Elektrisk og Magnetisk felt

Kjetil Liestøl Nielsen

1 Emner for i dag

- **Coulombs lov**
- **Elektrisk felt**
- **Ladet partikkel i elektrisk felt**
- **Magnetisk felt**
- **Magnetisk kraft på elektrisk eladninger**

Elektromagnetiske krefter er en av de fundamentale kreftene i naturen. Elektromagnetiske krefter er en fellesbetegnelse for elektriske og magnetiske krefter. Vi skal først ta for oss elektriske krefter før vi går videre med magnetiske krefter.

Ladning: Elektrisk ladning, q, opptrer alltid i et helt antall av elementærladningen, e.

$$q = ne \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, osv...$$

Ladning har enhet Coluomb (C). Elementærladningen har verdi $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C.

Ladde objekter vil påvirke hverandre med krefter. Disse kreftene er beskrevet med Coulombs lov.

2 Coulombs lov

Kreftene mellom to elektriske punktladninger er proporsjonale med ladningene og omvendt proporsjonale med kvadratet av avstanden mellom dem.

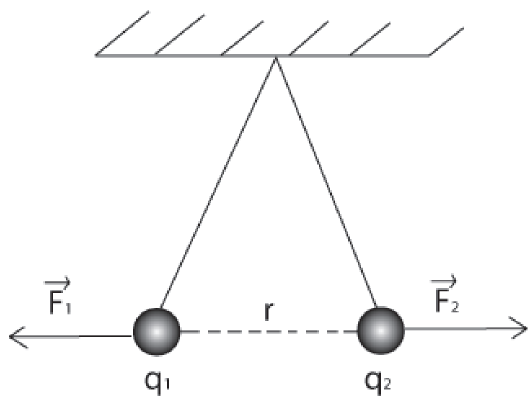
$$\vec{F}_{12} = k(\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2})\hat{r}$$

der $k = 8.99 \cdot 10^9 {}^{Nm^2}\!/_{C^2}$

Merk at kreftene som ladningene utfører på hverandre er like i amplitude, dvs at selv om ladningene er forskjellige, så vil de utføre like stor kraft på hverandre. Vi ser også at dersom ladningene har forskjellige fortegn, så vil de tiltrekke hverandre, mens ladninger med like fortegn vil frastøte hverandre.

2.1 Eksempel: To ladninger i snor

To kuler henger i hver sin snor. Kreftene de virker på hverandre med er $\left|\vec{F_1}\right| = \left|\vec{F_2}\right| = 58mN$. Kulene har ladning $q_1 = 1.5 \cdot 10^{-7}$ C og $q_2 = 8.7 \cdot 10^{-8}$ C. Hvor stor er avstanden mellom dem?



Figur 1: To ladete kuler i snor

Vi bruker Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = k(\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2})\hat{r}$. Vi snur på formelen og får et uttrykk for avstanden, $r = \sqrt{k\frac{q_1 q_2}{|F|}} = \sqrt{\frac{8{,}99 \cdot 10^9 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 8{,}7 \cdot 10^{-8}}{5{,}8 \cdot 10^{-2}}} = 4,5 \cdot 10^{-2}$ m.

Men hva med massen til partiklene? Vi antar at de henger i ro og at vi kan neglisjere massen til snora. Vi antar også at begge partiklene har lik masse. Det virker tre krefter på partiklene; den elektriske kraften, tyngdekraften og snordraget T. Anta at snora har lengde $l = 0.5$ m. Partiklene står stille, så summen av kreftene må være null. Vi har da at $T_x = F_E$ og $T_y = mg$. Snora danner en vinkel, θ, med horisontalen.

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\frac{r}{2}}{l}$$

$$\theta = \cos^{-1}(\frac{r}{2l})$$

$$\tan\theta = \frac{T_y}{T_x} = \frac{mg}{F_E}$$

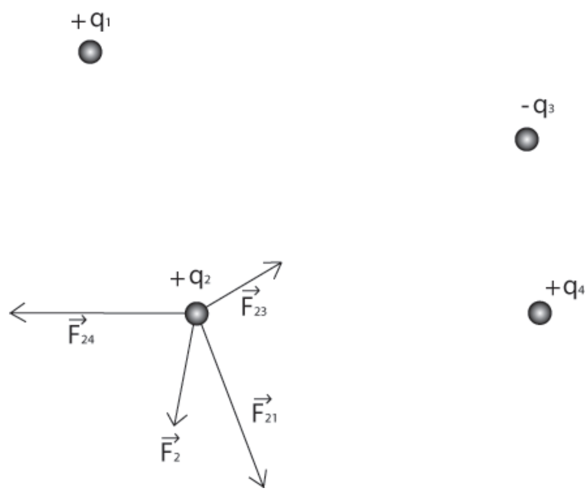
$$\Rightarrow m = \frac{F_E \tan\theta}{g} = \frac{F_E \tan(\cos^{-1}(\frac{r}{2l}))}{g} = 0,131kg$$

2.2 Superposisjonsprinsippet

Coulombs lov følger superposisjonsprinsippet, dvs at dersom det er flere ladninger, så vil den totale kraften være summen av kreftene fra alle ladningene.

2.2.1 Eksempel: Flere ladninger

Finn den totale kraften på ladning 2 (se figur 2)



Figur 2: Flere ladninger

Vi finner den totale kraften utifra superposisjonsprinsippet, $\vec{F}_{2,total} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{24}$

3 Elektrisk Felt

Det er et elektrisk felt i et område der det virker elektriske krefter på elektriske ladninger.

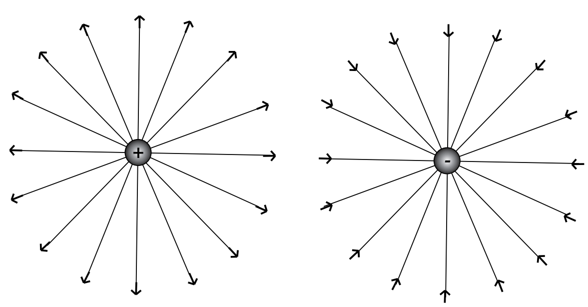
Den elektriske feltstykren $\vec{E}$ i et punkt er

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

der $\vec{F}$ er kraften på et legeme med ladning q som er plassert i punktet. $\vec{E}$ har samme retning som kraften på en positiv ladning.

3.1 Elektriske feltlinjer

Elektriske feltlinjer er en måte å gi en visuell framstilling av $\vec{E}$ i et område. $\vec{E}$ ligger alltid tangentielt til feltlinjene overalt og styrken på $\vec{E}$ er proporsjonal med tettheten av feltlinjer. Feltlinjene går radielt ut fra positive punktladninger og radielt inn mot negative punktladninger. Det er like mange feltlinjer ut fra $+q$ som inn mot $-q$. Figur 3 viser elektriske feltlinjer for en positiv og en negativ punktladning (hver for seg).



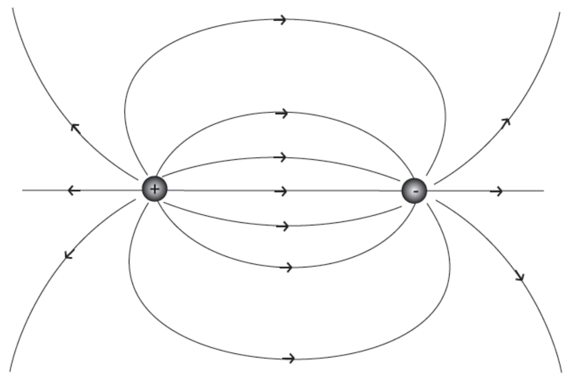
Figur 3: Punktladninger hver for seg

3.2 Superposisjonsprinsippet for elektrisk felt

Superposisjonsprinsippet gjelder også for elektrisk felt.

$$\vec{E} = \sum \Delta\vec{E}$$

Figur 4 viser feltlinjer for en såkalt elektrisk dipol, dvs en positiv og en negativ punktladning i en viss innbyrdes avstand. Feltet i et bestem punkt finnes ved å summere bidragene fra de to ladningene: $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$.



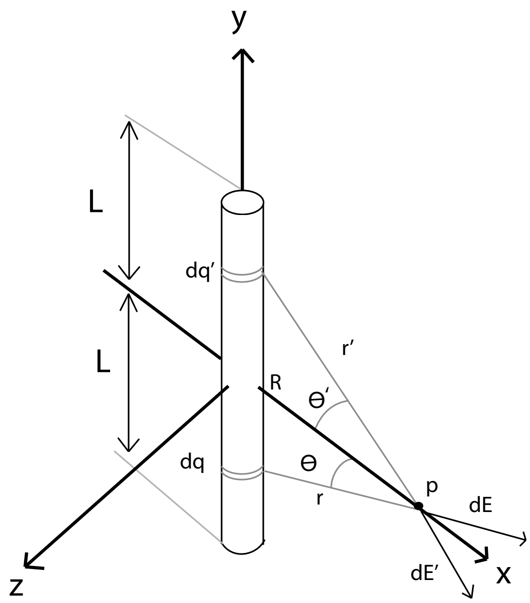
Figur 4: Elektrisk dipol

For kontinuerlig ladning må vi integrere over ladningen

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int k\frac{dq}{r^2} \cdot \hat{r}$$

3.2.1 Utfordrende eksempel: Uniformt ladet stav

Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ i punktet P, dvs i en avstand R fra staven, på linjen som halverer staven (her: x-aksen). for $L \gg R$ og $R \gg L$. Staven har ladningsfordeling $dq = \lambda dy$, er λ er en konstant.



Figur 5: Uniformt ladet stav

Her gjelder det å holde tunga rett i munnen og bruke symmetri for alt det er verdt. Det første som er verdt å legge merke til, er at $\vec{E}$ er begrensa til xy-planet. Èn ting mindre å tenke på. Vi får da at

$$\hat{r} = \cos\theta \cdot \hat{x} - \sin\theta \cdot \hat{y}$$

Vi bruker superposisjonsprinsippet for kontinuerlig ladning og får

$$\vec{E} = k\lambda \int_{-L}^{L} \frac{dy}{r^2}(\cos\theta \cdot \hat{x} - \sin\theta \cdot \hat{y})$$

der vi har brukt at $dq = \lambda dy$.

Dette integralet kan vi gjøre om til et mye enklere integral ved å integrere over θ istedenfor y. Vi må dermed gjøre et variabelskifte. Vi observerer at

$$\tan\theta = \frac{y}{R} \quad og \quad \cos\theta = \frac{R}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{\cos^2\theta} d\theta = dy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{R}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{1}{r^2}\frac{R}{\left(R/r\right)^2} d\theta = \frac{1}{R} d\theta$$

Vi kan nå sette inn i integralet igjen, og vi får

$$\vec{E} = \frac{k\lambda}{R} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (\cos\theta \cdot \hat{x} - \sin\theta \cdot \hat{y}) \cdot d\theta$$

Vi bruker igjen symmetri og observerer at y-komponenten av det elektriske feltet vil nulle seg ut (punktet ligger på linjen som går gjennom midten av staven). Vi kan nå sette $E_y = 0$ og integralet forenkler seg til

$$E_x = \frac{k\lambda}{R} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos\theta \cdot d\theta = \frac{2k\lambda}{R} \sin\theta_0$$

For $L \gg R$ har vi at $\sin\theta_0 \simeq 1$ og vi får

$$E_x = \frac{2k\lambda}{R}$$

For $R \gg L$ har at $\sin\theta_0 \simeq \frac{L}{R}$ og vi får

$$E_x = \frac{2k\lambda L}{R^2} = \frac{kQ}{R^2}$$

4 Ladet partikkel i elektrisk felt

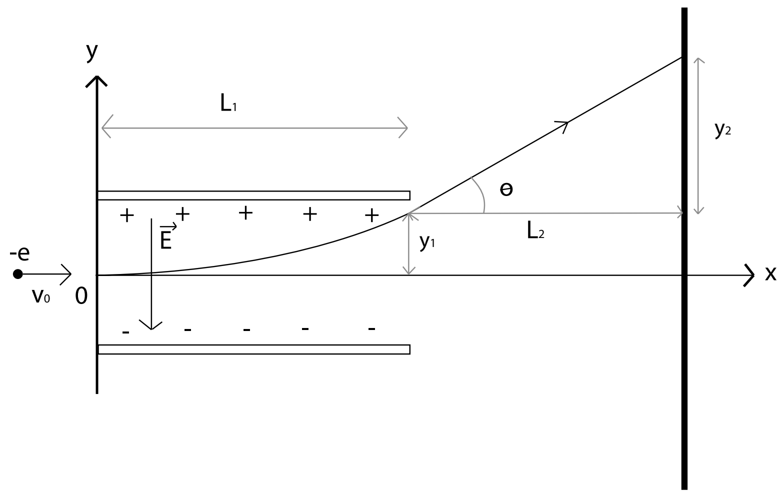
Newtons andre lov for ladet partikkel i felt:

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E}$$

Der $\vec{E}$ er det elektriske feltet der ladningen befinner seg.

4.1 Eksempel

Et elektron med ladning, $-e$, blir skutt inn mellom to ladete plater. Platene lager et elektrisk felt i negativ y-retning som påvirker elektronet. Platene har lengde $L_1 = 3$ cm. Partikkelen forlater så det elektriske feltet og fortsetter i vakuum til den treffer en skjerm. Lengden mellom platene og skjermen er $L_2 = 12$ cm. Startfarten til elektronet er $v_0 = 3 \cdot 10^6$ m/s. Det elektriske feltet har en styrke på $E = 10^3$ N/C. I hvilken høyde treffer elektronet skjermen? Vi ser bort ifra tyngdekraft.



Figur 6: Ladet partikkel i elektrisk felt

Vi setter først opp et uttrykk for akselerasjonen. Det elektriske feltet, $\vec{E} = -E\hat{y}$ virker kun i y-retning, så det er ingen akselerasjon i x-retning.

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} = \frac{-qE}{m}\hat{y} = \frac{eE}{m}\hat{y}$$

Farten til elektronet blir da

$$\Rightarrow \vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} = v_0\hat{x} + at\hat{y} = v_0\hat{x} + \frac{eEt}{m}\hat{y}$$

Vi finner så tiden elektronet bruker på å komme ut av det elektriske feltet. Det gjør vi ved å sette opp uttrykket for x-posisjonen til elektronet.

$$x = v_0T = L_1$$

$$\Rightarrow T = \frac{L_1}{v_0}$$

Dette kan vi sette inn i uttrykket for y-posisjonen til elektronet for å finne hvor på y-aksen elektronet er idet det forlater det elektriske feltet

$$y = \frac{1}{2}a_yt^2$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}a_yT^2 = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{L_1^2}{v_o^2}$$

Etter at elektronet har forlatt det elektriske feltet, virker det ikke lenger noen krefter på det. Vi har da konstante hastigheter. Vi har da at $v_x = v_o$ og $v_y =$

$\frac{eET}{m} = \frac{eE}{m}\frac{L_1}{v_o}$. Dette kan vi bruke til å finne vinkelen θ.

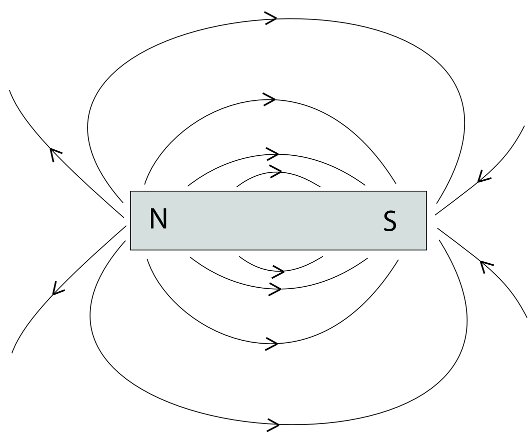
$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{eE}{m}\frac{L_1}{v_o}}{v_o} = \frac{eEL_1}{mv_o^2}$$

Vi ser da at $y_2 = L_2 \tan\theta = \frac{qEL_1L_2}{mv_o^2}$. Den totale høyden blir så

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{2}\frac{eEL_1^2}{mv_o^2} + \frac{eEL_1L_2}{mv_o^2} = \frac{eEL_1}{mv_o^2}(\frac{1}{2}L_1 + L_2) = 8 \cdot 10^{-2}m$$

5 Magnetisk felt

Slik som objekter med masse setter opp et gravitasjonsfelt og et ladet objekt setter opp et elektrisk felt, setter magneter eller elektrisk strøm opp et magnetfelt. Også slik som med elektrisk felt, blir magnetisk felt visualisert med feltlinjer. Feltlinjene går alltid fra nordpol mot sørpol. Magnetfelt har symbol B og enhet tesla (T).



Figur 7: Stavmagnet

6 Magnetisk kraft på elektriske ladninger

Når en ladd partikkel (ladning q) kommer inn i et magnetfelt, $\vec{B}$ med hastighet, $\vec{v}$, blir partikkelen påvirket av en kraft

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

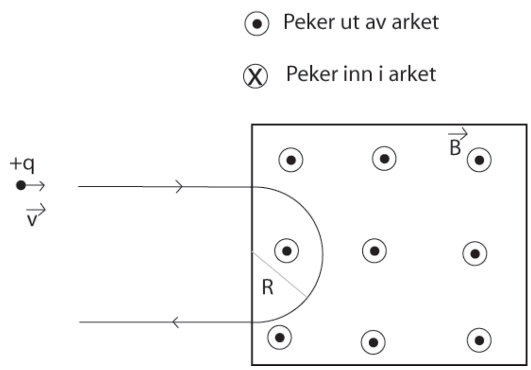
Vi kan her bruke høyrehåndsregelen fra første forelesning; dersom vi lar pekefingeren peke i fartsretningen og krummer fingrene i retning til $\vec{B}$, så vil tommelen peke i retning til $\vec{F}$ (for en positiv ladning).

Dersom vi har både elektrisk og magnetisk felt til stede, vil partikkelen bli påvirket av både en elektrisk og en magnetisk kraft. Denne totale kraften kaller vi **Lorentzkraften**.

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})]$$

6.1 Eksempel: Ladet partikkel i magnetfelt

Vi har et avgrensa område med et magnetfelt vinkelrett ut av arket. Når en ladet partikkel kommer inn i området med magnetfelt, vil den bli påvirket av en magnetisk kraft. Vi bruker høyrehåndsregelen og finner ut at kraften vil peke i negativ y-retning akkurat idet partikkelen kommer inn i magnetfeltet. Men hva skjer så? Kraften gjør at partikkelen skifter retning, altså mot negativ y-retning, men da skifter også kraften retning når partikkelen skifter retning osv. Dette fører til at partikkelen vil gå i en sirkelbane (se figur 8).



Figur 8: Ladet partikkel i magnetfelt

Vi bruker Newtons andre lov til å finne radiusen til sirkelbanen.

$$\left|\vec{F}\right| = F = ma = qvB \quad (\vec{v} \perp \vec{B})$$

$$\Rightarrow F = \frac{mv^2}{R} = qvB$$

$$\Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

6.2 Eksempel: Fartsvelger

En ladet partikkel beveger seg mellom to ladede plater. Platene lager et elektrisk felt i negativ y-retning. I tillegg har vi et magnetfelt som peker vinkelrett inn i arket. Vi vil da få en magnetisk kraft pekende i y-retning og elektrisk kraft pekende i negativ y-retning.

Vi skal prøve å finne farten som gir $F_E = F_B$

$$\Rightarrow F = F_E + F_B = 0 = q(E + v \times B) = qE - qvB$$

$$\Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

6.3 Spiralbane

Hvis farten $\vec{v}$ ikke står normalt på $\vec{B}$, kan vi tenke oss farten dekomponert med en komponent $\vec{v}_p$ parallell med $\vec{B}$ og en komponent $\vec{v}_n$ normalt på $\vec{B}$, $\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_n$. Fartskomponenten $\vec{v}_p$ blir ikke påvirket av magnetfeltet, mens $\vec{v}_n$ stadig skifter retning, samtidig som den holder sin absoluttverdi. Resultatet blir en bevegelse langs en spiralbane.