**Lørdagsverksted i fysikk.**
**Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2008.**

**Løsningsforslag til Øving 2.**

### Oppgave 1

**a)** Vi ser på et system bestående av en kloss på et horisontalt underlag og en snor med masse. Vi skal bestemme forholdet mellom den horisontale kraften du trekker i snora med, og den tilsvarende kraften snora trekker på klossen med. Når du trekker med kraften $T_1$ i snora, trekker du effektivt på både klossen og snora, slik at du må trekke med en kraft som kan uttrykkes via Newtons andre lov som:

$$T_1 = (m_k + m_s)\, a \tag{1}$$

Her er $a$ er systemets akselerasjon og $m_k$ og $m_s$ respektivt massene til klossen og snora. Kraften som snora trekker på klossen med uttrykkes på samme måte som:

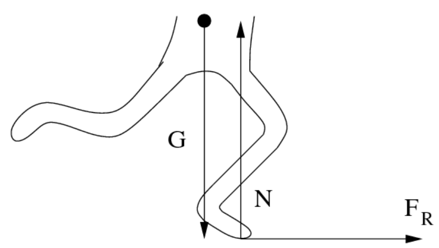
$$T_2 = m_k a \tag{2}$$

Forholdet $T_1/T_2$ mellom kraften du og snora trekker med kan derved uttrykkes ved:

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= \frac{(m_k + m_s)\, a}{m_k a} \\ &= 1 + \frac{m_s}{m_k} \end{aligned} \tag{3}$$

Vi ser at dersom snoras masse kan neglisjeres, så blir dette forholdet lik 1.

**b)** Her skal vi identifisere og tegne inn alle kreftene som virker på sprinteren. Vi vet at sprinteren, på samme måte som en kloss som ligger på et




Figur 1: Fritt-legme-diagram av sprinteren.

bord, vil påvirkes av gravitasjonskraften $\vec{G}$ og normalkraften $\vec{N}$ fra underlaget. Summen av disse kreftene i y-retningen (retningen perpendikulært på jordoverflaten) må være null i et øyeblikk der sprinterens akselerasjon, som beskrevet i oppgaven, peker horisontalt og fremover. Siden sprinteren akselererer må hun imidlertidig ifølge Newtons første og andre lov også bli påvirket av en kraft som peker i retning av akselerasjonen. Denne kraften kan uttrykkes som $\vec{F}_r = m\vec{a}$, som vist på Figur 1.

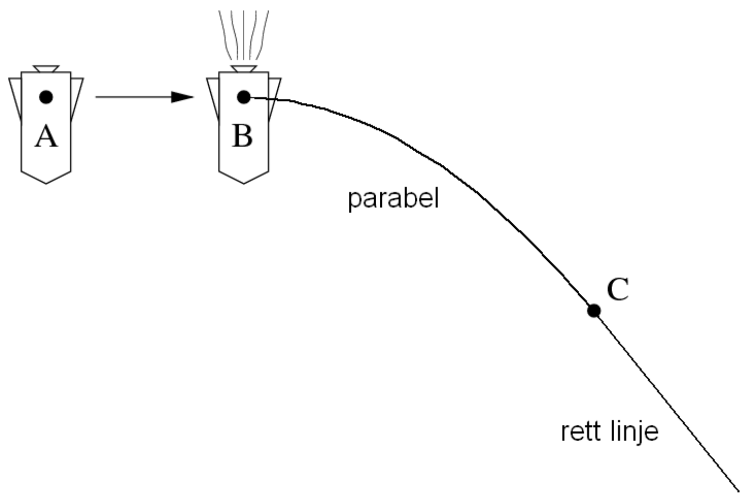
**Oppgave 2**

**a)** Nå skal vi se på romskip. I denne oppgaven er det første man kan merke seg at motoren til romskipet forårsaker en kraft som står perpendikulært på forflytningsvektoren mellom A og B. Dette betyr at romskipets fartskomponent i x-retningen vil være uendret under forflytningen fra B til C, mens i y-retningen vil romskipet akselerere under påvirkning av den konstante kraften $\vec{F}_m$. Selv om oppgaven spør etter en kvalitativ skisse, kan det være lurt å sette opp bevegelsesligningene for romskipets bane mellom de tre punktene. Mellom B og C vil disse kunne skrives som:

$$x\,(t_B < t < t_C) \;=\; x_B + v_x t \tag{4}$$

$$y\,(t_B < t < t_C) \;=\; y_B - \frac{1}{2}a_y t^2 \tag{5}$$

Minustegnet i den siste ligningen er der fordi romskipet beveger seg i den negative y-retningen. Disse ligningene beskriver en parabelbane. Når rom-



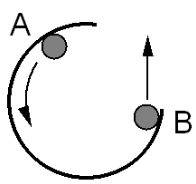

Figur 2: Romskipets bane mellom B og C er en parabel, mens etter at motoren slåes av i C, vil romskipet fortsette med rettlinjet bevegelse og konstant hastighet.

skipets motor så skrues av i posisjon C, vil romskipet ikke lengre bli påvirket av noen krefter, og bevegelsesligningene for romskipet kan da uttrykkes via:

$$x\,(t > t_C) = x_C + v_x t \tag{6}$$
$$y\,(t > t_C) = y_C - v_y t \tag{7}$$

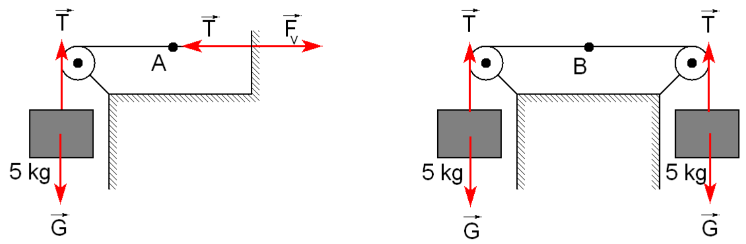
Disse ligningene beskriver rettlinjet bevegelse. Vi ser at resultatet er i tråd med Newtons første lov.

**b)** Vi ser på en klinkekule som triller innenfor en del av et sirkulært gjerde. Så lenge klinkekula triller innenfor gjerdet, er den påvirket av normalkraften fra gjerdet som forårsaker sentripetalakselerasjon. Når kula passerer punkt B og gjerdet stopper, vil den ifølge Newtons første lov fortsette med rettlinjet bevegelse og konstant hastighet, som vist på figuren.



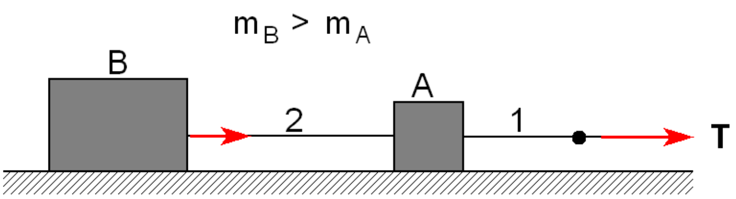

Figur 3: Når klinkekula forlater gjerdet, påvirkes den ikke lengre av den sentripetalakselererende normalkraften, og fortsetter dermed med rettlinjet bevegelse.

**c)** I denne oppgaven ser vi på en masse som henger i et tau fra en trinse, som vist på Figur 4. I det første tilfellet er tauet festet i en vegg. Siden massen er i ro, må taudraget $T$ være like stort som den kraften gravitasjonen utøver på massen. Vi får derfor at $T = 5\text{ kg}\cdot 9.81\text{ m/s}^2 = 49\text{ N}$. I tilfelle nummer




Figur 4: Kraftskisse for oppgave c). På tegningen er $\vec{G}$ gravitasjonskraften, $\vec{T}$ taudraget og $\vec{F_v}$ kraften fra veggen på tauet. Vi ser at taudragene i A og B er like store.

to, er det to masser som er festet til tauet. Taudraget $T$ blir imidlertidig det samme, som vist på figuren. Det kan du regne ut ved å se på kraftsummen på massene, slik som vi gjorde for det første tilfellet.




Figur 5: Kraftskisse til oppgave d). Systemet består av to masser og to tau som trekkes med en taukraft $\vec{T}$ bortover et horisontalt underlag. Kreftene i y-retningen er ikke tegnet inn siden systemet ikke har noen akselerasjon i denne retningen, og kraftsummen derfor er null.

**d)** Nå skal vi se på et system der vi trekker på to klosser festet sammen med tau. Situasjonen er illustrert i Figur 5. Analogt med hva vi fant i oppgave 1a), må taudraget $\vec{T}$ i tau 1 i følge Newtons andre lov være likt systemets akselerasjon $\vec{a}$ ganget med summen av de to massene $m_A$ og $m_B$ som tauet drar på. Kraften $\vec{F}_{1A}$ som tau 1 utøver på kloss A vil være lik dette taudraget, så vi kan skrive:

$$F_{1A} = (m_A + m_B)\, a \tag{8}$$

Tau 2 må trekke på kloss B akkurat nok til å forårsake en akselerasjon $\vec{a}$ av kloss B sin masse, så kraften $\vec{F}_{2B}$ som tau 2 utøver på kloss B kan skrives som:

$$F_{2B} = (m_B)\, a \tag{9}$$

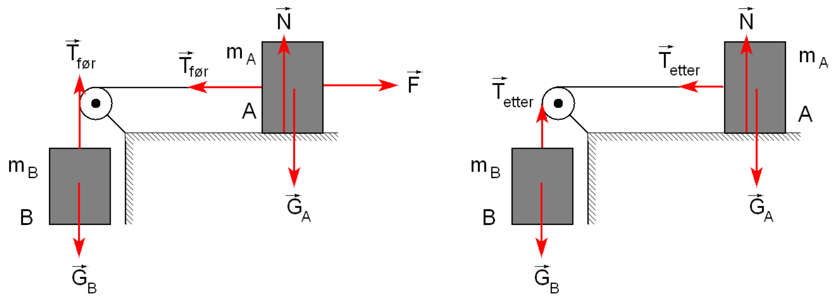
Dermed ser vi at $|\vec{F}_{1A}| > |\vec{F}_{2B}|$. Akselerasjonen til systemet kan vi uttrykke som funksjon av taudraget $T$ som følger:

$$a = \frac{T}{m_A + m_B} \tag{10}$$

**e)** Vi ser på to klosser forbundet med et tau over en trinse, som vist i Figur 6. Først holder du fast kloss A så den ikke beveger seg. Snora forhindrer kloss B i å falle, så snordraget er like stort og motsatt rettet gravitasjonskraften slik at størrelsen av $\vec{T}_{før}$ er gitt som:

$$T_{før} = G_B = m_B g \tag{11}$$

Vi ser så på hva som skjer når du har sluppet kloss A. Når man ser bort fra friksjonskrefter, betyr det at systemet beveger seg med en akselerasjon som er forårsaket av kraften $m_B g$ som gravitasjonen utøver på kloss B.




Figur 6: Systemet i oppgave e). I figuren til venste holder du fast i kloss A med en kraft $F$ som er like stor som taudraget.

Ifølge Newtons andre lov er da systemets totale masse $m_A + m_B$ ganget med systemets akselerasjon $a$, lik denne kraften, og vi kan skrive:

$$m_B g = (m_A + m_B)\, a \tag{12}$$

Dermed finner vi at $a$ er gitt som:

$$a = g\left(\frac{1}{1 + m_A/m_B}\right) \tag{13}$$

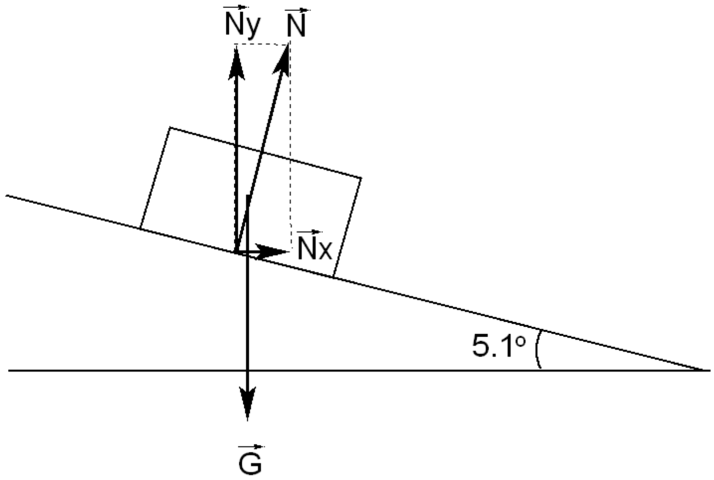
Den eneste kraften som forårsaker akselerasjonen av kloss A etter at du har sluppet den, er snordraget. Dermed finner vi basert på forrige ligning, at snordraget etter at du slapp kloss A er gitt som:

$$\begin{aligned} T_{etter} &= m_A a \\ &= m_A g\left(\frac{1}{1 + m_A/m_B}\right) \\ &= \frac{m_A m_B g}{m_A + m_B} \\ &= m_B g\left(\frac{1}{1 + m_B/m_A}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Vi ser at snordraget $T_{etter} < T_{før}$. Det virker rimelig.

### Oppgave 3

Vi ser på en bil som kjører på en isete vei og kommer inn i en sving. Nøkkelen til suksess i denne oppgaven, er å forstå hva 'unngå å skli av vegen' betyr. Hvis man tenker seg litt om, kommer man kanskje frem til at svaret egentlig er veldig enkelt – det betyr simpelthen at man kjører i en bane som er identisk med veiens bane. Det vil si at for å unngå å skli av veien må man følge veien. Det virker logisk. Ergo er vi ute etter hvor fort vi må kjøre




Figur 7: Kassebil i dosert sving.

for at bilen vår skal følge en sirkelbane med radius $r = 350$ m. Det er to krefter som virker på bilen vår. Gravitasjonskraften $\vec{G}$ virker i den negative y-retningen, perpendikulært på jordoverlaten. Normalkraften virker på hjulene, med omtrent $\vec{N}/4$ på hvert hjul. Vi regner dette som én kraft, som vist på Figur 7. Vi ser også fra figuren at doseringen gjør at normalkraften danner en vinkel på $\theta = 5.1°$ med y-retningen. For at vi skal kjøre i en sirkelbane med radius $r$, må vi ha en sentripetalakselerasjon $a = v^2/r$. Vi bruker Newtons andre lov og setter opp et ligningssett for summen av krefter i x- og y-retningen:

$$N_x = \frac{mv^2}{r} \tag{15}$$

$$N_y - mg = 0 \tag{16}$$

Her har vi dekomponert $\vec{N}$ i en komponent langs x-retningen og en langs y-retningen. Fra figuren og litt enkel trigonometri, ser vi at disse komponentene kan uttrykkes som $N_x = N \sin\theta$ og $N_y = N \cos\theta$. Innsatt gir dette følgende:

$$N = \frac{mv^2}{r \sin\theta} \tag{17}$$

$$N = \frac{mg}{\cos\theta} \tag{18}$$

Vi setter disse to uttrykkene lik hverandre, løser med hensyn på $v$ og får:

$$v = \sqrt{gr \tan\theta} \tag{19}$$

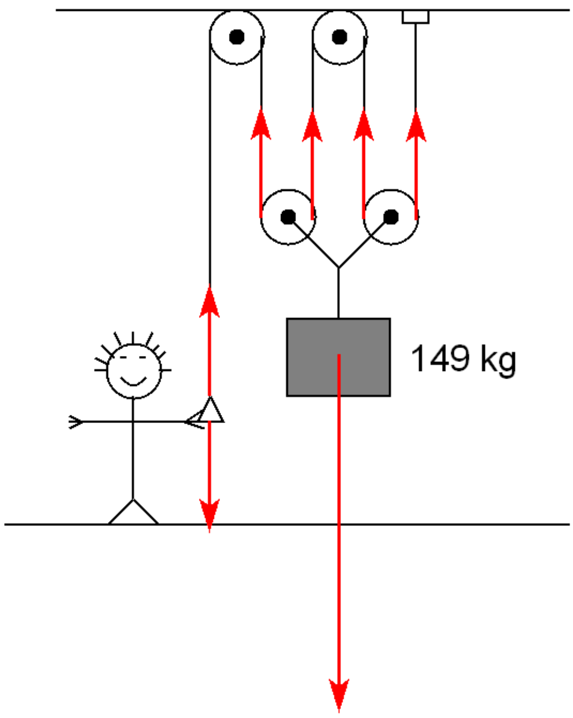
Helt til slutt setter vi inn tallverdier:

$$v = \sqrt{9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 350 \text{ m} \cdot \tan 5.1°} = 17.5 \text{ m/s}$$

Svaret, med riktig antall siffer, blir at vi må kjøre med en fart på 63 km/h.

### Oppgave 4

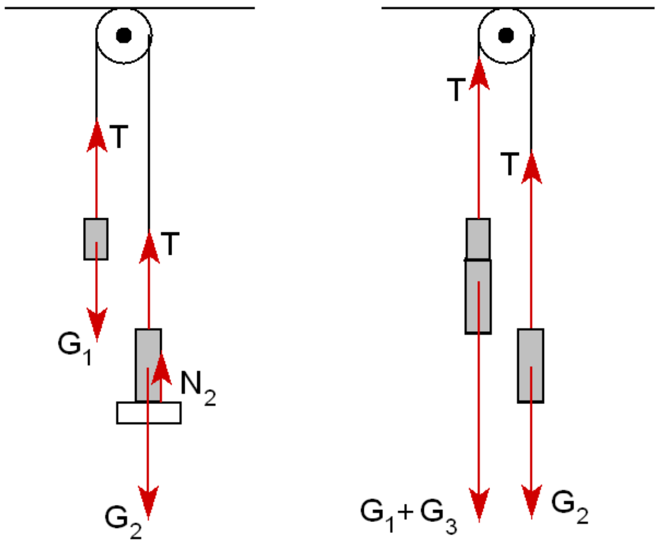
Trinser! Det er gøy. Her lønner det seg å sette opp en god tegning, ala den vist i Figur 8. Vi ser at tyngden $G = mg$ til pakken vil bli likt fordelt mellom de to trinsene den er bundet til, slik at taudraget fra hvert tau på hver av de to trinsene vil være $mg/4$. Dermed må du trekke med en kraft på mer enn $mg/4$, tilsvarende mer enn omtrent 365 N, for å løfte pakken.




Figur 8: Løft ved hjelp av fire trinser (taudraget på de øverste trinsene samt krefter fra taket er ikke tegnet inn siden de ikke inngår i oppgaveløsningen).

### Oppgave 5

Vi ser på et system med to lodd forbundet via et tau over en trinse. Den største massen hviler på ei vekt. Igjen er det essentielt å tegne, noe ala hva som er vist i Figur 9. Vi ser at gravitasjonskraften $\vec{G}_1$ og et snordrag $\vec{T}$ virker på masse $m_1$, mens gravitasjonskraften $\vec{G}_2$, snordraget $\vec{T}$ og normalkraften $\vec{N}_2$ fra vekta virker på masse $m_2$. Vi er ute etter å finne ut hva vekta viser. Ifølge Newtons tredje lov virker masse $m_2$ på vekta med en kraft $-\vec{N}_2$, som er like stor og motsatt rettet normalkraften $\vec{N}_2$. Derfor summerer vi først




Figur 9: Til venstre vises situasjonen med to masser festet i tauet. Til høyre vises situasjonen med tre masser. Merk at taudraget er forskjelling i de to tilfellene.

kreftene som virker på masse $m_2$:

$$m_2\vec{a} = \vec{G}_2 + \vec{T} + \vec{N}_2 \tag{20}$$

Tyngden $\vec{G}_2$ er som kjent lik $m_2\vec{g}$. Snordraget er lik det snordraget som skal til for å holde oppe masse $m_1$, altså er $\vec{T} = -m_1\vec{g}$. Vi løser den foregående ligningen med hensyn på den ukjente normalkraften:

$$\vec{N}_2 = m_2\vec{a} - \vec{G}_2 - \vec{T} \tag{21}$$

Når $m_2$ hviler på vekta er systemet i ro, så $\vec{a} = \vec{0}$, og vi får at:

$$\vec{N}_2 = -m_2\vec{g} + m_1\vec{g} = (m_1 - m_2)\,\vec{g} \tag{22}$$

Siden $m_1 - m_2 = -0.1$ kg, blir altså normalkraften $\vec{N}_2 = 1.0$ N, når vi legger vårt koordinatsystem slik at tyngdeakselerasjonen peker i negativ y-retning. Vekta vil derfor vise 0.1 kg. Strekk-krafta i tauet er på $T = 9.8$ N.

Vi hekter så et tredje lodd med masse $m_3 = m_2$ på loddet med masse $m_1$. Systemet vårt vil nå akselerere. Summen av krefter på massene $m_1 + m_3$ er gitt via Newtons andre lov som:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_3)\,\vec{a}_{1,3} &= \vec{G}_1 + \vec{G}_3 + \vec{T} \\ &= (m_1 + m_3)\,\vec{g} + \vec{T} \end{aligned} \tag{23}$$

Newtons andre lov gir på samme måte et uttrykk for sammenhengen mellom kreftene som virker på lodd $m_2$ og loddets akselerasjon:

$$\begin{aligned} m_2\vec{a}_2 &= \vec{G}_2 + \vec{T} \\ &= m_2\vec{g} + \vec{T} \end{aligned} \tag{24}$$

Vi velger å løse begge de foregående ligningene med hensyn på akselerasjonen, og får da at:

$$\vec{a}_{1,3} = \vec{g} + \frac{\vec{T}}{(m_1 + m_3)} \tag{25}$$

$$\vec{a}_2 = \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m_2} \tag{26}$$

Vi har at $\vec{a}_2 = -\vec{a}_{1,3}$, så vi kombinerer venstresidene i de to ligningene ovenfor og får dermed følgende:

$$\vec{g} + \frac{\vec{T}}{(m_1 + m_3)} = -\vec{g} - \frac{\vec{T}}{m_2} \tag{27}$$

Når vi løser for $\vec{T}$, får vi at:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= -2\vec{g}\left(\frac{m_2\,(m_1 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}\right) \\ &= -2\vec{g}\left(\frac{m_2\,(m_1 + m_2)}{m_1 + 2m_2}\right) \end{aligned} \tag{28}$$

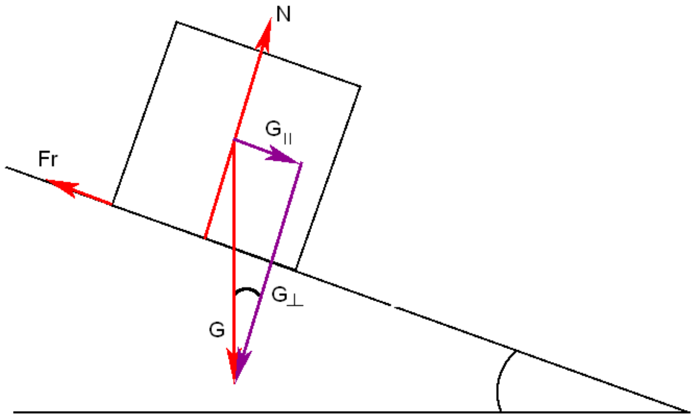
Minustegnet betyr at taudraget virker i motsatt retning av tyngdeakselerasjonen. Med innsatte tallverdier finner vi at taudraget nå er på $T = 14$ N. Vi finner akselerasjonen $a_2$ til lodd $m_2$ ved å sette inn i vårt tidligere uttrykk:

$$\begin{aligned} \vec{a}_2 &= \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m_2} \\ &= \vec{g}\left(1 - 2\frac{(m_1 + m_2)}{m_1 + 2m_2}\right) \\ &= -\vec{g}\left(\frac{m_1}{m_1 + 2m_2}\right) \end{aligned} \tag{29}$$

Akselerasjonen til lodd $m_2$ er da motsatt rettet tyngdeakselerasjonen, som forventet. Akselerasjonen til loddene $m_1$ og $m_3$ vil være av like stor tallverdi, pekende nedover i vertikalretningen.

### Oppgave 6

En kasse skal tippes av et lasteplan. Det er tre krefter som virker inn i denne oppgaven, nemlig tyngdekraften $\vec{G}$, normalkraften $\vec{N}$ og friksjonen




Figur 10: Kasse som tippes av et lasteplan. Dekomponeringen av tyngden er vist i lilla.

$\vec{F}_R$, der $F_r \leq \mu N$. Før kassen begynner å skli, må summen av krefter både perpendikulært på og parallellt med lasteplanet være null:

$$\vec{G}_{\perp} + \vec{N} = 0 \tag{30}$$
$$\vec{G}_{\|} + \vec{F}_r = 0 \tag{31}$$

Vi har her altså valgt å dekomponere tyngden hendholdsvis parallellt med og perpendikulært på lasteplanet. Litt enkel trigonometri gir oss da størrelsen på de to tyngdekomponentene:

$$G_{\perp} = mg\cos\theta_c \tag{32}$$
$$G_{\|} = mg\sin\theta_c \tag{33}$$

Her har vi satt inn en helning på $\theta_c$, som er den helningen der kassen akkurat skal begynne å skli. Da er også friksjonen er på sitt maksimum, slik at $F_r = \mu N$. Vi får dermed følgende uttrykk for summen av krefter perpendikulært på og parallellt med lasteplanet:

$$mg\cos\theta_c = N \tag{34}$$
$$mg\sin\theta_c = \mu N \tag{35}$$

Vi løser ligningssettet ved å dele den siste ligningen på $\mu$, og sette de to venstresidene like hverandre. Vi får da at den kritiske vinkelen er gitt som:

$$\theta_c = \arctan\mu \tag{36}$$

Erfaringen tilsier at ikke alle kasser glir – noen tipper. Tenk deg at du har to lasteplan. Det ene er dekket med myk gummi, det andre med glatt is. Du har to identiske kasser, og setter én på hvert lasteplan og begynner å tippe lasteplanene. Hvilken kasse tror du sklir og hvilken vil tippe? Hvilket lasteplan har størst friksjonskoeffisient?

**Oppgave 7**

**a)** Vi ser på et system bestående av en gutt og en kjelke forbundet med et tau på glatt underlag. Kreftene som virker på gutten er gravitasjonskraften $\vec{G}_1 = m_1\vec{g}$, normalkraften $\vec{N}_1 = -\vec{G}_1$ og taudraget $\vec{T}_1$. Kreftene som virker på kjelken er gravitasjonskraften $\vec{G}_2 = m_2\vec{g}$, normalkraften $\vec{N}_2 = -\vec{G}_2$ og taudraget $\vec{T}_2$. De to taudragene er like store, $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$, men motsatt rettet. Som vi allerede har sett mange ganger, så sier Newtons andre lov at et objekts akselerasjon ganger dets masse er lik summen av de kreftene som virker på objektet. Gutten vil derfor ha en konstant akselerasjon lik $\vec{a}_1 = \vec{T}_1/m_1$, mens kjelken vil ha en konstant akselerasjon $\vec{a}_2 = \vec{T}_2/m_2 = -\vec{T}_1/m_2$.

**b)** For å finne ut når gutten og kjelken møtes, må vi sette opp deres respektive bevegelsesligninger. Vi legger vårt koordinatsystem slik at gutten opprinnelig befinner seg i $x_1(0) = 0$ og kjelken befinner seg i $x_2(0) = s_0 > 0$. Guttens akselerasjon vil da være positiv, og kan utrykkes som $a_1 = T/m_1$, mens kjelkens akselerasjon kan skrives som $a_2 = -T/m_2$. Ligningen som beskriver guttens posisjon $x_1$ som følge av tida vil da kunne skrives som:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1 t^2 = \frac{T}{2m_1}t^2 \tag{37}$$

Ligningen for kjelkens posisjon kan tilsvarende uttrykkes ved:

$$x_2(t) = s_0 + \frac{1}{2}a_2 t^2 = s_0 - \frac{T}{2m_2}t^2 \tag{38}$$

Gutten og kjelken vil møtes ved et tidspunkt $t'$, slik at $x_1(t') = x_2(t')$:

$$\frac{T}{2m_1}t'^2 = s_0 - \frac{T}{2m_2}t'^2 \tag{39}$$

Vi løser med hensyn på tiden $t'$, og finner:

$$t' = \sqrt{\frac{s_0}{T/2m_1 + T/2m_2}} \tag{40}$$

Vi kan så sette denne tiden inn i for eksempel uttrykket for guttens posisjon, og får da:

$$\begin{aligned} x_1(t') &= \frac{T}{2m_1}\left(\frac{s_0}{T/2m_1 + T/2m_2}\right) \\ &= \frac{s_0}{1 + m_1/m_2} \end{aligned} \tag{41}$$

Det samme resultatet får vi ved å sette $t'$ inn i uttrykket for kjelkens posisjon.

**c)** Vi kan sjekke om resultatet vårt virker fornuftig ved å for eksempel tenke oss at kjelken er en veldig lett miniatyrkjelke, slik at $m_1 >> m_2$. Da vil uttrykket for når kjelken og gutten møtes gå mot null, altså vil de møtes nærme guttens originale posisjon, som virker fornuftig. Vi ser også at når kjelken er meget tung, slik at $m_1 << m_2$, så vil gutten og kjelken møtes nær $s_0$, som var kjelkens originale posisjon.

### Oppgave 8

**a)** Vi ser på en mann som står på ei vekt inne i en heis som beveger seg oppover. Akselerasjonen til systemet finner vi ved å se på kraftsummen. Systemets totale masse er oppgitt til å være $m = 750$ kg, slik at gravitasjonskraften $\vec{G}_{tot} = m_{tot}\vec{g}$. Snordraget $\vec{T}$ er oppgitt til å være på 8.30 kN, i retning oppover, siden heisen beveger seg oppover. Akselerasjonen blir da kraftsummen delt på systemets totale masse:

$$a = \frac{T - m_{tot}g}{m_{tot}} = \frac{8300 - 750 \cdot 9.81}{750}\ \mathrm{m/s^2} = 1.26\ \mathrm{m/s^2} \tag{42}$$

**b)** I forrige oppgave fant vi akselerasjonen til totalsystemet. Dette vil også være mannens akselerasjon. De kreftene som virker på mannen, er gravitasjonskraften $\vec{G}_m = m_m\vec{g}$ og normalkraften $\vec{N}_m$ fra vekta. Newtons andre lov gir oss da følgende uttrykk:

$$m_m a = N_m - m_m g \tag{43}$$

Vi løser med hensyn på den ukjente normalkraften, og får:

$$N_m = m_m\,(a + g) = 75\ \mathrm{kg} \cdot (1.26 + 9.81)\ \mathrm{m/s^2} = 830\ \mathrm{N} \tag{44}$$

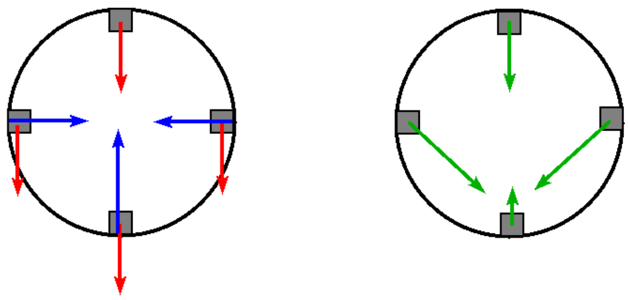
Siden mannen virker på vekta med en kraft $-\vec{N}_m$, viser altså vekta at mannen 'veier' (830/9.81) kg = 84.6 kg.

**c)** Vi har oppgitt at ved tida $t = 0.0$ s var heisen i ro. Vi fant i oppgave a) at heisen så har en konstant akselerasjon på 1.26 m/s$^2$. Hastigheten til heisen ved tida $t = 3.0$ s er da gitt ved uttrykket:

$$v(t) = v(0) + at = 0 + at = 1.26\ \mathrm{m/s^2} \cdot 3.0\ \mathrm{s} = 3.8\ \mathrm{m/s}. \tag{45}$$

### Oppgave 9

En kloss glir uten friksjon på innsiden av en vertikalstilt ring. Kreftene som virker på klossen er gravitasjonskraften $\vec{G} = m\vec{g}$ fra jorda og normalkraften $\vec{N}$ fra ringen. Vi ser at i forhold til et koordinatsystem der ringen er i ro og boksen beveger seg, så vil normalkraften hele tiden endre retning. På toppen av ringen vil normalkraften peke i samme retning som gravitasjonskraften, mens i bunnen av ringen peker normalkraften og gravitasjonskraften motsatt vei. Ser vi litt nærmere etter, skjønner vi at normalkraften alltid peker inn mot sentrum av ringen, og bidrar til å forårsake sentripetalakselerasjonen som gjør at klossen holdes i sin sirkulære bane. De innvirkene kreftene samt summen av de er tegnet inn på Figur 11. Vi skal så finne hvor stor hastighet



Figur 11: Kraftskjema for kloss som sklir i en vertikal ring. Det venstre bildet viser gravitasjons- og normalkrefter, mens det høyre viser summen av disse.

klossen må ha på toppen av sin bane for at den ikke skal miste kontakten med ringen. Dette betyr av vi må kreve at normalkraften $|\vec{N}| \geq 0$. Dessuten vet vi at for at klossen skal gå i en sirkulær bane, må den være utsatt for en akselerasjon $a = v^2/R$, der $R$ er ringens radius. Minstekravet for hastigheten blir da at akkurat på toppen av banen så er normalkraften $\vec{N} = \vec{0}$, og Newtons andre lov gir at:

$$m\frac{v_{min}^2}{r} = mg \tag{46}$$

Vi løser med hensyn på farten og får:

$$v_{min} = \sqrt{gR} \tag{47}$$

### Oppgave 10

**a)** Vi skal se på ulike måter å åpne en hengslet dør på. Uttrykket for dreiemomentet er armen krysset med kraften. La oss si at armen har en lengde $l$ langs den negative x-aksen på et kartesisk koordinatsystem. Vi kan dermed regne ut alle dreiemomentene i oppgaven:

$$\vec{\tau}_A = l(-\hat{x}) \times (20\text{ N})(-\hat{y}) = (20\text{ N})l\hat{z} \tag{48}$$
$$\vec{\tau}_B = (l/2)(-\hat{x}) \times (20\text{ N})(-\hat{y}) = (10\text{ N})l\hat{z} \tag{49}$$
$$\vec{\tau}_C = l(-\hat{x}) \times (20\text{ N})(-\hat{x}) = 0 \tag{50}$$
$$\vec{\tau}_D = (l/4)(-\hat{x}) \times (30\text{ N})(-\hat{y}) = (7.5\text{ N})l\hat{z} \tag{51}$$
$$\vec{\tau}_E = (l/2)(-\hat{x}) \times (50\text{ N} \cdot \sin 30^\circ)(-\hat{y}) = (12.5\text{ N})l\hat{z} \tag{52}$$
$$\vec{\tau}_F = l(-\hat{x}) \times (40\text{ N} \cdot \sin 135^\circ)(-\hat{y}) = (28\text{ N})l\hat{z} \tag{53}$$

Vi ser at dreiemomentene, rangert fra størst til minst, blir: $\vec{\tau}_F$, $\vec{\tau}_A$, $\vec{\tau}_E$, $\vec{\tau}_B$, $\vec{\tau}_D$ og $\vec{\tau}_C$. I uttrykkene ovenfor er det viktig å huske på at $l$ er en lengde som dermed har SI-enhet meter, slik at enheten for dreiemoment blir Nm, altså newton ganger meter.

**b)** Vi ser på en balansert bom med tre masser. For å finne den ukjente massen $m$, som vi heretter kaller $m_2$, setter vi opp et uttrykk for det totale dreiemomentet $\vec{\tau}_{tot}$ om støttepunktet. Det er mest oversiktlig å begynne med algebraiske symboler, og så heller sette inn enheter i sluttsvaret:

$$\vec{\tau}_{tot} = m_1\vec{g}\times\vec{l}_1 + m_2\vec{g}\times\vec{l}_2 + m_3\vec{g}\times\vec{l}_3 \tag{54}$$

Vi løser med hensyn på den ukjente massen $m_2$, og setter størrelsen på $\vec{\tau}_{tot}$ lik null slik at systemet er i likevekt, som oppgitt i oppgaveteksten:

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{\vec{\tau}_{tot} - m_1\vec{g}\times\vec{l}_1 - m_3\vec{g}\times\vec{l}_3}{\vec{g}\times\vec{l}_2} \\ &= \frac{-m_1\vec{g}\times\vec{l}_1 - m_3\vec{g}\times\vec{l}_3}{\vec{g}\times\vec{l}_2} \end{aligned} \tag{55}$$

Vi kan videre separere lengder og retninger og forenkle litt:

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{-m_1 g(-\hat{y})\times l_1(-\hat{x}) - m_3 g(-\hat{y})\times l_3\hat{x}}{g(-\hat{y})\times l_2(-\hat{x})} \\ &= \frac{-m_1 l_1\hat{z} - m_3 l_3(-\hat{z})}{l_2\hat{z}} \\ &= \frac{-m_1 l_1 + m_3 l_3}{l_2} \\ &= 0.9\text{ kg} \end{aligned} \tag{56}$$

Når vi har satt inn de oppgitte størrelsene for å finne den ukjente massen, finner vi altså at med rikitg antall siffer blir svaret at den ukjente massen må være på 0.9 kg. Det kunne du kanskje ha regnet ut uten å sette opp alle ligningene? Men det kan være greit å ha klart for seg metodikken før man tar snarveiene.

**c)** Nå skal vi regne ut hvor vi må plassere en kjent masse for å balansere bommen i oppgaveteksten. Vi setter igjen opp ligningen for det totale dreiemomentet om støttepunktet:

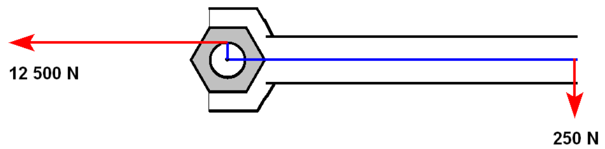
$$\vec{\tau}_{tot} = m_1\vec{g}\times\vec{l}_1 + m_2\vec{g}\times\vec{l}_2 + m_3\vec{g}\times\vec{l}_3 \tag{57}$$

Denne gangen skal vi løse ligningen med hensyn på den ukjente lengden $\vec{l}_2$. Vi følger fremgangsmåten i forrige oppgave ved først å separere lengder og retninger og forenkle:

$$
\begin{aligned}
-\hat{y} \times \vec{l}_2 &= \frac{\vec{\tau}_{tot} - m_1\vec{g} \times \vec{l}_1 - m_3\vec{g} \times \vec{l}_3}{m_2 g} \\
&= \frac{-m_1 g(-\hat{y}) \times l_1(-\hat{x}) - m_3 g(-\hat{y}) \times l_3\hat{x}}{m_2 g} \\
&= \frac{-m_1 l_1 \hat{z} - m_3 l_3(-\hat{z})}{m_2} \\
&= \frac{-m_1 l_1 + m_3 l_3}{m_2}\hat{z} \\
&= (55 \text{ cm})\hat{z} \qquad (58)
\end{aligned}
$$

Med innsatte tallverdier får vi at lengden av $\vec{l}_2$ er 55 cm, og retningen på armen negativ (siden $-\hat{y} \times \vec{l}_2 = (55 \text{ cm})\hat{z}$ må $-\hat{y} \times \vec{l}_2 = -\hat{y} \times l_2\,(-\hat{x})$). Det betyr at vi må plassere 2.0 kg-loddet 55 cm til venstre for støttepunktet.

**d)** Her skal vi finne ut hvor lang skiftenøkkel vi trenger for å løsne en skrue. Det lønner det seg igjen og lage en oversiktlig tegning. Dreiemomentet vi




Figur 12: Den rustne skruen og skiftenøkkelen med inntegnede krefter (rødt) og armer (blått).

påfører skruen kan skrives som $\tau_1 = r_1 \cdot 250\text{ N} \cdot \sin 90° = r_1 \cdot 250$ N. Friksjonskraften forhindrer rotasjon av skruen med en dreiemoment som kan skrives som $\tau_2 = 4\text{ mm} \cdot 12500\text{ N} \cdot \sin 90° = 50$ Nm. Når disse to dreiemomentet er like store i tallverdi, kan skruen akkurat begynne å løsne. Vi ser dermed at skiftenøkkelen må være minst 20 cm lang.

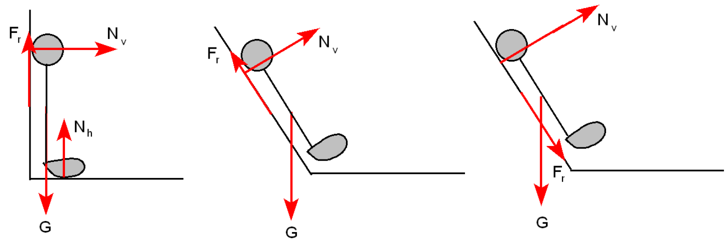
**e)** Vi ser på en skive som kan rotere rundt sin senterakse. Her ser vi at det er fem krefter som virker på skiva. Vi setter opp ligningen for det totale dreiemomentet om senteraksen:

$$
\begin{aligned}
\vec{\tau}_{tot} &= 0.2\ \mathrm{m} \cdot 30\ \mathrm{N} \cdot \sin 90^\circ \cdot (-\hat{z}) \\
&+ \sqrt{2 \cdot 0.1^2}\ \mathrm{m} \cdot 30\ \mathrm{N} \cdot \sin 45^\circ \hat{z} \\
&+ 0.2\ \mathrm{m} \cdot 20\ \mathrm{N} \cdot \sin 90^\circ \hat{z} \\
&+ 0.2\ \mathrm{m} \cdot 20\ \mathrm{N} \cdot \sin 0^\circ \\
&+ 0.1\ \mathrm{m} \cdot 30\ \mathrm{N} \cdot \sin 90^\circ (-\hat{z}) \\
&= 7\ \mathrm{Nm}\hat{z} + 9\ \mathrm{Nm}(-\hat{z}) \\
&= 2\ \mathrm{Nm}(-\hat{z}) \qquad (59)
\end{aligned}
$$

Det vil si at det totale dreiemomentet er på 2 Nm med klokka, så hvis skiva opprinnelig var i ro, så vil den begynne å dreie med klokka.

## Oppgave 11

**a)** I denne oppgaven ser vi på en person som befinner seg i en karusell. Vi lager en skisse av situasjonen og tegner inn kreftene som virker på personen. Disse kreftene vil være gravitasjonskraften $\vec{G} = m\vec{g}$, normalkraften $\vec{N}_h$ fra det horisontale gulvet, normalkraften $\vec{N}_v$ fra den (opprinnelig) vertikale karusellveggen, samt veggfriksjonen $\vec{F}_r$. Dette er vist i den venstre tegningen på Figur 13. I den første delen av oppgaven, er veggene i karusellen vertikale.




Figur 13: Kraftdiagrammer for karusellturen. Til venstre vises situasjonen der både friksjonen og normalkraften fra det horisontale gulvet holder personen oppe. I midten er det kun friksjonen som hindrer personen i å skli. Tegningen til høyre viser det siste tilfellet, der karusellen har så stor hastighet av personen sklir oppover veggen, og friksjonen følgelig virker nedover veggen.

Den minste vinkelhastigheten $\omega_0$ hvorunder personen vil holdes fast mot veggen på grunn av friksjon, kan vi da finne ved å sette normalkraften fra det horisontale gulvet lik null, og kreve at resten av kreftene summerer seg til null i y-retningen. Vi setter opp en ligning for dette basert på Newtons andre lov:

$$\sum F_y = -mg + F_r = -mg + \mu N_v = 0 \qquad (60)$$

Her har vi satt inn den maksimale verdien av friksjonen fordi vi er ute etter når personen bare såvidt holdes fast. Vi kan finne et uttrykk for størrelsen av normalkraften $\vec{N}_v$ ved å se på kraftsummen og akselerasjonen i x-retningen:

$$\sum F_x = N_v = m\omega_0^2 r \tag{61}$$

Vi kombinerer de to foregående ligningene og får:

$$mg = \mu m\omega_0^2 r \tag{62}$$

Til slutt løser vi for $\omega_0$:

$$\omega_0 = \pm\sqrt{\frac{g}{\mu r}} \tag{63}$$

**b)** Vi har nå at sideveggene i karusellen ikke lengre er vertikale. Vi skal igjen finne den minimale vinkelhastigheten der friksjonen holder personen fast mot veggen. Fremgangsmåten blir den samme som i forrige oppgave. Vi setter først opp et uttrykk for kraftbalansen i y-retning:

$$\sum F_y = -mg + F_r\cos\theta + N_v\sin\theta = -mg + N_v\left(\mu\cos\theta + \sin\theta\right) = 0 \tag{64}$$

På samme måte får vi i x-retningen følgene uttrykk:

$$\sum F_x = -F_r\sin\theta + N_v\cos\theta = N_v\left(\cos\theta - \mu\sin\theta\right) = m\omega_{min}^2(\theta)r \tag{65}$$

Vi kombinerer så de to uttrykkene:

$$mg = m\omega_{min}^2(\theta)r\frac{(\mu\cos\theta + \sin\theta)}{(\cos\theta - \mu\sin\theta)} \tag{66}$$

Til slutt løser vi for $\omega_{min}(\theta)$, og får at:

$$\omega_{min}(\theta) = \sqrt{\frac{g}{r}\frac{(\cos\theta - \mu\sin\theta)}{(\mu\cos\theta + \sin\theta)}} \tag{67}$$

Vi kan sjekke at uttykket vårt stemmer med svaret vi fant i oppgave a) ved å sette inn for $\theta = 0$. Vi ser at vi da får tilbake svaret som vi fant i a), og det er bra.

**c)** Vi starter nå i situasjonen beskrevet i a) og beveger oss over i situasjonen beskrevet i b), ettersom de opprinnelig vertikale karusellveggene begynner å helle utover. Karusellen snurrer rundt med den konstante vinkelhastigheten $\omega_0$. For å forstå retningen på friksjonen i dette tilfellet, kan man tenke seg det ekstreme tilfellet hvor $\theta = 90°$ og karusellveggene er horisontale. Den eneste andre innvirkende kraften som da kan holde personen i en sirkulær bane, er friksjonen, som følgelig må virke inn mot sentrum av karusellen. I forhold til friksjonen i oppgave b) virker friksjonen i denne oppgaven altså i motsatt retning. Vi setter opp kraftbalansen igjen:

$$\sum F_y = -mg - F_r\cos\theta + N_v\sin\theta = -mg + N_v\left(-\mu\cos\theta + \sin\theta\right) = 0 \tag{68}$$

I x-retningen får vi følgene uttrykk:

$$\sum F_x = F_r \sin\theta + N_v \cos\theta = N_v\left(\cos\theta + \mu\sin\theta\right) = m\omega_0^2 r \tag{69}$$

Vi setter sammen:

$$\begin{aligned} mg &= m\omega_0^2 r\frac{(-\mu\cos\theta + \sin\theta)}{(\cos\theta + \mu\sin\theta)} \\ &= m\frac{g}{\mu r} r\frac{(-\mu\cos\theta + \sin\theta)}{(\cos\theta + \mu\sin\theta)} \end{aligned} \tag{70}$$

Når vi forenkler dette uttykket litt, får vi:

$$\cos\theta + \mu\sin\theta = -\cos\theta + \frac{1}{\mu}\sin\theta \tag{71}$$

Videre finner vi da at:

$$2\cos\theta = \left(\frac{1}{\mu} - \mu\right)\sin\theta \tag{72}$$

Siden $\sin\theta/\cos\theta = \tan\theta$ kan dette skrives som:

$$\tan\theta = \frac{2}{1/\mu - \mu} = \frac{2\mu}{1-\mu^2} \tag{73}$$

Til slutt løser vi for $\theta$:

$$\theta = \arctan\frac{2\mu}{1-\mu^2} \tag{74}$$

Vi kan sjekke rimeligheten av svaret ved å se på grensetilfellet der $\mu = 0$, det vil si tilfellet uten friksjon. Innsatt i svaret vårt, ser vi at den kritiske vinkelen da er $\arctan 0 = 0°$. Dersom friksjonskoeffisienten derimot er $\mu = 1$, ser vi at arctan-argumentet går mot uendelig, og vinkelverdien blir følgende $90°$. Det virker rimelig, så vi tror svaret vårt stemmer bra!

**d** Vi ser fra svaret vi fant i oppgave a) at med de innsatte verdiene blir $\omega_0 = 1.2$ rad/s. Siden en omdreining er på $2\pi$ rad, bruker da karusellen $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 5.3$ s på en omdreining. Personen i karusellen vil da bevege seg med en hastighet gitt ved $v_0 = \omega_0 r = 11.8$ m/s $= 43$ km/h. Vinkelen $\theta_0$ fant vi uttrykket for i forrige oppgave. Med tallverdier innsatt, finner vi at $\theta_0 = 70°$. Det er interessant å notere seg at denne vinkelen bare avhenger av den statiske friksjonskoeffisienten, og ikke av karusellens vinkelhastighet.