NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik, tlf.: 735 93555

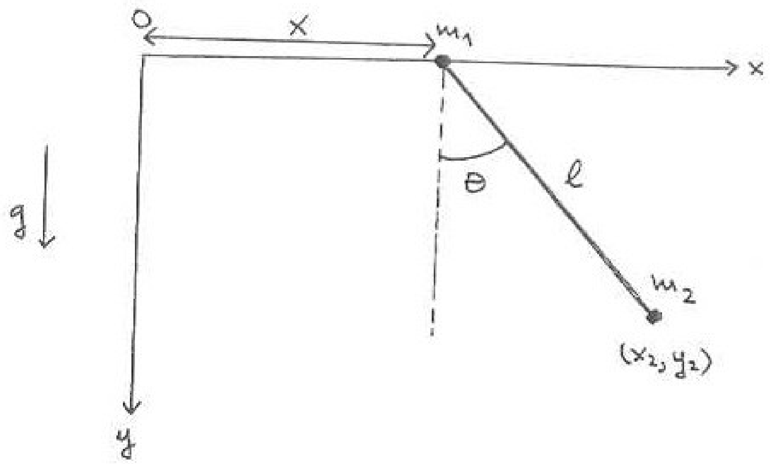
EKSAMEN I FAG TEP4145 KLASSISK MEKANIKK
Mandag 3. juni 2006
Tid: 0900 – 1300
Studiepoeng: 7,5

Sensuren faller i uke 26

Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk.

Besvar i alt 3 oppgaver. Oppgavene 1 og 2 er for alle. Velg så enten oppgave 3 eller oppgave 4.

Oppgave 1 (for alle)



Gitt en plan pendel med masse m_2; koordinatene til m_2 er (x_2, y_2). Stanglengden er ℓ. Se bort fra stangas masse. Opphengningspunktet (masse m_1, koordinater $(x,0)$) kan gli uten friksjon langs en horisontal føring i x-retning. Anta at avstanden x, og helningsvinkelen θ, er de uavhengige koordinatene, dvs. $q_i = (x, \theta)$. Tyngdens akselerasjon er g.

a) Vis at Lagrangefunksjonen for systemet kan skrives som

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \ell^2\dot{\theta}^2\right) + m_2 g\ell\cos\theta \quad ,$$

når nullnivået for potensiell energi velges ved $y = 0$.

b) Hvorfor er den kanoniske impulskomponenten p_x en konstant? Hva betyr dette fysisk? Anta at massemiddelpunktet CM ligger i ro i x-retning. Finn total energi E som funksjon av θ og $\dot{\theta}$.

c) Anta så at koordinatsystemet er valgt slik at CM hele tiden ligger på y-aksen. (CM pendler opp og ned på y-aksen). Da kan x_2 og y_2 uttrykkes enkelt som funksjon av θ. Vis herav at x_2 og y_2 oppfyller ligningen

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 .$$

Dette er ligningen for en ellipse, hvor konstantene a og b er halvaksene. Bestem verdiene av a og b. Hva blir a dersom $m_1 \to \infty$? Kunne du ha innsett dette resultatet direkte, uten å regne?

Oppgave 2 (for alle)

a) Et stivt legeme roterer med vinkelhastighet $\vec{\omega}$ omkring et fast punkt. Vis at energien E er gitt ved

$$E = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} \qquad (1)$$

hvor $\vec{L}$ er dreieimpulsen. Se bort fra gravitasjonsfeltet. Anta så at legemet er rotasjonssymmetrisk, med komponentene av treghetstensoren lik I_1, $I_2 = I_1$ og I_3 i koordinatsystemet (x_1, x_2, x_3) som er fast i legemet. x_3-aksen er legemets symmetriakse. De tilhørende enhetsvektorene er $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Vinkelhastigheten kan dekomponeres på legemets akser:

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{j} + \omega_3\vec{k} .$$

Benytt Eulerligningen

$$\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{L} = 0$$

til å vise hvordan komponentene ω_1, ω_2 og ω_3 avhenger av t. Benytt notasjonen $\Omega = \left[(I_3 - I_1)/I_1\right]\omega_3$, og sett $A^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$.

b) Dekomponér $\vec{L}$ på samme måte:

$$\vec{L} = L_1\vec{i} + L_2\vec{j} + L_3\vec{k} \quad ,$$

og vis hvordan ω_3^2 kan uttrykkes ved L^2, A^2, I_1^2 og I_3^2. Bruk så ligning (1) til å vise hvordan A^2 kan uttrykkes ved E, L^2, I_1 og I_3.

c) Sett utenfra (fra lab-systemet), er $\vec{L}$ en vektor med konstant lengde og retning i rommet. Finn vinkelen α mellom $\vec{L}$ og $\vec{\omega}$, uttrykt ved A^2, ω_3^2, I_1 og I_3.

<u>Oppgave 3 (velg enten denne, eller oppgave 4)</u>

a) Forklar kort (uten utledning) hva som menes med en ortokron, proper (ekte) Lorentztransformasjon.

Skriv ned de vanlige formlene for Lorentztransformasjonen, når inertialsystemet S' beveger seg i forhold til inertialsystemet S med konstant fart v langs z-aksen. Forklar, ved hjelp av en figur, hva som menes med tidsrettet (time-like), romrettet (space-like) eller null (light-like) separasjon mellom to romtidsbegivenheter 1 og 2. Vis for hvilket område begivenhetene 1 og 2 kan gjøres samtidige.

b) En relativistisk partikkel 1 med hvilemasse m og kinetisk energi $K_1 = E_1 - mc^2$ faller inn mot en partikkel 2 med samme masse m som er i ro (altså $\vec{p}_2 = 0$). Vis, ved å regne ut kvadratet av den totale 4-impuls $P_\mu = p_{1\mu} + p_{2\mu}$, hvordan K_1 er relatert til den ekvivalente masse M i CM-systemet.

Hva menes med terskelenergi (threshold)? Finn terskelenergien for dannelse av <u>to</u> $p\overline{p}$ par:

$$p + N \rightarrow p + N + 2p + 2\overline{p}\,.$$

Her betyr p proton, N nukleon (nøytron eller proton), og $\overline{p}$ antiproton. Sett alle massene lik m.

Oppgave 4 (velg enten denne, eller oppgave 3)

Det planlegges et nytt to-årig studium. Hvert år vil det bli tatt opp a nye studenter. Ett år senere forventer en at 60% av disse studentene vil fortsette i andre klasse. Av de resterende forventer en at 25% vil ta første året på nytt og 15% vil ha sluttet.
Av studentene som går i andre klasse forventer en at 20% vil ta andre klasse på nytt.
Etter n år er a_n antallet studenter som går i første klasse, og antallet studenter i første klasse er gitt ved følgende lineære, homogene differanselikning

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{4} + a \quad \text{når} \quad n \geq 0 \quad \text{og} \quad a_0 = 0.$$

Løsningen av differanselikningen er $\quad a_n = -\frac{4}{3}a\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{4}{3}a.$

Antallet studenter som går i andre klasse er b_n, og $b_0 = 0$.

a) Sett opp differanselikningen som gir antallet studenter som går i andre klasse og løs denne med hensyn på b_n.

b) Hvis en ønsker at det totale antallet studenter skal stabilisere seg rundt 280, hvor mange studenter bør en ta opp i året?

En vil oppnå en bedre utnyttelse av kapasiteten ved skolen hvis en lar begge klassene få like mange studenter. Det kan skje gjennom et direkte opptak av N kvalifiserte studenter til andre. årskurs.

c) La c_n bety antall studenter i andre klasse etter den skisserte modellen. Sett $N = 28$ og beregn c_1, c_2, c_3 og c_4, når $c_0 = 0$.