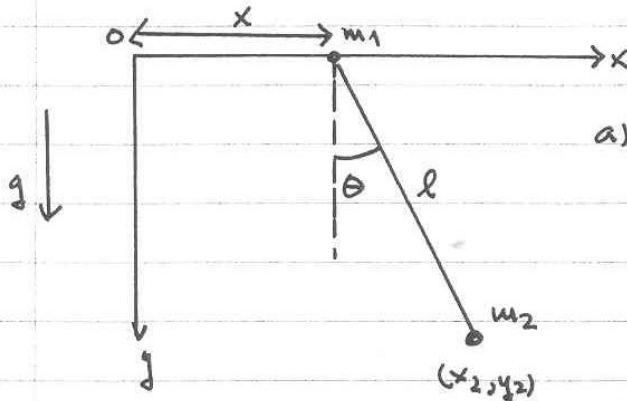


Løsning Oppgave 1



a) m_1 glir uten friksjon langs x -aksen.

$$x_2 = x + l \sin \theta, \quad y_2 = l \cos \theta$$

Kinetiske energier:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).$$

Da $\dot{x}_2 = \dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta$, $\dot{y}_2 = -l \dot{\theta} \sin \theta$ får

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + 2l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2).$$

Potensielle energier:

$$V_1 = 0 \quad (\text{velgt nullnivå}), \quad V_2 = -m_2 g l \cos \theta. \quad \text{Dette gir}$$

$$\underline{L = T - V = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (2l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + m_2 g l \cos \theta.}$$

b) x er sykliske koordinat (innholdes ikke i L), slik at den tilhørende kanoniske impulskomponent $p_x = \text{konstant}$. Ved handlingen i retning \vec{n} er generell $p_j = \vec{n} \cdot \vec{P}$.

Her: $\vec{n} = \vec{e}_x$, slik at $p_x = P_x$: total impuls i x -retning er konstant.

Av $p_x = \partial L / \partial \dot{x}$ får $p_x = (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\theta} \cos \theta = \text{konstant}$. Integrerer med hensyn på t : Da $p_x = 0$ blir

$$\underline{(m_1 + m_2) x + m_2 l \sin \theta = \text{konstant} \quad \textcircled{1}}$$

Av $(m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\theta} \cos \theta = 0$ løses ut \dot{x} :

$$\dot{x} = - \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \dot{\theta} \cos \theta$$

Dette settes inn i uttrykket for E :

Oppgave 1, forh.

$$E = T + V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2) - m_2gl\cos\theta$$

⇒

$$E = \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}^2\left(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\cos^2\theta\right) - m_2gl\cos\theta$$

- c) Ligning ① bestemmer posisjonen av massesentret CM i x-retning. Da denne posisjonen velges lik null, blir

$$(m_1 + m_2)x + m_2l\sin\theta = 0$$

(CM beveger seg opp og ned på y-aksen).

$$\text{Altså } x = -\frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot l\sin\theta. \quad \text{Det gir}$$

$$x_2 = x + l\sin\theta = \frac{m_1}{m_1+m_2} l\sin\theta, \text{ mens } y_2 = l\cos\theta \text{ som før.}$$

$$\Rightarrow \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \text{ hvor } a = \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot l, \quad b = l.$$

Hvis $m_1 \rightarrow \infty$: $a \rightarrow l$. Da er opphengningspunktet fast (i origo \odot). Bevegelsen av m_2 foregår på en sirkelbue, $x_2^2 + y_2^2 = l^2$.

Løsning Oppgave 2

a) Ved rotasjon om et fast punkt er $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Når gravitasjonen utelates, er $T = E$. Dermed blir

$$\begin{aligned} E &= \sum \frac{1}{2} m v^2 = \sum \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \sum \frac{1}{2} m \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underbrace{\sum \vec{r} \times m \vec{v}}_{\vec{L}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}. \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

Rotasjonssymmetriske legeme, $I_1 = I_2$, x_3 som symmetriakse, gir

$$L_1 = I_1 \omega_1, \quad L_2 = I_1 \omega_2, \quad L_3 = I_3 \omega_3.$$

Eulerlikningene blir $\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = 0$ når $\vec{N} = 0$.

Tar komponentene inn på legemets akser:

$$I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (I_1 - I_3) = 0$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (I_2 - I_1) = 0$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \underline{\omega_3 = \text{konstant}}$$

Imponer

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3.$$

De to første likningene kan skrives slik:

$$\dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2, \quad \dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1. \quad \text{Eliminerer } \omega_2:$$

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0, \quad \text{som har typisk løsning } \underline{\omega_1 = A \cos \Omega t}.$$

$$\text{Denne gir } \underline{\omega_2 = A \sin \Omega t}.$$

$$\text{Da følger } \underline{\omega_1^2 + \omega_2^2 = A^2}, \quad \text{som oppgitt i teksten.}$$

b) Dekomponer \vec{L} : $\vec{L} = I_1 \omega_1 \vec{i} + I_1 \omega_2 \vec{j} + I_3 \omega_3 \vec{k}$, som ved

$$\text{kvadrering gir } L^2 = I_1^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3^2 \omega_3^2 = I_1^2 A^2 + I_3^2 \omega_3^2.$$

$$\text{Løser mhp. } \omega_3^2: \quad \omega_3^2 = \frac{L^2 - I_1^2 A^2}{I_3^2} \quad \textcircled{2}$$

$$\text{Benytter nå } \textcircled{1}: \quad E = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

$$= \frac{1}{2} I_1 A^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

Oppgave 2, forts.

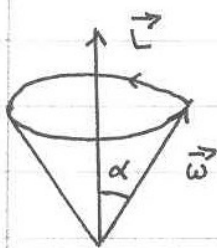
Her innsettes ω_3^2 fra (2):

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_3 \frac{L^2 - I_1^2 \dot{\phi}^2}{I_3^2}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{2EI_3 - L^2}{I_1(I_3 - I_1)}$$

c) Sett utnfra: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = 0$, $\vec{L} = \text{konstant}$.

\vec{L} preserverer ikke. Derimot preserverer $\vec{\omega}$ omkring \vec{L} .



Dette følger av utviklingene av $\vec{\omega}$ og \vec{L} på

legemets akse:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k}$$

$$\vec{L} = I_1 (\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j}) + I_3 \omega_3 \vec{k}$$

Tar produktet: $\vec{L} \cdot \vec{\omega} = L\omega \cos \alpha$.

Fra $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \dot{\phi}^2 + \omega_3^2$, $L^2 = I_1^2 \dot{\phi}^2 + I_3^2 \omega_3^2$, og

$$\vec{L} \cdot \vec{\omega} = I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3 \omega_3^2 = I_1 \dot{\phi}^2 + I_3 \omega_3^2, \text{ f\u00e5r}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{L} \cdot \vec{\omega}}{L\omega} = \frac{I_1 \dot{\phi}^2 + I_3 \omega_3^2}{\sqrt{I_1^2 \dot{\phi}^2 + I_3^2 \omega_3^2} \cdot \sqrt{\dot{\phi}^2 + \omega_3^2}}$$

Løsning Oppgave 3

- a) Lorentztransformasjon $x'_\mu = L_{\mu\nu} x^\nu$ er ortokron når $L_{44} > 1$
(det betyr ingen tidsinversjon).

Enhver Lorentztransformasjon er ortogonal, slik at determinanten $|L|$ oppfyller $|L|^2 = 1$.

Transformasjonen er proper (ekte) når $|L| = +1$.

(Rotasjoner invertres ikke.)

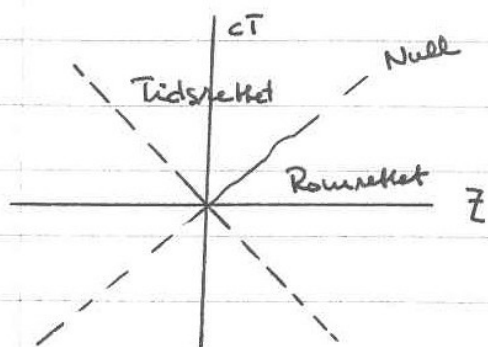
Lorentztransformasjonen

$$\underline{x^1 = x, y^1 = y, z^1 = \gamma(z - vt), t^1 = \gamma(t - \frac{v}{c}z), \text{ hvor } \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \beta = v/c.}$$

Ser på differansevektoren $X_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu}$.

Velger $X_\mu = (0, 0, Z, icT)$. En kan da

$$T' = \gamma(T - \frac{v}{c}Z) = \frac{\gamma}{c}(cT - \beta Z) \quad \text{①}$$



I romrettet område er $cT < Z$
(velger T og Z positive).

Av ① følger at $T' = 0$ med

$\beta < 1$. I romrettet område
kan altså 1 og 2 gjøres samtidige.
Ellers ikke.

Løsning Oppgave 3, forts.

b)



Total 4-impuls $P_\mu = p_{1\mu} + p_{2\mu}$. Generelt er $p_\mu p_\mu = -m^2 c^2$.

Da $P_\mu P_\mu$ er invariant, har den samme verdi som i CM-systemet, hvor $P'_\mu P'_\mu = -M^2 c^2$, $M =$ ekvivalent masse.

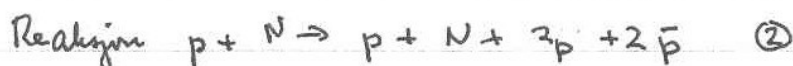
Regner ut

$$P_\mu P_\mu = (p_{1\mu} + p_{2\mu})(p_{1\mu} + p_{2\mu}) = \underbrace{p_{1\mu} p_{1\mu}}_{-m^2 c^2} + \underbrace{p_{2\mu} p_{2\mu}}_{-m^2 c^2} + 2 p_{1\mu} p_{2\mu} = -M^2 c^2$$

$$-2m^2 c^2 + 2 \left(\underbrace{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}_0 - \frac{1}{c} \underbrace{E_1 E_2}_{mc^2} \right) = -M^2 c^2$$

$$\underline{M^2 c^2 = 4m^2 c^2 + 2m K_1} \quad (1)$$

Terskeenergi er den minste verdi av K_1 som gjør reaksjonen mulig. Da vil nye partikler produseres, men de får ingen kinetisk energi.



[Reaksjonens Q-verdi er

$$Q = \sum m_{\mu} - 2m = 6m - 2m = 4m.]$$

Alle 6 partikler på høyre side av (2) er i ro.

$$M = 6m. \quad \text{Da gir (1) } (6m)^2 c^2 = 4m^2 c^2 + 2m K_1$$

$$\underline{K_1 = 16m^2 c^2}$$

Løsning av Oppgave 4 Har følgende lineære, inhomogene differanselikning

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{4} + a \quad \text{når } n \geq 0 \quad \text{og } a_0 = 0, \quad \text{med løsningen } a_n = \frac{4}{3}a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\}$$

a) Differanselikningen som viser antallet studenter som går i andre klasse

$$\text{etter } n \text{ år er: } \underline{b_{n+1} = \frac{1}{5}b_n + \frac{3}{5}a_n} \quad \text{eller} \quad \underline{b_{n+1} - \frac{1}{5}b_n = \frac{4}{5}a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\}}$$

Løsningen av likningen består av en løsning av den inhomogene likningen pluss løsningen av den tilhørende homogene likningen.

Som partikulær løsning av den inhomogene likningen

$$\text{forsøkes } b_n^{(p)} = A \left(\frac{1}{4} \right)^n + Bn + C, \quad \text{det gir} \quad b_n^{(p)} = -16a \left(\frac{1}{4} \right)^n + a.$$

$$\text{Den homogene likningen: } b_{n+1} - \frac{1}{5}b_n = 0, \text{ har løsningen } b_n^{(h)} = k \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^n.$$

$$\text{Benytter at } b_0 = 0 \text{ og får løsningen } \underline{b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = 15a \left(\frac{1}{5} \right)^n - 16a \left(\frac{1}{4} \right)^n + a}$$

b) Studentantallet skal stabilisere seg på 280, det vil si: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 280$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{4}{3}a \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) + 15a \left(\frac{1}{5} \right)^n - 16a \left(\frac{1}{4} \right)^n + a \right\} = \frac{4}{3}a + a = 280 \Rightarrow a = 120.$$

Det vil si at en hvert år bør ta opp 120 nye studenter i første klasse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3}a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\} = \frac{4}{3}a \Rightarrow \text{I år } n \text{ er antallet studenter i første klasse 160}$$

$$\text{Og tilsvarende } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 15a \left(\frac{1}{5} \right)^n - 16a \left(\frac{1}{4} \right)^n + a \right\} = a \Rightarrow 120 \text{ studenter i andre klasse.}$$

c) En vil oppnå en bedre utnyttelse av kapasiteten ved skolen hvis en lar begge klassene få like mange studenter

$$\text{Differenslikningen blir da: } c_{n+1} = \frac{1}{5}c_n + \frac{3}{5}a_n + N \text{ eller } c_{n+1} - \frac{1}{5}c_n = \frac{4}{5}a - \frac{4}{5}a \left(\frac{1}{4} \right)^n + N$$

Benytter følgende prøveløsning av den inhomogene likningen:

$$c_n^{(p)} = A \left(\frac{1}{4} \right)^n + Bn + C, \text{ som gir } b_n^{(p)} = a - 16a \left(\frac{1}{4} \right)^n + \frac{5}{4}N$$

$$\text{Løsningen av den homogene likningen, } b_{n+1} - \frac{1}{5}b_n = 0 \text{ er } b_n^{(h)} = k \left(\frac{1}{5} \right)^n.$$

Innsetter $c_0 = 0$ i løsningen $c_n = k\left(\frac{1}{5}\right)^n - 16a\left(\frac{1}{4}\right)^n + a + N \cdot \frac{5}{4}$ og finner $k = 15a - \frac{5}{4}N$

Dermed har vi følgende løsning:
$$c_n = \frac{\left(15a - \frac{5}{4}N\right)\left(\frac{1}{5}\right)^n - 16a\left(\frac{1}{4}\right)^n + a + \frac{5}{4}N}{1}$$

Innsetter $N = 28$ og får løsningen
$$c_n = \frac{(15a - 35)\left(\frac{1}{5}\right)^n - 16a\left(\frac{1}{4}\right)^n + a + 35}{1}$$

Det totale antallet studenter er 280 det vil si: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + c_n) = 280 \Rightarrow \frac{4}{3}a + a + 35 = 280$

\Rightarrow antallet nye studenter som taes opp i første klasse hvert år er $a = 105$

Til kontroll har vi: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{4}{3}a \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^x \right] \right\} = \frac{4}{3}a = \frac{4}{3} \cdot 120 = 140$

Og tilsvarende: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a + 35 = 140$

Innsetter $a = 105$ i løsningen og får:

$$c_n = \frac{140 \left\{ 1 + 11\left(\frac{1}{5}\right)^n - 12\left(\frac{1}{4}\right)^n \right\}}{1}$$

Det gir:

$$c_1 = 140 \cdot \frac{1}{5} = \underline{\underline{28}}$$

$$c_2 = 140 \cdot \frac{69}{100} \approx \underline{\underline{97}}$$

$$c_3 = 140 \cdot \frac{1801}{2000} \approx \underline{\underline{126}}$$

$$c_4 = 140 \cdot \frac{38\,829}{40\,000} \approx \underline{\underline{136}}$$