NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf. 735 93555

EKSAMEN I FAG TEP4145 KLASSISK MEKANIKK

Tirsdag 2. juni 2009, kl. 0900 - 1300
Studiepoeng: 7,5
Sensuren faller i uke 26

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk.

Oppgave 1

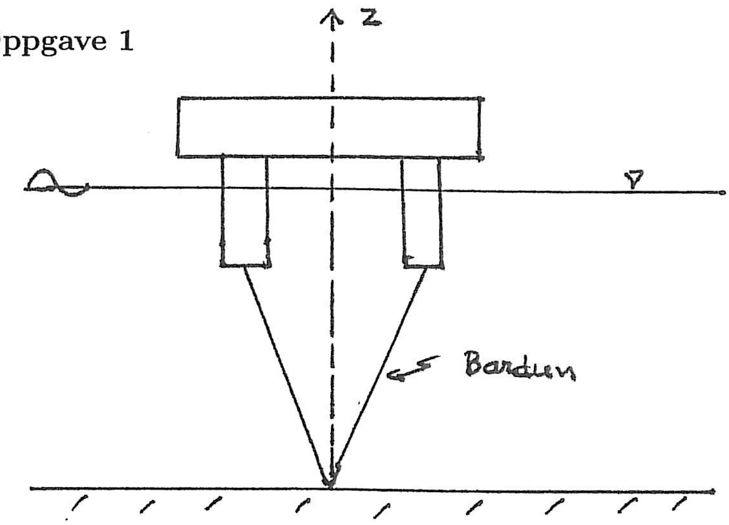


Fig. 1

En flytende oljeplattform, forankret via barduner til bunnen (Fig. 1), vil i sjøgang svinge såvel vertikalt som horisontalt. Forutsatt enkle harmoniske innkommende bølger kan vi anta at plattformen har to svingemoder (frihetsgrader): 1) en vertikal mode (bevegelse i z-retning) på grunn av elastisiteten i bardunene, og 2) en horisontal mode der plattformen beveger seg fram og tilbake.

En kan tenke seg at følgende enkle mekaniske modell simulerer plattformens bevegelse (Fig. 2):

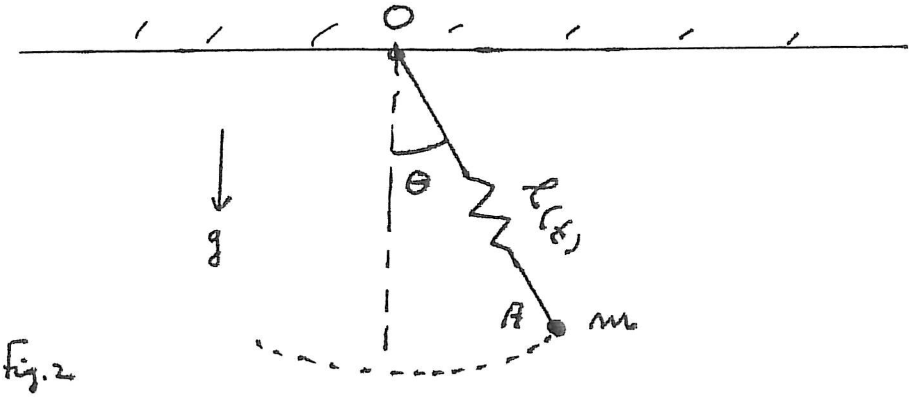


Fig. 2

Stanga OA danner en elastisk matematisk pendel. Pendelmassen m i A representerer plattformen (se bort fra massen av selve stanga). Stanga har to svingemoder: 1) den kan vibrere longitudinalt, som en fjær med fjærkonstant k. Kalles den relative tidsavhengige endring av stanglengden for $x(t)$, vil lengden av stanga være

$$l(t) = l_0[1 + x(t)],$$

hvor l_0 er en gitt konstant. 2) For det andre vil stanga danne en pendel i tyngdefeltet.

a) Sett opp Lagrangefunksjonen $L = L(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$ for systemet, idet du velger tyngdens potensielle energi lik null for $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Vis at Lagranges ligninger for x og θ blir

$$\ddot{x} - (1 + x)\dot{\theta}^2 + \omega_0^2 x = \Omega_0^2 \cos\theta,$$

$$(1 + x)\ddot{\theta} + 2\dot{x}\,\dot{\theta} = -\Omega_0^2 \sin\theta,$$

hvor egenfrekvensene er $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ og $\Omega_0 = \sqrt{g/l_0}$.

b) Anta $x \ll 1$, $\theta \ll 1$, og skriv ligningene til første orden i x og θ. Finn herav $x = x(t)$ og $\theta = \theta(t)$, når initialbetingelsene ved $t = 0$ er $x(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{x}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$.

Oppgave 2

En partikkel med masse m og elektrisk ladning q beveger seg på et horisontalt bord i xy-planet, og er påvirket av et konstant magnetisk felt rettet langs z-aksen. Altså $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$. Det tilhørende magnetiske vektorpotensial er

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = (0, B_0 x, 0)$$

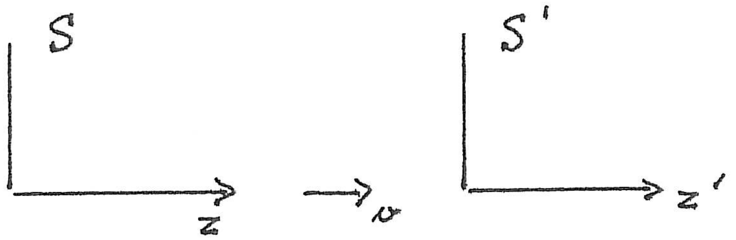
(den generelle sammenhengen mellom $\mathbf{B}$ og $\mathbf{A}$ er $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$). Skalarpotensialet ϕ er lik null. Lagrangefunksjonen oppgis å være

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}.$$

a) Gå ut fra uttrykket $H = p_i \dot{x}_i - L$ for Hamiltonfunksjonen, og vis hvordan H kan skrives som en funksjon av x_i og de kanoniske impulskomponenter p_i.

b) Finn Hamiltons ligninger i x- og y-retning. Vis hvordan kraftkomponentene $F_i = m\ddot{x}_i$ beregnet ut ifra disse ligningene er i overensstemmelse med komponentene av Lorentzkraften $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

Oppgave 3



Inertialsystemet S' beveger seg i forhold til inertialsystemet S med konstant hastighet v langs z-aksen. En partikkel i S' beveger seg lineært langs z'-aksen med vilkårlig hastighet $u'_z = dz'/dt'$ og vilkårlig akselerasjon $a'_z = du'_z/dt'$.

a) Gå ut fra Lorentztransformasjonen, og finn hastigheten $u_z = dz/dt$ i S uttrykt ved u'_z og v (Einsteins addisjonsformel).

b) Finn akselerasjonen $a_z = du_z/dt$ i S, uttrykt ved a'_z, u'_z og v.

Oppgave 4 (halv vekt)

Newtons 2. lov kan i et roterende koordinatsystem skrives slik:

$$\mathbf{F}_{eff} = m\mathbf{a}_r,$$

hvor $\mathbf{a}_r$ er den relative akselerasjon. Vis at

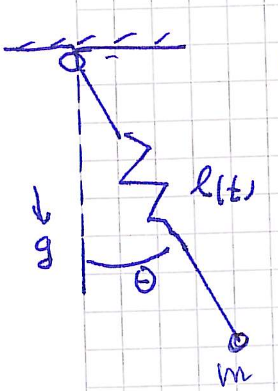
$$\mathbf{F}_{eff} = \mathbf{F} + 2m(\mathbf{v}_r \times \omega) - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}),$$

hvor $\mathbf{v}_r$ er den relative hastighet.

En partikkel slippes i stor høyde fra et punkt over ekvator. Hva er retning og omtrentlig størrelse av Coriolisakselerasjonen etter $t = 10$ sekunder? Sett $g = 10\ m/s^2$, $\omega = 5,3 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$.

TEP4145 KLASSISK MEKANIKK. Eksamen 2. juni 2009

Løsning Oppgave 1



Elastisk vinkelfrekvens for fjæra: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Potensiell energi i fjæra: $\frac{1}{2}k\ell_0^2 x^2(t)$.

Potensiell energi i tyngdefeltet: $-mg\ell_0[1+x(t)]\cos\theta$; den er null ved $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Altså

$$V = \frac{1}{2}k\ell_0^2 x^2 - mg\ell_0(1+x)\cos\theta.$$

Kinetisk energi $T = \frac{1}{2}m\ell_0^2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\ell_0^2(1+x)^2\dot{\theta}^2$

a) $$\underline{L = T - V = \frac{1}{2}m\ell_0^2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\ell_0^2(1+x)^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k\ell_0^2x^2 + mg\ell_0(1+x)\cos\theta.}$$

Lagrange: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \underline{\ddot{x} - (1+x)\dot{\theta}^2 + \omega_0^2 x = \Omega_0^2\cos\theta}$

Tilsvarende: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ gir, ettersom $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell_0^2(1+x)^2\dot{\theta}$,

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell_0^2[2(1+x)\dot{x}\dot{\theta} + (1+x)^2\ddot{\theta}]$, $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell_0(1+x)\sin\theta$, at

$$\underline{(1+x)\ddot{\theta} + 2\dot{x}\dot{\theta} = -\Omega_0^2\sin\theta}$$

b) Approksimativt, med bare 1. ordens ledd inkludert,

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \Omega_0^2$, $\quad\ddot{\theta} = -\Omega_0^2\theta$

Siden $\theta(0) = \theta_0$ fås $\underline{\theta(t) = \theta_0\cos\Omega_0 t}$. Oppfyller $\dot{\theta}(0) = 0$.

Løsning for x:

$x = \Omega_0^2/\omega_0^2 + A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$, A og B konstanter.

Da $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ fås

$$\underline{x = \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2}(1-\cos\omega_0 t).}$$

Løsning Oppgave 2

Gitt $\vec{B} = (0,0,B_0)$, $\vec{A} = (0, B_0 x, 0)$

a) $L = \frac{1}{2}mv^2 + q\vec{A}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qB_0 x\cdot\dot{y}$

Hamiltonfunksjon $H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - L$

Da $p_i = \partial L/\partial \dot{x}_i$ får $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y} + qB_0 x$

p_y: Kanoniske impuls; $m\dot{y}$: mekanisk impuls.

$$H = m\dot{x}^2 + (m\dot{y} + q\cancel{B_0 x})\dot{y} - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - q\cancel{B_0}x\dot{y}$$

$H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$. Innsetting av $\dot{x} = \frac{1}{m}p_x$, $\dot{y} = \frac{1}{m}(p_y - qB_0x)$ gir

$$\underline{H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_y - qB_0x)^2 = H(p_x, p_y, x).}$$

b) Hamiltons ligninger $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ gir $\underline{\dot{x}} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \underline{\frac{p_x}{m}}$ og

$$\underline{\dot{y}} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \underline{\frac{1}{m}(p_y - qB_0x)}.$$

Ligningene $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ gir $\underline{\dot{p}_x} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \underline{\frac{qB_0}{m}(p_y - qB_0x)}$ og

$$\underline{\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0.}$$

Kraft på partikkelen: $F_i = m\ddot{x}_i$.

Av Hamiltons ligninger: $m\ddot{x} = \dot{p}_x = \frac{qB_0}{m}(p_y - qB_0x) = qB_0\dot{y}$,

og $m\ddot{y} = (\underbrace{\dot{p}_y}_{0} - qB_0\dot{x}) = -qB_0\dot{x}$

Altså $\underline{F_x = qB_0\dot{y}, \quad F_y = -qB_0\dot{x}.}$

Dette stemmer overens med Lorentzkraften $\vec{F} = q(\vec{v}\times\vec{B})$, som gir

$$\underline{F_x = q\dot{y}B_0, \quad F_y = -q\dot{x}B_0}$$

TEP4145 Klassisk mekanikk, 2. juni 2009 ③

Løsning Oppgave 3

a) Av Lorentztransformasjonen $z = \gamma(z' + vt')$, $t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}z')$ får

$dz = \gamma(dz' + v\,dt')$, $dt = \gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dz')$, som gir i systemet S

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz' + v\,dt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dz'} = \underline{\frac{u_z' + v}{1 + \frac{v u_z'}{c^2}}}$$

Einsteins addisjonsformel

b) Differensierer formelen:

$$du_z = \frac{-\frac{v}{c^2}du_z'}{\left(1 + \frac{v u_z'}{c^2}\right)^2}\cdot(u_z' + v) + \frac{1}{1 + \frac{v u_z'}{c^2}}\cdot du_z'.$$

Bruker $dt = \gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dz')$:

$$a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{-\frac{v}{c^2}du_z'(u_z' + v)}{\left(1 + \frac{v u_z'}{c^2}\right)^2\gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dz')} + \frac{du_z'}{\left(1 + \frac{v u_z'}{c^2}\right)\gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dz')}$$

$$= \frac{-\frac{v}{c^2}a_z'(u_z' + v)}{\gamma\left(1 + \frac{v u_z'}{c^2}\right)^3} + \frac{a_z'}{\gamma\left(1 + \frac{v u_z'}{c^2}\right)^2}$$

$$\underline{a_z = \frac{a_z'}{\gamma\left(1 + \frac{v u_z'}{c^2}\right)^2}\left[1 - \frac{v}{c^2}\,\frac{u_z' + v}{1 + \frac{v u_z'}{c^2}}\right]} = \underline{\frac{a_z'}{\gamma^3\left(1 + \frac{v u_z'}{c^2}\right)^3}}$$

Spesielt, hvis $u_z' = 0$:

$$\underline{a_z = (1 - \beta^2)^{3/2}\cdot a_z'}$$

Løsning Oppgave 4

Anvender operatorligningen $\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times$ på den absolutte hastighet $\vec{v}_s = \vec{v}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}$:

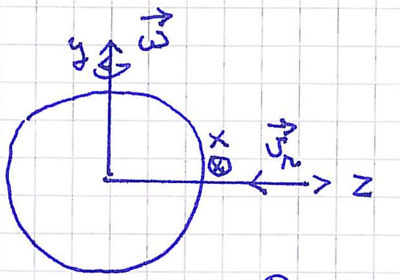
$$\vec{a}_s = \left(\frac{d\vec{v}_s}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{v}_s}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{v}_s = \underbrace{\left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_r}_{=\vec{a}_r} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}).$$

Inertialsystemet: $\vec{F} = m\vec{a}_s$. Dermed blir

$$\vec{F} = m\vec{a}_r + 2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}_r + m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}).$$

Dette av formen $\vec{F}_{eff} = m\vec{a}_r$, med

$$\underline{\vec{F}_{eff} = \vec{F} + 2m(\vec{v}_r\times\vec{\omega}) - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}$$



Corioliskraften $2m(\vec{v}_r\times\vec{\omega})$ virker mot øst.

Coriolisakselerasjon i x-retning:

$$a_c = 2(\vec{v}_r\times\vec{\omega})_x = -2\dot{z}\omega$$

Den vertikale bevegelse dominerer, slik at

$$\dot{z} = -gt = -10\cdot10 = -100\ \text{m/s}, \Rightarrow$$

$$\underline{a_c} = 2\cdot100\cdot5{,}3\cdot10^{-5} \simeq \underline{10^{-2}\ \text{m/s}^2}$$