Krefter, Newtons lover, dreiemoment

Tor Nordam

13. september 2007

Krefter er vektorer

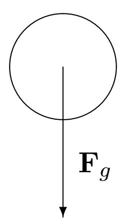
En ting som beveger seg har en hastighet. Hastighet er en vektor, som vi vanligvis skriver $\mathbf{v}$. Hastighetsvektoren har to egenskaper, en størrelse og en retning.

For eksempel, hvis vi kaster en ball rett oppover, med en fart på ti meter i sekundet, da sier vi at hastighetsvektoren er 10 m/s med retning oppover.

Vi vil imidlertid se at hastighetsvektoren til en ball vi kaster ikke er konstant. Vi vet jo at ballen kommer ned igjen, og for at det skal skje må først farten avta, og så må farten øke, men denne gangen er retningen nedover i stedet for oppover.

Dette skyldes at ballen blir utsatt for en kraft, i dette tilfellet tyngdekraften. Tyngdekraften er et eksempel på en fjernkraft, altså en kraft som virker uten direkte berøring mellom to legemer. Et annet kjent eksempel på en fjernkraft er den elektriske kraften.

Krefter mellom legemer som er i kontakt med hverandre kaller vi naturlig nok kontaktkrefter. Eksempler på slike krefter kan være den kraften man bruker hvis man dytter en gjenstand, eller friksjonskraft. Nå er naturligvis ikke kontaktkrefter egentlig noe annet enn elektriske krefter mellom atomene i to gjenstander, men til vanlig trenger vi ikke tenke på dette når vi gjør beregninger.



Figur 1: Tyngdekraften er en vektor

Krefter er også vektorer, og har størrelse og retning. Størrelsen på en kraft måler vi i enheten Newton (N). Siden krefter er vektorer kan man legge sammen krefter på vanlig måte for vektorer. Vektorsummen av alle krefter på et legeme kalles resultantkraften.

Newtons første lov

Tyngdekraften ved jordens overflate virker alltid i retning mot jordens sentrum, og til vanlig opplever vi det som om den alltid peker i en retning, som vi kaller nedover.

Hvis det ikke hadde virket krefter på ballen etter at vi kastet den, da hadde den bare fortsatt med samme hastighet oppover i all evighet. Dette er **Newtons første lov**:

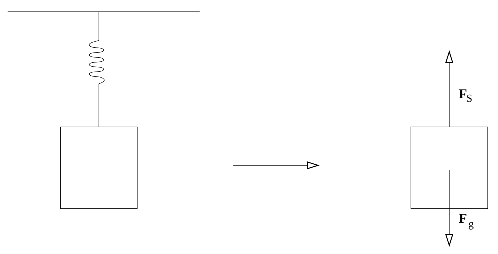
> Når summen av alle kreftene på et legeme er null, er legemet i ro, eller det beveger seg med konstant hastighet.

$$\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \text{konstant} \tag{1}$$

For å få oversikt over kreftene som virker på en gjenstand kan det lønne seg å tegne et såkalt fritt-legeme-diagram. Det går helt enkelt ut på at man tegner den gjenstanden man er interessert i, og erstatter omgivelsene med kreftene de virker på gjenstanden med.

Eksempel

> Du har et blylodd hengende i ro i en kraftmåler (fjærvekt), som viser 10 N. Tegn et fritt-legeme-diagram som viser kreftene som virker på loddet.



Figur 2: Fritt-legeme-diagram av lodd i fjærvekt

Loddet påvirkes av to krefter. Den ene er tyngdekraften $\mathbf{F}_g$, som virker nedover, og den andre er kraften fra kraftmåleren $\mathbf{F}_s$, som virker oppover. Begge disse kreftene er på 10 Newton, og summen av dem blir dermed null.

Newtons andre lov

Vi ble imidlertid enige om at ballen vår forandret fart. Dermed kan ikke summen av kreftene være null, og det virker helt rimelig. Hvis vi ser bort fra luftmotstanden er det kun tyngdekraften som virker på ballen, og den virker nedover. Denne kraften gir altså opphav til en endring i ballens fart. Denne endringen kaller vi akselerasjon.

Vi vet at når ballen er på vei oppover blir den bremset av tyngdekraften. Det virker derfor rimelig å anta at akselerasjonen har retning nedover. Det finnes en sammenheng mellom kraften og akselerasjonen, og den kalles **Newtons andre lov**:

> Når en gjenstand blir påvirket av krefter, får gjenstanden en akselerasjon som har samme retning som resultanten av kreftene. Resultantkraften er lik massen multiplisert med akselerasjonen.

$$\mathbf{F}_{res} = m \cdot \mathbf{a} \tag{2}$$

Friksjon

Hvis man for eksempel sklir en kloss langs et bord virker det en friksjonskraft fra bordet på klossen. Vi vet også at ting som beveger seg i luft eller vann blir utsatt for friksjon, men det er litt mer komplisert å regne på enn friksjon mellom faste overflater, så det skal vi ikke se på her. Friksjon er i alle tilfeller motstand mot bevegelse, og friksjonskraften virker alltid i motsatt retning av bevegelsen.

Du har sikkert lagt merke til at det krever mer kraft å få en ting til å begynne å skli, enn det som kreves for å holde farten når den har kommet i bevegelse. Dette skyldes forskjellen mellom det vi kaller statisk og dynamisk friksjon.

Når man skal regne på friksjon er det ofte hensiktsmessig å innføre en fysisk størrelse vi kaller friksjonskoeffisienten, μ. Den definerer vi på følgende måte:

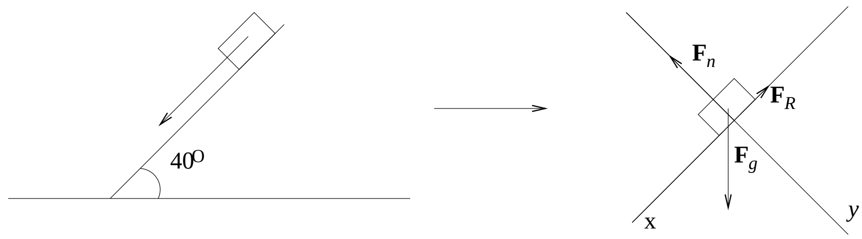
$$\mu = \frac{F_R}{F_n} \tag{3}$$

der F_n er normalkraften fra underlaget, og F_R er friksjonskraften. Friksjonskoeffisienten er en eksperimentelt bestemt størrelse som avhenger av både materialer og struktur i overflatene som sklir mot hverandre.

Vi ser altså at friksjonskraften avhenger av kraften som virker på et legeme fra underlaget. Det er dette som er prinsippet bak for eksempel en skrutvinge. Den holder ting på plass ved å øke normalkraften, og dermed friksjonskraften.

Eksempel

> En kloss sklir nedover et skråplan, med en akselerasjon på 1 m/s^2. Vinkelen mellom skråplanet og horisontalen er 40°, og klossen har en masse på 1 kg. Tegn et fritt-legeme-diagram som viser kreftene på klossen, og regn ut hvor stor friksjonskraften F_R er.



Figur 3: Krefter på kloss på skråplan

I denne oppgaven er det enklest å legge koordinatsystemet vårt slik at x-aksen ligger langs skråplanet. Vi velger positiv x-retning nedover langs planet. Klossen har en masse på 1 kg, som betyr at den blir trukket nedover av gravitasjonsfeltet til jorden med en kraft på 9,81 N. Vi dekomponerer så tyngdekraften på klossen i x- og y-komponenter:

$$F_{gx} = F_g \sin 40° \approx 6.31 \text{ N} \quad (4)$$

$$F_{gy} = F_g \cos 40° \approx 7.51 \text{ N} \quad (5)$$

Her har vi ingen akselerasjon i retningen normalt på skråplanet. Altså kan det ikke virke noen krefter på klossen i denne retningen. Normalkraften fra planet på klossen må derfor være like stor som, og motsatt rettet av, y-komponenten til tyngdekraften. Parallelt med planet har vi derimot akselerasjon nedover. Fra Newtons andre lov vet vi at $\mathbf{F}_{res} = m \cdot \mathbf{a}$. Vi har:

$$\begin{aligned} F_{res} &= F_{gx} - F_R \\ \Rightarrow F_R &= F_{gx} - ma \\ \Rightarrow F_R &\approx 5.31 \text{ N} \end{aligned} \quad (6)$$

Newtons tredje lov

Til vanlig tenker vi at jorden trekker til seg ballen, og at jorden er opphavet til tyngdekraften. Det er helt riktig og naturlig å tenke slik, fordi jorden er mye større enn ballen, og vi regner vanligvis som om jorden står helt i ro, og legger som regel origo i systemet vårt til et fast punkt på jorden. Egentlig har ballen også et gravitasjonsfelt, og ballen er også opphav til en tyngdekraft som virker på jorden, men dette flytter naturligvis ikke på jorden i noen målbar grad. Hvis vi derimot ser på et binært stjernesystem, altså to stjerner som kretser rundt hverandre, er det ikke like åpenbart hva som kan sies å «være i ro».

Med Newtons gravitasjonslov kan vi regne ut kraften mellom to legemer som påvirker hverandre med et gravitasjonsfelt:

$$\mathbf{F_g} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \hat{r} \tag{7}$$

der G er gravitasjonskonstanten, r er avstanden mellom de to legemene og $\hat{r}$ er enhetsvektoren som peker langs linjen mellom de to gjenstandene. Vi ser at kraften på jorden er like stor som kraften som virker på ballen, men den peker i motsatt retning. Dette er oppsummert i **Newtons tredje lov**:

> Når en gjenstand A blir påvirket av en kraft fra en gjenstand B, blir B påvirket av en like stor, men motsatt rettet kraft fra A.

$$\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_A \tag{8}$$

Eksempel

> To melkekartonger svever i verdensrommet, 1 meter fra hverandre, og så langt borte fra alt annet at de ikke blir påvirket av noe annet enn gravitasjonsfeltet fra hverandre. Hvor stor akselerasjon får de?

Vi antar at hver kartong har en masse på 1 kg, og avstanden er 1 meter. Da finner vi kraften mellom dem med gravitasjonsloven:

$$\begin{aligned} |\mathbf{F_g}| &= G\frac{m_1 m_2}{r^2} \\ \Rightarrow |\mathbf{F_g}| &\approx 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \end{aligned} \tag{9}$$

Denne kraften gir opphav til en akselerasjon av hver kartong. Den finner vi fra Newtons andre lov:

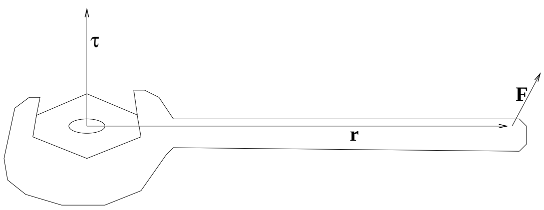
$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m \cdot \mathbf{a} \\ \Rightarrow \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{F}}{m} \\ |\mathbf{a}| &\approx 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{ms}^{-2} \end{aligned} \tag{10}$$

Newtons tredje lov gjelder for alle krefter. Hvis vi for eksempel har et lodd som står på et bord, vil loddet trykke nedover mot bordet med en kraft $\mathbf{F}$, samtidig som bordet trykker loddet oppover med en kraft $-\mathbf{F}$, som altså er like stor, og motsatt rettet. Slike par av krefter kaller vi gjerne kraft og motkraft. Det er viktig å huske at kraft og motkraft alltid er av samme type, og at de alltid virker på forskjellige legemer.

Dreiemoment

Så langt har vi kun sett på krefter som gir opphav til rettlinjet bevegelse. Krefter kan imidlertid gjøre andre ting også. For eksempel bruker man krefter hvis man strammer en mutter med en skiftenøkkel. Vi får mutteren til å dreie rundt ved å utsette den for en fysisk størrelse vi kaller dreiemoment eller kraftmoment. Vi definerer dreiemomentet om et punkt P på følgende måte:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{11}$$

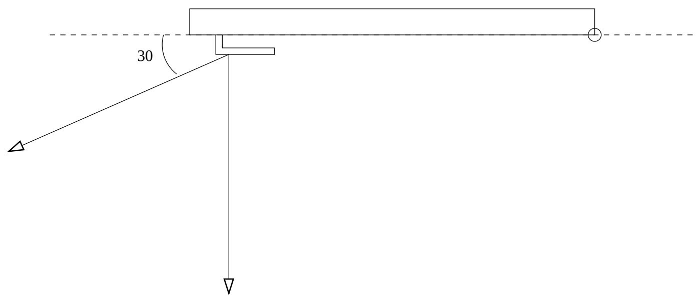


Figur 4: Dreiemoment på mutter

$\mathbf{r}$ er her vektoren fra P til punktet der kraften virker. Denne avstanden kalles gjerne «arm». Dreiemomentet er altså en vektorstørrelse, og vi kan finne retningen ved hjelp av høyrehåndsregelen. Punktet P plasserer vi der vi måtte ønske. Ofte blir resultatet av kraften $\mathbf{F}$ at legemet begynner å rotere rundt en bestemt rotasjonsakse. Da er det som regel hensiktsmessig å legge punktet P på denne aksen.

Eksempel

Du ønsker å åpne en dør. Det er 90 cm fra hengslene til dørhåndtaket, og du trekker i håndtaket med en kraft på 50 N. Regn ut absoluttverdien til dreiemomentet om rotasjonsaksen til døra (hengslene) hvis du trekker med en kraft som står vinkelrett på dørbladet, og hvis kraften danner en vinkel på 30° med dørbladet.



Figur 5: Krefter på en dør

Vi ser fra (11) at absoluttverdien av dreiemomentet er gitt ved

$$|\tau| = rF\sin\varphi \tag{12}$$

der φ er vinkelen mellom $\mathbf{r}$ og $\mathbf{F}$. Vi setter inn tall, og finner at når kraften står vinkelrett på døren er dreiemomentet

$$\begin{aligned} |\tau| &= 0.9 \cdot 50 \cdot \sin 90^\circ \text{ Nm} \\ &= 45 \text{ Nm} \end{aligned} \tag{13}$$

og når kraften står 30° på døren er dreiemomentet

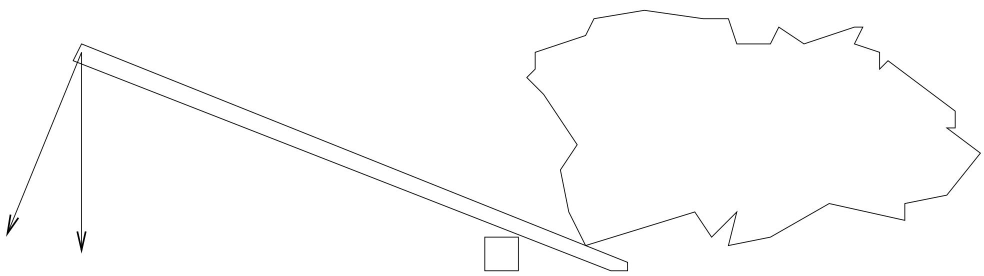
$$\begin{aligned} |\tau| &= 0.9 \cdot 50 \cdot \sin 30^\circ \text{ Nm} \\ &= 22.5 \text{ Nm} \end{aligned} \tag{14}$$

Dette viser at det er mest effektivt å anvende en kraft som står vinkelrett på døren man ønsker å åpne. Ikke akkurat uventet.

I likhet med Newtons første lov kan vi si at hvis det totale dreiemomentet på en gjenstand er null, da vil gjenstanden forbli i ro, eller fortsette å rotere med konstant hastighet. Dette kan vi bruke til å regne ut problemer der en vektstang er involvert.

Eksempel

Du ønsker å løfte en tung steinblokk ved hjelp av et spett. Du har et fast punkt P du kan bruke til understøtting av spettet. Det er 10 cm fra P til steinblokken, og 120 cm fra P til der du holder, og spettet danner en vinkel på 35° med horisontalen. Hvis vi antar at du kan dytte med en kraft på 500 N, hvor stor kraft kan du da yte på steinblokken hvis du dytter rett nedover på spettet? Enn hvis du dytter vinkelrett på spettet?



Figur 6: Spett og stein

Vi vet at dreiemomentet om P er gitt som $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ der $\mathbf{r}_1$ er vektoren fra P til der du trykker på spettet, og $\mathbf{F}_1$ er kraften du trykker med. For at spettet skal holde seg i ro må steinen være opphav til et like stort og motsatt rettet dreiemoment om punktet P.

Momentet fra steinen er gitt som $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$, der $\mathbf{r}_2$ er vektoren fra P til der spettet berører steinen, og $\mathbf{F}_2$ er kraften fra steinen på spettet. Altså har vi at

$$|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1| = |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2|. \tag{15}$$

Vi setter inn absoluttverdier av vektorene, da får vi

$$\begin{aligned} r_1 F_1 \sin\theta_1 &= r_2 F_2 \\ \Rightarrow F_1 \frac{r_1}{r_2} \sin\theta_1 &= F_2 \end{aligned} \tag{16}$$

hvor vi har satt θ_2 til $90°$. Ved å sette inn tallene i oppgaven får vi:

$$F_2 = \begin{cases} 6000 \text{ N} & \text{for} \quad \theta_1 = 90° \\ 3441 \text{ N} & \text{for} \quad \theta_1 = 35° \end{cases} \tag{17}$$