Institutt for fysikk, NTNU
FY1013 Elektrisitet og magnetisme II
Høst 2005

Løsningsforslag til øving 4

Veiledning mandag 19. og onsdag 21. september

Likeretter

a) Strømmen som "leveres" av spenningskilden må gå gjennom dioden. Denne strømmen $I_d(t)$ vil fordele seg på en komponent $I_C(t)$ inn på kondensatoren og en komponent $I_R(t)$ gjennom motstanden:

$$I_d(t) = I_C(t) + I_R(t)$$

Så lenge spenningsforholdene i kretsen er slik at det går en *positiv* strøm I_d gjennom dioden, kan vi erstatte dioden med en motstandsfri leder (dvs kortslutte dioden) og sette $V_d = 0$. Da har vi

$$V_{\mathrm{ut}} = V_{\mathrm{inn}} = V_R = V_C$$

Generelt, dvs uansett retning på strømmen, har vi, med bruk av Kirchhoffs spenningsregel

$$V_{\mathrm{ut}} = V_{\mathrm{inn}} - V_d = V_R = V_C$$

I første omgang ser vi altså på tilfellet at $I_d > 0$ og $V_d = 0$.
Vi bestemmer de to bidragene til den totale strømmen I_d:

$$I_R(t) = \frac{V_R}{R} = \frac{V_{\mathrm{inn}}}{R} = \frac{V_0}{R}\sin\omega t$$

$$I_C(t) = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_C}{dt} = C\frac{dV_{\mathrm{inn}}}{dt} = CV_0\omega\cos\omega t = \frac{\omega}{\omega_0}\frac{V_0}{R}\cos\omega t$$

der vi har innført $\omega_0 = 1/RC$. Total strøm blir dermed

$$I_d(t) = \frac{V_0}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\cos\omega t + \sin\omega t\right) \tag{1}$$

Like etter $t = 0$ dominerer det første leddet, dvs strømmen inn på kondensatoren. Med oppgitte tallverdier har vi $\omega = 2\pi f = 100\pi \simeq 314\ \mathrm{s}^{-1}$, mens $\omega_0 = 1/(100 \cdot 0.001) = 10\ \mathrm{s}^{-1}$. Altså er faktoren $\omega/\omega_0 = 10\pi \simeq 31.4$, så strømmen inn på kondensatoren er ganske stor like etter vi har skrudd på spenningskilden, mer enn 30 ganger større enn strømmen gjennom motstanden ved noe tidspunkt kan bli. Dette er simpelthen et resultat av at kondensatorens kapasitans C er forholdsvis stor. Den har dermed mulighet til å lagre mye ladning. Rett etter vi har skrudd på spenningskilden, vil mesteparten av strømmen gå inn på kondensatoren, framfor å gå den "tunge veien" gjennom motstanden. Etter hvert som kondensatoren lades opp, blir det tyngre og tyngre å tilføre ekstra ladning. Dermed blir I_C mindre og mindre, mens I_R rett og slett øker proporsjonalt med verdien på V_{inn}.

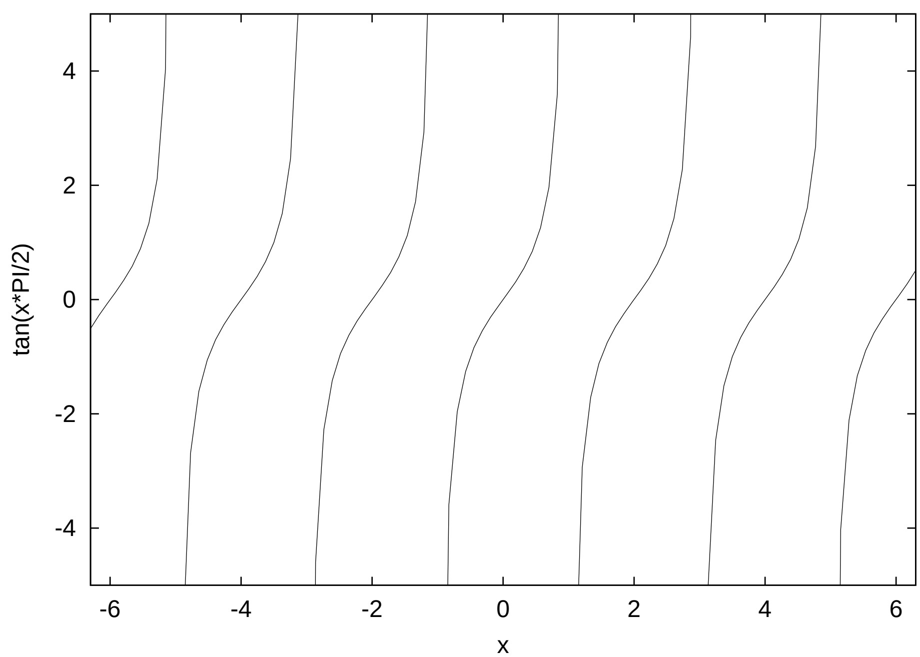
Når blir så $I_d = 0$ for første gang? Vel, vi har jo den eksplisitte tidsavhengigheten til I_d ovenfor, så kriteriet må åpenbart bli

$$\frac{\omega}{\omega_0}\cos\omega t_0 + \sin\omega t_0 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \tan\omega t_0 = -\frac{\omega}{\omega_0}$$

som vi var bedt om å vise. Tar vi invers tangens på begge sider av denne ligningen, får vi

$$\omega t_0 = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Ukritisk kalkulatorbruk gir nå $\omega t_0 = -1.539$ og $t_0 = -4.9 \cdot 10^{-3}$ s $= -4.9$ ms. Men vi skulle finne første gang I_d blir null *etter* $t = 0$. Da må vi huske på at tangensfunksjonen gjentar seg med periode π:



Dvs: $\tan(x - \pi) = \tan x$, slik at den søkte løsningen for t_0 er gitt ved

$$\omega t_0 = \pi - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

dvs

$$t_0 = \frac{\pi}{100\pi} - \frac{1}{100\pi}\arctan(10\pi) = (0.01 - 0.0049)\text{ s} = 5.1\text{ ms}$$

Dette er like etter at det har gått en kvart periode $\pi/2\omega = 5.0$ ms. Da har ladningen Q nådd sin maksimale verdi, og I_C skifter retning. På grunn av faktoren $\omega/\omega_0 \gg 1$ vil I_C raskt bli like stor som I_R (men med motsatt fortegn). Da har I_d falt til null, hvoretter V_d blir negativ, og vi kan erstatte dioden med en *åpen* krets og sette $I_d = 0$.
Kommentar: For store argumenter x er $\arctan x \simeq \pi/2$, så en ser umiddelbart at ωt_0 blir omtrent lik $\pi/2$. Taylorutvikling av $\arctan x$ gir $\arctan x = \pi/2 - 1/x + O(1/x^3)$. (Dvs: Neste ledd i rekkeutviklingen er "av orden" $1/x^3$.) Tar vi med det første korreksjonsleddet $-1/x$, har vi

$$\frac{1}{100\pi}\arctan(10\pi) \simeq \frac{1}{100\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{10\pi}\right) \simeq \frac{1}{200} - \frac{1}{10000} = \frac{50-1}{10000} = 0.0049$$

der vi har satt $\pi^2 \simeq 10$. Dvs samme svar, helt uten bruk av kalkulator...
Som sagt blir spenningen V_R over motstanden den samme som V_{inn} i dette tidsrommet:

$$V_R(t) = V_0 \sin \omega t$$

b) Etter tidspunktet $t_0 \simeq \pi/2\omega$ kan vi altså erstatte dioden med en åpen krets. Da har vi simpelthen en enkelt sløyfe med R og C, som med bruk av Kirchhoffs regler gir

$$\frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_C}{dt} = I_C = -I_R = -\frac{V_R}{R} = -\frac{V_C}{R}$$

Vi har altså en differensialligning for V_C,

$$\frac{dV_C}{dt} = -\omega_0 V_C$$

med generell løsning

$$V_C(t) = V_C(t_0)\exp\left(-\omega_0(t - t_0)\right) \qquad (t \geq t_0)$$

dvs

$$V_C(\tau) = V_C(t_0)\exp(-\omega_0\tau) \simeq V_0\exp(-\omega_0\tau) \qquad (\tau \geq 0)$$

der vi har brukt at ved $t = t_0$, dvs ved $\tau = 0$ har vi $V_C \simeq V_0$.

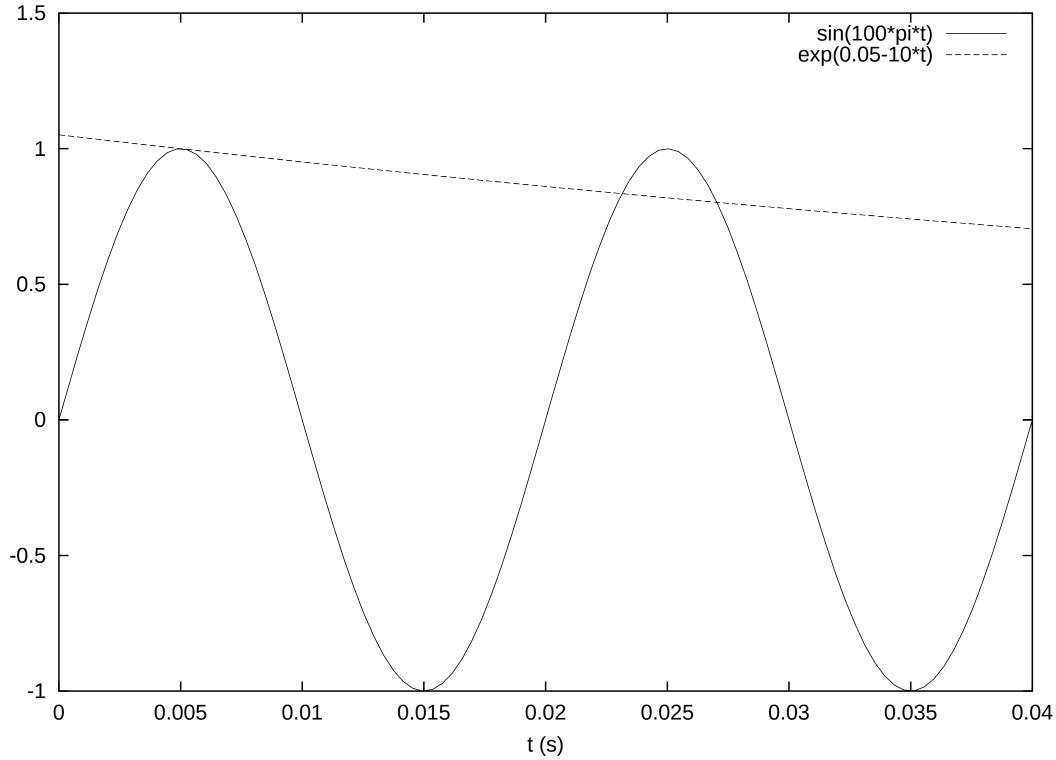
c) Spenningen over motstand (og kondensator) vil altså falle eksponentielt, men langsomt, fra sin maksimale verdi V_0 ved $t = t_0$. Etter hvert vil V_{inn} "svinge tilbake" og bli like stor som V_R ved tidspunktet t_1. For $t > t_1$ vil dioden derfor igjen være "positivt forspent", og den kan på ny betraktes som kortsluttet ($I_d > 0$, $V_d = 0$). Dermed må vi få samme oppførsel som beskrevet av ligning (1) (side 1) inntil $\omega t \simeq 5\pi/2$, hvoretter den eksponentielt avtagende funksjonen overtar igjen. Osv osv!
For å bestemme t_1 og den tilhørende spenningen V_1 må vi løse ligningen

$$V_0 \sin \omega t_1 = V_0 \exp\left(-\omega_0(t_1 - t_0)\right)$$

dvs

$$\sin 100\pi t_1 = \exp\left(0.05 - 10t_1\right)$$

En slik ligning lar seg ikke løse analytisk, dvs vi er ikke i stand til å skrive ned et eksakt uttrykk for t_1. Vi kan imidlertid plotte venstre og høyre side i samme diagram:



Det ser ut som om $t_1 \simeq 0.023$ s blir omtrent riktig. Innsetting av denne verdien gir for venstre side 0.809 og for høyre side 0.835. Disse to verdiene er tilstrekkelig like til at vi konkluderer med

$$t_1 \simeq 23 \ \text{ ms}$$

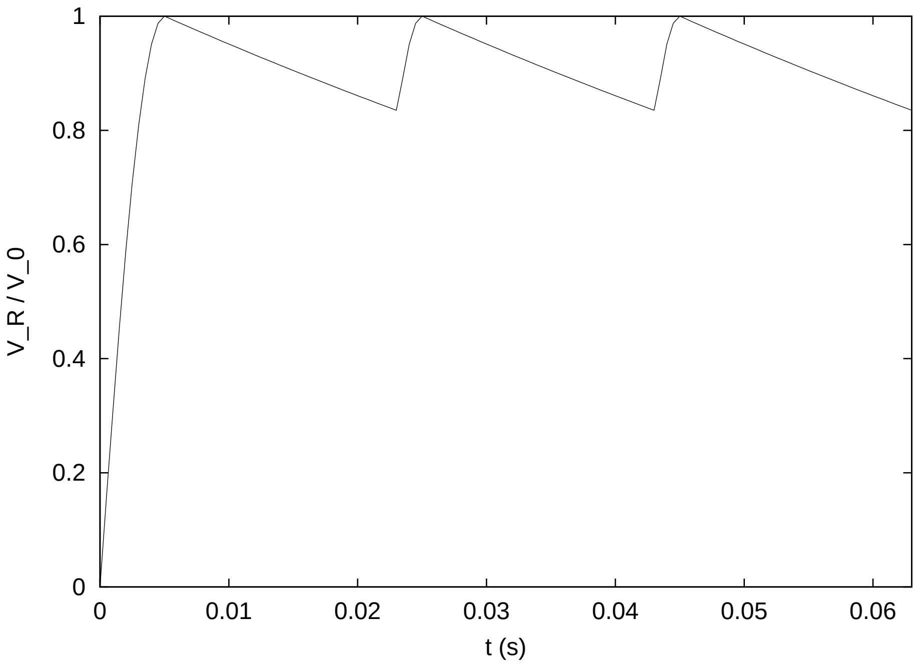
Den tilhørende spenningen er

$$V_1 = V_0 \exp\left(0.05 - 10 \cdot 0.023\right) \simeq 0.83 V_0$$

(Vi får mest nøyaktig verdi ved å sette inn for t_1 i den langsomst varierende funksjonen!) Ripplespenningen blir

$$V_{\text{ripple}} = V_0 - V_1 \simeq 0.17 V_0 = 0.85 \ \text{ V}$$

d) Som antydet i punkt *c*) fortsetter $V_R(t)$ periodisk på denne måten:


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
V_R / V_0
t (s)