ENGLISH

PROBLEM 1 (30%)

(a) Define with both words and equations what the differential scattering cross section is and what it gives information about.

(b) Describe with both words and equations what is meant by time dilation, length contraction, and gauge invariance.

(c) Describe with both words and equations what the precise relation is between the following concepts: cyclic coordinates, canonical momenta, symmetries, and conservation laws.

(d) What are the two basic postulates of the special theory of relativity? Consider two particles with equal mass m colliding in the center-of-mass frame and producing a new particle m'. Find an analytical expression for the mass m' expressed in terms of m, v, and c where v is the speed of the particles colliding and c is the speed of light.

PROBLEM 2 (40%)

(a) Derive an analytical expression for the period of oscillation of a quartic one-dimensional oscillator with potential $U(x) = \frac{1}{4}\gamma x^4$ where $\gamma > 0$ is a positive constant. Express your answer in terms of m, γ, and E, where m and E are the mass and energy of the oscillator, respectively. You might find the following integral useful:

$$\int_0^1 \mathrm{d}z \frac{1}{\sqrt{1-z^4}} \simeq 1.31 \tag{1}$$

(b) Consider now instead a damped linear oscillator described by the equation of motion:

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{2}$$

Let us assume that the Lagrangian describing this system may be written as:

$$L = h(t)\left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right]. \tag{3}$$

Identify the function $h(t)$ so that the equation of motion produced by this Lagrangian is the same as Eq. (28). You may use the following initial condition in order to identify $h(t)$ uniquely: $h(0) = 1$.

(c) Construct the Hamiltonian $H = H(x, p, t)$ using the above Lagrangian L. Is the Hamiltonian H conserved?

(d) Find the transformed Hamiltonian $K = K(X, P, t)$ obtained from the generating function:

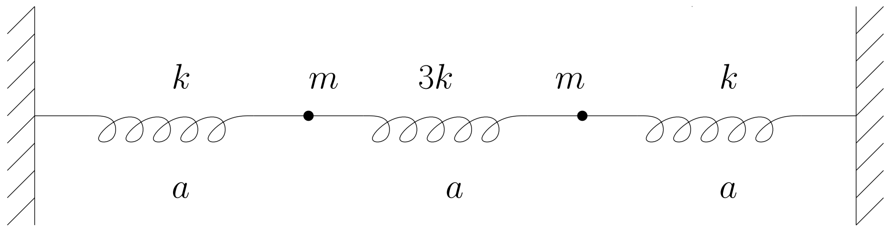
$$F_2(x, P, t) = \mathrm{e}^{\lambda t/2} xP. \tag{4}$$

Is the Hamiltonian K conserved?

PROBLEM 3 (30%)

(a) Consider a pendulum consisting of a uniform rigid rod of length L with total mass M and a snail of mass m which can crawl along the rod. The rod is pivoted at one end and is restricted to swing in a plane. Assume that the snail is originally positioned at the pivot-end of the rod and that it then crawls slowly with a constant speed v along the rod towards the bottom end of the rod. The snail may be treated as a point mass.Write down the Lagrangian for the rod-snail system and derive the equations of motion.

(b) Consider now a different scenario shown in Fig. 5. Two particles with mass m move in one dimension and are attached to springs as shown in the figure. The potential of the springs may be modelled by the usual harmonic oscillator potential with strength k. The springs all have unstretched lengths equal to a and the spring constants and masses are shown. Calculate the eigenfrequences of this system when the masses are slightly perturbed from their equilibrium positions.



Figur 1: The masses and springs in the setup described in Problem 3b.

Supplementary Information

The regime of validity and the meaning of the symbols below are assumed to be known by the reader.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{5}$$

$$[u,v]_{q,p} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right) \tag{6}$$

$$\begin{aligned} x_\mu &= (\mathbf{r}, \mathrm{i}ct), \\ p_\mu &= (\mathbf{p}, \mathrm{i}E/c) \end{aligned} \tag{7}$$

$$A_\mu = (\mathbf{A}, \mathrm{i}\phi/c),\ \mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t,\ \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \tag{8}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{9}$$

From the above equations, it follows that the general form of $F_{\mu\nu}$ in a given reference system is:

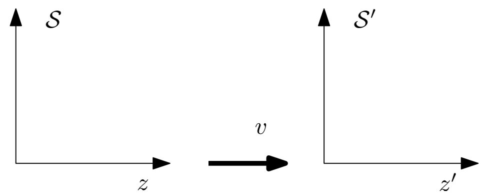
$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\mathrm{i}E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -\mathrm{i}E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -\mathrm{i}E_z/c \\ \mathrm{i}E_x/c & \mathrm{i}E_y/c & \mathrm{i}E_z/c & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$F'_{\mu\nu} = L_{\mu\alpha}L_{\nu\beta}F_{\alpha\beta}. \tag{11}$$

The Lorentz-transformation matrix for the situation in Fig. 6 is given by:

$$L_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \tag{12}$$

where $\beta = v/c$ and $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.



Figur 2: Lorentz-transformation along the z-axis.

Transformation equations for a generating function of type $F_2 = F_2(x,P,t)$:

$$p = \partial F_2/\partial x,\ X = \partial F_2/\partial P,\ K = H + \partial F_2/\partial t. \tag{13}$$

The moment of inertia for a uniform rod of length L and mass M around one of its end-points is $I = ML^2/3$.

BOKMÅL

PROBLEM 1 (30%)

(a) Definer både med ord og likninger hva det differensielle spredningstverrsnittet er og hva det gir informasjon om.

(b) Beskriv både med ord og likninger hva som er ment med tidsdilatasjon, lengdekontraksjon og gauge invarians.

(c) Beskriv både med ord og likninger hva som er den presise sammenhengen mellom følgende begreper: sykliske koordinater, kanoniske impulser, symmetrier og bevaringslover.

(d) Hva er de to grunnleggende postulatene til spesiell relativitetsteori? Betrakt nå to partikler som har lik masse m og som kolliderer i masse-senter referansesystemet slik at en ny partikkel m' produseres. Utled et analytisk uttrykk for massen m' som funksjon av m, v og c hvor v er hastigheten til de kolliderende partiklene mens c er lyshastigheten.

PROBLEM 2 (40%)

(a) Utled et analytisk uttrykk for svingningsperioden til en en-dimensjonal oscillator med potensiale $U(x) = \frac{1}{4}\gamma x^4$ hvor $\gamma > 0$ er en positiv konstant. Uttrykk ditt svar via m, γ og E, hvor m og E er massen og energien til oscillatoren, henholdsvis. Du vil kanskje finne følgende integral nyttig:

$$\int_0^1 \mathrm{d}z \frac{1}{\sqrt{1-z^4}} \simeq 1.31 \tag{14}$$

(b) Betrakt nå istedet en dempet lineær oscillator beskrevet av bevegelseslikningen:

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{15}$$

Anta at Lagrange funksjonen til dette systemet kan skrives på følgende måte:

$$L = h(t)\left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right]. \tag{16}$$

Finn funksjonen $h(t)$ slik at bevegelseslikningen som produseres av denne Lagrange funksjonen blir eksakt lik likning (28). Du kan bruke følgende initialbetingelse slik at $h(t)$ er unikt definert: $h(0) = 1$.

(c) Konstruer Hamilton funksjonen $H = H(x, p, t)$ fra ovennevnte Lagrange funksjon L. Er Hamilton funksjonen H bevart?

(d) Finn den transformerte Hamilton funksjonen $K = K(X, P, t)$ ved å bruke den genererende funksjonen:

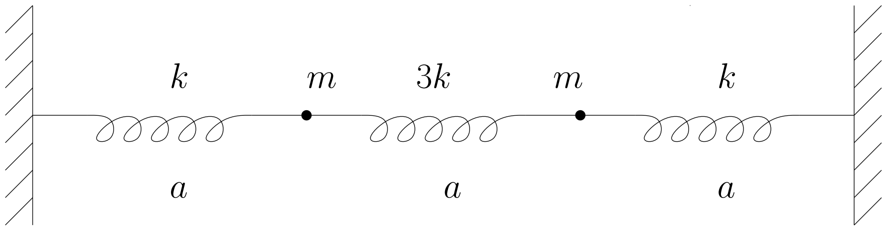
$$F_2(x, P, t) = \mathrm{e}^{\lambda t/2} xP. \tag{17}$$

Er Hamilton funksjonen K bevart?

PROBLEM 3 (30%)

(a) Betrakt en pendel bestående av en stiv, uniform stav med lengde L og masse M samt en snegle med masse m som kan krype langs staven. Staven er festet i den ene enden og er begrenset til å svinge i et plan. Anta at sneglen opprinnelig er posisjonert i enden av staven som er festet og at den sakte kryper mot den andre enden av staven med hastighet v. Sneglen kan behandles som en punktmasse. Skriv ned Lagrange funksjonen for stav-snegle systemet og utled bevegelseslikningene.

(b) Betrakt nå en annen situasjon som vist i Fig. 5. To partikler med masse m beveger seg i en dimensjon og er festet til fjærer som vist i figuren. Potensialet til fjærene kan modelleres ved det vanlige harmonisk oscillator potensialet med styrke k. Fjærene har i ustrukket tilstand lengde a og fjærkonstantene og massene er vist i figuren. Beregn egenfrekvensene til dette systemet når massene blir forskyvet fra deres likevektsposisjoner.



Figur 3: Massene og fjærene i systemet under betraktning i Problem 3b.

Oppgitt Informasjon

Gyldighetsområdet og betydelsen av symbolene nedenfor er antatt å være kjent av leseren.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{18}$$

$$[u,v]_{q,p} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right) \tag{19}$$

$$\begin{aligned} x_\mu &= (\mathbf{r}, \mathrm{i}ct), \\ p_\mu &= (\mathbf{p}, \mathrm{i}E/c) \end{aligned} \tag{20}$$

$$A_\mu = (\mathbf{A}, \mathrm{i}\phi/c),\ \mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t,\ \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \tag{21}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{22}$$

Fra ovenstående likninger følger det at den generelle formen til $F_{\mu\nu}$ i et gitt referansesystem er:

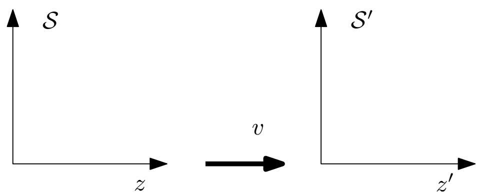
$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\mathrm{i}E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -\mathrm{i}E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -\mathrm{i}E_z/c \\ \mathrm{i}E_x/c & \mathrm{i}E_y/c & \mathrm{i}E_z/c & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$F'_{\mu\nu} = L_{\mu\alpha}L_{\nu\beta}F_{\alpha\beta}. \tag{24}$$

Matrisen for Lorentz-transformasjon som beskriver situasjonen i Fig. 6 er gitt ved:

$$L_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \tag{25}$$

hvor $\beta = v/c$ og $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.



Figur 4: Lorentz-transformasjon langs z-aksen.

Transformasjonslikninger for en genererende funksjon av type $F_2 = F_2(x,P,t)$:

$$p = \partial F_2/\partial x,\ X = \partial F_2/\partial P,\ K = H + \partial F_2/\partial t. \tag{26}$$

Treghetsmomentet for en uniform stav av lengde L og masse M rundt et av endepunktene til staven er $I = ML^2/3$.

NYNORSK

OPPGÅVE 1 (30%)

(a) Definer både med ord og likningar kva det differensielle spredningstverrsnittet er og kva det gjev informasjon om.

(b) Skildr både med ord og likningar kva som er meint med tidsdilatasjon, lengdekontraksjon og gauge invarians.

(c) Skildr både med ord og likningar kva som er den presise samanhengen mellom følgjande omgrep: sykliske koordinatar, kanoniske impulsar, symmetriar og bevaringslovar.

(d) Kva er dei to grunnleggjande postulata til spesiell relativitetsteori? Betrakt no to partiklar som har lik masse m og som kolliderer i masse-senter referansesystemet slik at ein ny partikkel m' blir produsert. Utled eit analytisk uttrykk for massen m' som funksjon av m, v og c kor v er farten til dei kolliderande partiklane medan c er lyshastigheten.

OPPGÅVE 2 (40%)

(a) Utled eit analytisk uttrykk for svingningsperioden til ein ein-dimensjonal oscillator med potensiale $U(x) = \frac{1}{4}\gamma x^4$ kor $\gamma > 0$ er ein positiv konstant. Uttrykk svaret ditt via m, γ og E, der m og E er massen og energien til oscillatoren, høvesvis. Du vil kanskje finne følgjande integral nyttig:

$$\int_0^1 \mathrm{d}z \frac{1}{\sqrt{1-z^4}} \simeq 1.31 \tag{27}$$

(b) Betrakt no i staden ein dempa lineær oscillator skildra av bevegelseslikningen:

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{28}$$

Anta at Lagrange funksjonen til dette systemet kan skrivast på følgjande måte:

$$L = h(t)\left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right]. \tag{29}$$

Finn funksjonen $h(t)$ slik at bevegelseslikningen som blir produsert av denne Lagrange funksjonen blir eksakt lik likning (28). Du kan bruke følgjande initialbetingelse slik at $h(t)$ er unikt definert: $h(0) = 1$.

(c) Konstruer Hamilton funksjonen $H = H(x, p, t)$ frå ovannemnde Lagrange funksjon L. Er Hamilton funksjonen H verna?

(d) Finn han transformerte Hamilton funksjonen $K = K(X, P, t)$ ved å bruke den genererande funksjonen:

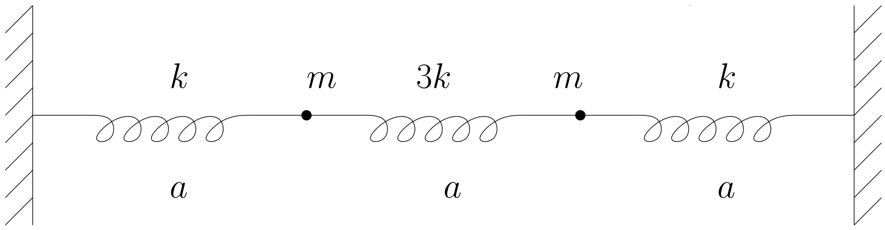
$$F_2(x, P, t) = \mathrm{e}^{\lambda t/2} xP. \tag{30}$$

Er Hamilton funksjonen K verna?

OPPGÅVE 3 (30%)

(a) Betrakt ein pendel beståande av ein stiv, uniform stav med lengd L og masse M og dessutan ein snegle med masse m som kan krype langs staven. Staven er festa i den eine enden og er avgrensa til å svinge i eit plan. Anta at sneglen opphavleg er posisjonert i enden av staven som er festa og at den sakte kryp mot den andre enden av staven med fart v. Sneglen kan handsamast som ein punktmasse. Skriv ned Lagrange funksjonen for stav-snegle systemet og utled bevegelseslikningene.

(b) Betrakt no ein annan situasjon som vist i Fig. 5. To partiklar med masse m rører seg i ein dimensjon og er festa til fjører som vist i figuren. Potensialet til fjørene kan modellerast ved det vanlege harmonisk oscillator potensialet med styrke k. Fjørene har i ustrukket tilstand lengd a og fjærkonstantene og massane er vist i figuren. Berekn egenfrekvensene til dette systemet når massane blir forskyvet frå deira likevektsposisjoner.



Figur 5: Massane og fjørene i systemet under betraktning i Oppgåve 3b.

Oppgjeve Informasjon

Gyldighetsområdet og betydelsen av symbola nedanfor er anteke å vere kjent av lesaren.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{31}$$

$$[u,v]_{q,p} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right) \tag{32}$$

$$\begin{aligned} x_\mu &= (\mathbf{r}, \mathrm{i}ct), \\ p_\mu &= (\mathbf{p}, \mathrm{i}E/c) \end{aligned} \tag{33}$$

$$A_\mu = (\mathbf{A}, \mathrm{i}\phi/c),\ \mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t,\ \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \tag{34}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{35}$$

Fra ovenstående likninger følger det at den generelle formen til $F_{\mu\nu}$ i eit gjeve referansesystem er:

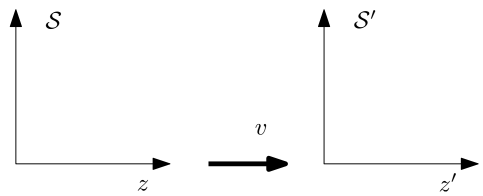
$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\mathrm{i}E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -\mathrm{i}E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -\mathrm{i}E_z/c \\ \mathrm{i}E_x/c & \mathrm{i}E_y/c & \mathrm{i}E_z/c & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$F'_{\mu\nu} = L_{\mu\alpha}L_{\nu\beta}F_{\alpha\beta}. \tag{37}$$

Matrisen for Lorentz-transformasjon som skildrar situasjonen i Fig. 6 er gjeve ved:

$$L_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \tag{38}$$

kor $\beta = v/c$ og $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.



Figur 6: Lorentz-transformasjon langs z-aksen.

Transformasjonslikningar for ein genererande funksjon av type $F_2 = F_2(x,P,t)$:

$$p = \partial F_2/\partial x,\ X = \partial F_2/\partial P,\ K = H + \partial F_2/\partial t. \tag{39}$$

Treghetsmomentet for ein uniform stav av lengd L og masse M rundt eit av endepunkta til staven er $I = ML^2/3$.