikne desimal for desimal får vi $a = 0$ og $a_i = a_{i+2}$. Dette gjev

$$\begin{aligned} p &= 0.0000000\ldots, & (21)\\ p &= 0.1111111\ldots, & (22)\\ p &= 0.1010101\ldots, & (23)\\ p &= 0.0101010\ldots. & (24) \end{aligned}$$

Dei to første løysingane er fikspunkta frå punkt a). Altså har vi periode-2 syklusen $(p, q) = (0.0101010\ldots, 0.1010101\ldots)$ eller $(p, q) = (1/3, 2/3)$. Sidan $f'(x) = 2$ er alle fikspunkt og alle syklusar ustabile.

c) Sidan $x_0 \in [0, 1)$ må x_0 vere på forma

$$x_0 = 0.a_0a_1a_2a_3\ldots, \tag{25}$$

der $a_i = 0$ eller $a_i = 1$ for $i = 0, 1, 2, 3....$ Dette gjev $x_1 = 0.a_1a_2a_3...$, $x_2 = 0.a_2a_3...$ osb. For at sekvensen $x_0, x_1...$ skal konvergere mot null, må det eksistere ein N slik at $a_n = 0$ for $n > N$.