Løsningsforslag til eksamen i klassisk mekanikk våren 2010

Oppgave 1

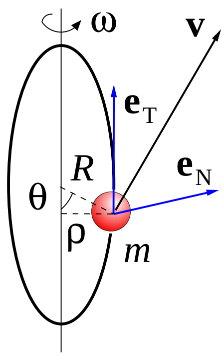

Figure 1:

a) Lagrangefunksjonen er gitt ved:

$$L = T - V$$

der T (V) er den kinetiske (potensielle) energien til systemet. Finner først den kinetiske energien:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Hastighetsvektoren $\mathbf{v}$ kan dekomponeres i en komponent tangentielt på sirkelen og en normalt på sirkelplanet, som antydet i figur 1:

$$\mathbf{v} = v_{\mathrm{T}}\mathbf{e}_{\mathrm{T}} + v_{\mathrm{N}}\mathbf{e}_{\mathrm{N}}$$

Her er

$$v_{\mathrm{T}} = R\dot{\theta}$$

og

$$v_{\mathrm{N}} = \rho\omega = (R\sin\theta)\,\omega$$

Den kinetiske energien blir dermed:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_{\mathrm{T}}^2 + v_{\mathrm{N}}^2) = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta)$$

Den potensielle energien er:

$$V = mgh = mgR(1 - \cos\theta)$$

når vi velger nullpunkt slikt at $V = 0$ på 'bunnen' av sirkelen. Lagrange-funksjonen blir dermed

$$L = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta\right) - mgR\,(1-\cos\theta)$$

som var det vi skulle vise.

b) Finner bevegelsesligningen for koordinaten θ fra Lagranges ligning:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

Venstre side:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mR^2\dot{\theta}\right) = mR^2\ddot{\theta}$$

Høyre side:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta$$

så:

$$mR^2\ddot{\theta} = mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta$$

og ved å dele på mR^2 får vi:

$$\ddot{\theta} = \left(\omega^2\cos\theta - g/R\right)\sin\theta$$

som var det vi skulle vise.

c) Betingelsen $\ddot{\theta} = 0$ gir oss ligningen:

$$\left(\omega^2\cos\theta - g/R\right)\sin\theta = 0$$

Denne er oppfylt dersom $\sin\theta = 0$ og/eller

$$\cos\theta = \frac{g}{R\omega^2}$$

Siden $|\cos\theta| \leq 1$ kan det siste bare være oppfylt når

$$\omega^2 \geq \frac{g}{R}$$

Konklusjon:
Når vinkelhastigheten ω er 'liten', $\omega^2 < \frac{g}{R}$, fins det to likevektspunkter:

$$\theta_{0,1} = 0 \qquad \text{og} \qquad \theta_{0,2} = \pi$$

som svarer til at kula er på 'toppen' eller 'bunnen' av sirkelen. Dersom vinkelhastigheten er høy nok, $\omega^2 \geq \frac{g}{R}$, fins det ytterligere to likevektspunkter:

$$\theta_{0,1} = 0\,, \qquad \theta_{0,2} = \pi\,, \qquad \theta_{0,3} = -\arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right) \quad \text{og} \quad \theta_{0,4} = \arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$$

og altså til sammen fire likevektspunkter.

Oppgave 2

a) Lagrangefunksjonen til systemet er gitt ved

$$L = T - V$$

Den potensielle energien kan deles opp slik

$$V = V_{\text{gravitasjon}} + V_{\text{fjær}}$$

der (se figur 2)

$$\begin{aligned} V_{\text{gravitasjon}} &= mgl(1 - \cos\theta_1) + mgl(1 - \cos\theta_2) \\ &= mgl\,(2 - \cos\theta_1 - \cos\theta_2) \end{aligned}$$

og

$$V_{\text{fjær}} = \frac{k}{2}\,(d - d_0)^2$$

Ser først på $V_{\text{gravitasjon}}$. Vi antar små utslag så $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ og

$$V_{\text{gravitasjon}} \approx \frac{1}{2}mgl\left(\theta_1^2 + \theta_2^2\right)$$

Men

$$\frac{\eta_1}{l} = \sin\theta_1 \approx \theta_1 \tag{1}$$

og tilsvarende for η_2, så

$$V_{\text{gravitasjon}} \approx \frac{1}{2}mgl\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right)$$

Ser så på $V_{\text{fjær}}$. Ved å studere figur 2 kan en finne at

$$d^2 = (d_0 + \eta_2 - \eta_1)^2 + \left(\sqrt{l^2 - \eta_1^2} - \sqrt{l^2 - \eta_2^2}\right)^2$$

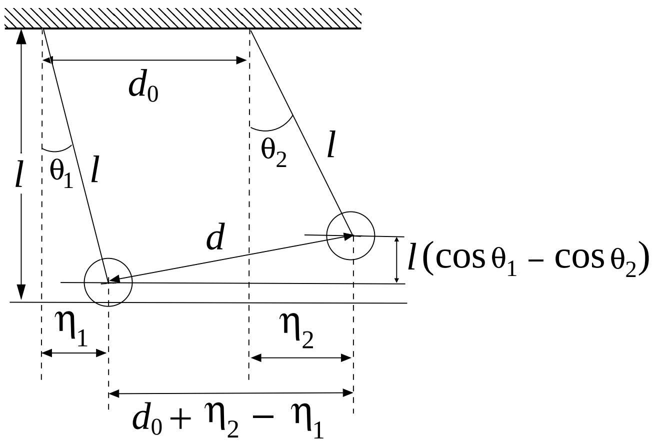

Figure 2:

Ved å ta kvadratrota på begge sider og trekke ut en faktor kan dette skrives

$$d = (d_0 + \eta_2 - \eta_1) \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{l^2 - \eta_1^2} - \sqrt{l^2 - \eta_2^2}}{d_0 + \eta_2 - \eta_1} \right)^2}$$

Nå har vi antatt at utslagene η_1 og η_2 er små, så vi kan rekkeutvikle:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{l^2 - \eta_1^2} - \sqrt{l^2 - \eta_2^2}}{d_0 + \eta_2 - \eta_1} \right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2d_0^2 l^2} (\eta_2^2 - \eta_1^2)^2$$

Vi får dermed følgende approksimasjon for $d - d_0$:

$$d - d_0 \approx \eta_2 - \eta_1 + \frac{1}{2d_0 l^2} (\eta_2^2 - \eta_1^2)^2$$

eller når vi neglisjerer ledd av fjerde orden og høyere:

$$d - d_0 \approx \eta_2 - \eta_1 \tag{2}$$

Så bidraget $V_{\text{fjær}}$ til den potensielle energien kan approksimeres ved

$$V_{\text{fjær}} = \frac{k}{2} (\eta_2 - \eta_1)^2 = \frac{k}{2} \left(\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_1\eta_2 \right)$$

og den totale potensielle energien til systemet ved:

$$V = \frac{1}{2} mgl \left(\eta_1^2 + \eta_2^2 \right) + \frac{k}{2} \left(\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_1\eta_2 \right)$$

når en antar små utslag. Finner så den kinetiske energien:

$$T = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

der

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2$$

(og tilsvarende for v_2^2) når vi antar at pendlene svinger i xy-planet. Innfører polarkoordinater og finner:

$$v_1^2 = l^2\dot{\theta}_1^2$$

Antar så små utslag, bruker ligning (1), og finner:

$$v_1^2 \approx \dot{\eta}_1^2$$

og tilsvarende for v_2^2. Den kinetiske energien er altså

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2)$$

under antagelsen om små utslag, og lagrangefunksjonen til systemet blir:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \frac{1}{2}mgl\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(\eta_1^2 + \eta_2^1 - 2\eta_1\eta_2\right)$$

som var det vi skulle vise.

b) Bevegelsesligningene finner vi ved å sette inn lagrangefunksjonen i Lagranges ligninger:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = \frac{\partial L}{\partial \eta_i} \qquad i = 1, 2$$

<u>Koordinat η_1:</u>
Venstre side:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\dot{\eta}_1\right) = m\ddot{\eta}_1$$

Høyre side:

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_1} = -\frac{mg}{l}\eta_1 - k(\eta_1 - \eta_2)$$

Tilsvarende beregning for η_2 gir følgende (koblede!) bevegelsesligninger:

$$m\ddot{\eta}_1 + \frac{mg}{l}\eta_1 + k(\eta_1 - \eta_2) = 0 \tag{3}$$

$$m\ddot{\eta}_2 + \frac{mg}{l}\eta_2 + k(\eta_2 - \eta_1) = 0 \tag{4}$$

c) Ved å sette inn

$$\eta_i = C a_i \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad i = 1, 2$$

i bevegelsesligningene og dele på $C\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ får vi:

$$-m\omega^2 a_1 + \frac{mg}{l} a_1 + k(a_1 - a_2) = 0$$

$$-m\omega^2 a_2 + \frac{mg}{l} a_2 + k(a_2 - a_1) = 0$$

Vi kan skrive dette på matriseform:

$$Va = \omega^2 T a$$

der

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad T = m \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad V = \begin{pmatrix} \frac{mg}{l} + k & -k \\ -k & \frac{mg}{l} + k \end{pmatrix}$$

Legg merke til at dette er et standard egenverdiproblem siden T er diagonal. Ligningssettet har ikke-triviell løsning når $\det(V - \omega^2 T) = 0$:

$$\det(V - \omega^2 T) = \begin{vmatrix} \frac{mg}{l} + k - m\omega^2 & -k \\ -k & \frac{mg}{l} + k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Dette gir oss følgende andregradsligning for ω^2:

$$m^2\omega^4 - 2m\omega^2 \left(k + \frac{mg}{l}\right) + \left(k + \frac{mg}{l}\right)^2 - k^2 = 0$$

som kan faktoriseres:

$$\left(m\omega^2 - \frac{mg}{l}\right)\left[m\omega^2 - \left(\frac{mg}{l} + 2k\right)\right] = 0$$

og da ser vi at egenfrekvensene er:

$$\underline{\underline{\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}}} \qquad \text{og} \qquad \underline{\underline{\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}}}$$

d) Egenvektoren som hører til frekvens ω_j (mode j)

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{pmatrix},$$

finner vi ved å sette inn egenfrekvensen ω_j i ligningsettet (3-4):

$$-m\omega_j^2 a_{1j} + \frac{mg}{l} a_{1j} + k(a_{1j} - a_{2j}) = 0$$

$$-m\omega_j^2 a_{2j} + \frac{mg}{l} a_{2j} + k(a_{2j} - a_{1j}) = 0$$

Eller, litt omskrevet, i:

$$\left(\frac{mg}{l} + k - m\omega_j^2\right) a_{1j} - ka_{2j} = 0 \tag{5}$$

$$-ka_{1j} + \left(\frac{mg}{l} + k - m\omega_j^2\right) a_{1j} = 0 \tag{6}$$

Mode 1, ω_1:
Ved substitusjon av $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ i ligning (5) finner vi:

$$a_{11} = a_{21}$$

altså svinger pendlene i fase, forflytter seg like langt og i samme retning.

Mode 2, ω_2:
Ved substitusjon av $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}$ i ligning (5) finner vi:

$$a_{12} = -a_{22}$$

så pendlene går mot hverandre (eksakt ut av fase), med like store forflytninger. Figur 3 illustrerer de to normalmodene.

Oppgave 3

I dette løsningsforslaget bruker jeg *reell metrikk*. På eksamen var det valgfritt. Med reell metrikk er Mandelstamvariablene gitt ved:

$$s \equiv (p_A + p_B)^2/c^2$$

$$t \equiv (p_A - p_C)^2/c^2$$

$$u \equiv (p_A - p_D)^2/c^2$$

der p_A er firerimpulsen til partikkel A, og så videre:

$$p_A = (E_A/c, \mathbf{p}_A)$$

og tilsvarende for p_B, p_c og p_D.

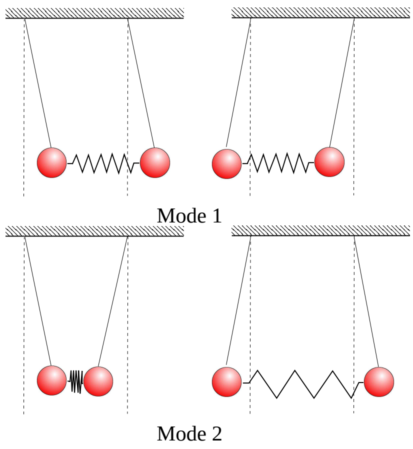

Figure 3:

a) Mandelstamparametrene er skalare størrelser siden de er skalarprodukt av firervektorer, og dermed relativistisk invariante størrelser. La oss vise det eksplisitt for s. Definer P:

$$P = p_A + p_B$$

slik at

$$sc^2 = P \cdot P$$

Lorentz-transformasjonen av P fra et system S til et annet S' er gitt ved

$$P'_\mu = L^\nu_\mu P_\nu$$

(oppgitt på eksamen). Skalarproduktet transformerer slikt:

$$P' \cdot P' = P'_\mu P'^\mu = L^\alpha_\mu P_\alpha L^\mu_\beta P_\beta = L^\mu_\beta L^\alpha_\mu P_\alpha P_\beta = \delta^\alpha_\beta P_\alpha P_\beta = P^\alpha P_\alpha = P \cdot P$$

der vi har brukt (oppgitt på eksamen)

$$L^\mu_\beta L^\alpha_\mu = \delta^\alpha_\beta$$

Altså er $P \cdot P$, og dermed s en Lorentz-invariant størrelse som var det vi skulle vise.

b) Fra definisjon av Mandelstamvariablene får vi

$$c^2 (s + t + u) = (p_A + p_B)^2 + (p_A - p_C)^2 + (p_A - p_D)^2$$

og videre

$$c^2\,(s+t+u) = p_A^2 + p_B^2 + p_C^2 + p_D^2$$
$$+2p_A\,(p_A + p_B - p_C - p_D)$$

Det siste leddet på høyre side er lik null. Det følger fra firerimpulsbevarelse:

$$p_A + p_B = p_C + p_D$$

Bruker vi så

$$p_A^2 = m_A^2 c^2$$

og tilsvarende for p_B^2, p_C^2 og p_D^2, får vi

$$c^2(s+t+u) = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 + m_C^2 c^2 + m_D^2 c^2$$

og ved å dele på c^2:

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2$$

som vi skulle vise.

c) Vi kan ta utgangspunkt i

$$sc^2 = (p_A + p_B)^2$$

Ekspanderer:

$$sc^2 = p_A^2 + p_B^2 + p_A \cdot p_B$$

De to første leddene på høyre side er lik $m_A^2 c^2$ og $m_B^2 c^2$. Partikkel B er i ro i lab-systemet, så $p_B = (E_B^{\text{lab}}/c, \mathbf{p}_B) = (m_B c, 0)$, og med $p_A = (E_A^{\text{lab}}/c, \mathbf{p}_A)$ får vi for det siste leddet

$$p_A \cdot p_B = m_B E_A^{\text{lab}}$$

så

$$sc^2 = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 + 2m_B E_A^{\text{lab}}$$

Løst for E_A^{lab}:

$$E_A^{\text{lab}} = \frac{(s - m_A^2 - m_B^2)c^2}{2m_B}$$

som var det vi skulle vise.