Institutt for fysikk, NTNU
FY1013 Elektrisitet og magnetisme II
Høst 2005

Løsningsforslag til øving 2

Veiledning mandag 5. og onsdag 7. september

Oppgave 1

a) Ettersom bølgefunksjonen her bare avhenger av x, har vi

$$\nabla^2\psi(x) = \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

slik at Schrödingerligningen blir

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi(x)$$

To ganger derivasjon av den oppgitte planbølgeløsningen gir

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{ikx} = (ik)^2 e^{ikx} = -k^2 e^{ikx}$$

Dermed:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi(x) = E\psi(x)$$

og vi ser at den plane bølgen oppfyller ligningen. Vi ser også at energien E er gitt ved bølgetallet k:

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

b) I punkt *a* viste vi at plane bølger er egenfunksjoner til Hamiltonoperatoren $\hat{H}$ for et fritt elektron,

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

dvs med potensiell energi $U = 0$. Tilhørende egenverdier E ble bestemt av ligningen

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

og tilsvarer energien til et slik elektron.
På tilsvarende måte kan vi vise at slike plane bølger også er egenfunksjoner for impulsoperatoren

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla$$

med andre ord, at de oppfyller ligningen

$$-i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x) = p\psi(x)$$

Tilhørende egenverdi p tilsvarer da impulsen til elektronet.
Innsetting gir:

$$-i\hbar\frac{d}{dx}e^{ikx} = -i\hbar(ik)e^{ikx} = \hbar k e^{ikx}$$

Konklusjon: Planbølgeløsningen er også egenfunksjon til impulsoperatoren, med egenverdi $p = \hbar k$.
Dermed kan vi skrive

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

som vi gjenkjenner fra klassisk mekanikk.

c) Som i punkt a deriverer vi den oppgitte løsningen to ganger:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(A\sin kx + B\cos kx\right) = -k^2\left(A\sin kx + B\cos kx\right)$$

slik at

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi(x) = E\psi(x)$$

dvs

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

som for fri partikkel. Men nå kan vi ikke ha hvilke som helst verdier for k og E. Vi bruker først grensebetingelsen $\psi(0) = 0$ og får

$$A\sin 0 + B\cos 0 = 0$$

dvs

$$B = 0$$

Mulige løsninger er med andre ord rene sinus-funksjoner:

$$\psi(x) = A\sin kx$$

Grensebetingelsen $\psi(L) = 0$ gir oss de mulige k-verdiene:

$$A\sin kL = 0$$

dvs

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

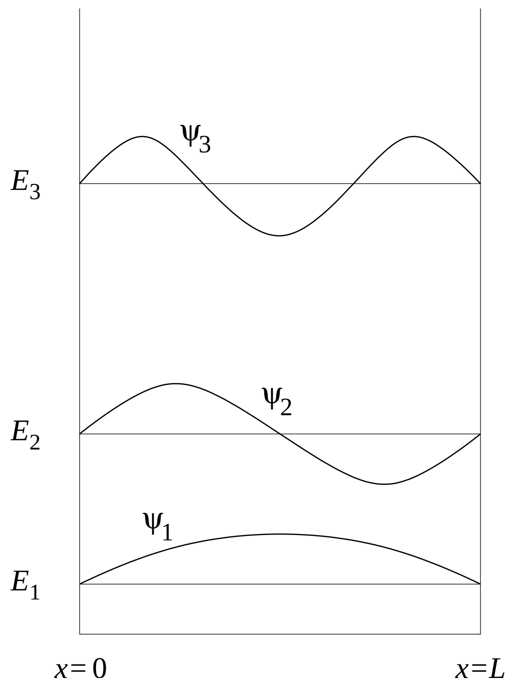
der $n = 1, 2, 3, \ldots$. Merk at vi ikke kan ha $A = 0$ eller $n = 0$, for da forsvinner hele bølgefunksjonen overalt. De tillatte energiverdiene er:

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$$

Med $L = 5$ Å $= 5 \cdot 10^{-10}$ m har vi, dersom partikkelen er et elektron,

$$E_n \simeq 2.4 \cdot 10^{-19}\, n^2 \,\mathrm{J} = 1.5\, n^2 \,\mathrm{eV}$$

Skisse av de tre tilstandene med lavest energi, med tilhørende energinivåer:



I forelesningene nevnte vi Coulombpotensialet, der energinivåene også var bestemt ved en heltallig indeks n. I det tilfellet var E_n proporsjonal med $-1/n^2$, for partikkel i boks har vi $E_n \sim n^2$. Et tredje eksempel er den såkalte "harmoniske oscillator", $U(x) \sim x^2$. Da blir energinivåene ekvidistante, dvs $E_n \sim n$.

Oppgave 2

a) Dersom konduktiviteten er proporsjonal med tettheten av mobile ladninger, må vi øke ladningstettheten med en faktor 10^7 for å oppnå en tilsvarende økning i konduktiviteten. Det betyr at ladningstettheten må økes fra $1.45 \cdot 10^{10}$ pr cm^3 til $1.45 \cdot 10^{17}$ pr cm^3, som dermed blir antall fosforatomer som må tilføres. [Egentlig differansen mellom disse to tallene, men $1.45 \cdot 10^{10}$ er jo tilnærmet lik null i forhold til $1.45 \cdot 10^{17}$.]

b) I silisium har vi $5 \cdot 10^{22}$ atomer pr cm^3. Brøkdelen atomer som erstattes av fosfor er dermed

$$\frac{n_{\mathrm{P}}}{n_{\mathrm{Si}}} = \frac{1.45 \cdot 10^{17}}{5 \cdot 10^{22}} = 2.9 \cdot 10^{-6}$$

Altså tilstrekkelig å bytte ut ett av ca 350000 Si-atomer med fosfor for å øke konduktiviteten med en faktor 10^7!