Institutt for fysikk, NTNU
FY1013 Elektrisitet og magnetisme II
Høst 2005

Løsningsforslag til øving 5

Veiledning mandag 26. og onsdag 28. september

a) Med motstand R og kapasitans C i serie:

$$V_0 \cos \omega t = RI + \frac{Q}{C}$$

(Kirchhoffs spenningsregel) La oss først benytte anledningen til å reklamere for å bruke kompleks notasjon, ved å løse oppgaven *uten* kompleks notasjon!
En partikulærløsning av differensialligningen

$$R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega t$$

vil generelt være på formen

$$Q(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

eller, ekvivalent, på formen

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \beta)$$

Med den siste formen innsatt i ligningen fås

$$-\omega R Q_0 \sin(\omega t + \beta) + \frac{Q_0}{C} \cos(\omega t + \beta) = V_0 \cos \omega t$$

For å bestemme Q_0 og β bruker vi

$$\cos(\omega t + \beta) = \cos \omega t \cos \beta - \sin \omega t \sin \beta$$

og

$$\sin(\omega t + \beta) = \sin \omega t \cos \beta + \cos \omega t \sin \beta$$

Sammenligning av koeffisienter foran $\cos \omega t$ og $\sin \omega t$ gir da

$$\begin{aligned} -\omega R Q_0 \sin \beta + \frac{Q_0}{C} \cos \beta &= V_0 \\ -\omega R Q_0 \cos \beta - \frac{Q_0}{C} \sin \beta &= 0 \end{aligned}$$

Den siste av disse to fastlegger fasevinkelen β:

$$\tan \beta = -\omega RC$$

Da følger det at

$$\frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} = (\omega RC)^2$$

dvs

$$\frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta} = (\omega RC)^2$$

eller

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

Da kan vi bestemme Q_0 fra den første av de to ligningene ovenfor:

$$\begin{aligned}
& -\omega R Q_0 \sin\beta + \frac{Q_0}{C}\cos\beta = V_0 \\
\Rightarrow\quad & \frac{Q_0}{C}(1-\omega RC\tan\beta) = \frac{V_0}{\cos\beta} \\
\Rightarrow\quad & Q_0 = \frac{V_0 C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}
\end{aligned}$$

Med andre ord:

$$Q(t) = \frac{V_0 C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t - \arctan\omega RC)$$

Strømmen $I(t)$ blir den tidsderiverte av Q:

$$I(t) = -\frac{\omega V_0 C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin(\omega t - \arctan\omega RC)$$

Vi har generelt at

$$-\sin x = \cos(x+\pi/2)$$

så vi kan skrive $I(t)$ på formen

$$I(t) = |I_0|\cos(\omega t - \alpha)$$

med

$$|I_0| = \frac{\omega V_0 C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

og

$$\alpha = \arctan\omega RC - \frac{\pi}{2}$$

Litt kronglete, men overkommelig for en så enkel krets. Likefullt kan en vel se for seg at dette kan bli bortimot uhåndterbart for litt mer kompliserte kretser.
La oss bruke kompleks notasjon og overbevise oss om at vi får samme svar, bare på en enklere måte. Vi setter

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

og tilsvarende for Q og I. Kirchhoffs spenningsregel gir da

$$RQ_0 i\omega e^{i\omega t} + \frac{Q_0}{C}e^{i\omega t} = V_0 e^{i\omega t}$$

dvs

$$Q_0 = \frac{V_0 C}{1 + i\omega RC}$$

med absoluttverdi

$$|Q_0| = \frac{V_0 C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

og fasevinkel

$$\beta = -\arctan \omega RC$$

Strømmen blir

$$I(t) = \dot{Q} = i\omega Q_0 e^{i\omega t} = \frac{i\omega V_0 C}{1 + i\omega RC} e^{i\omega t}$$

dvs

$$I_0 = \frac{i\omega V_0 C}{1 + i\omega RC} = \frac{\omega V_0 C}{\omega RC - i}$$

med absoluttverdi

$$|I_0| = \frac{\omega V_0 C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

og fasevinkel (idet vi setter $I_0 = |I_0| \exp(-i\alpha)$)

$$\alpha = -\arctan \frac{1}{\omega RC}$$

Altså samme svar, men mye mindre arbeid... (Du kan jo sjekke selv at fasevinkelen virkelig ble den samme, dvs du må sjekke at $\arctan x - \pi/2 = -\arctan 1/x$.)

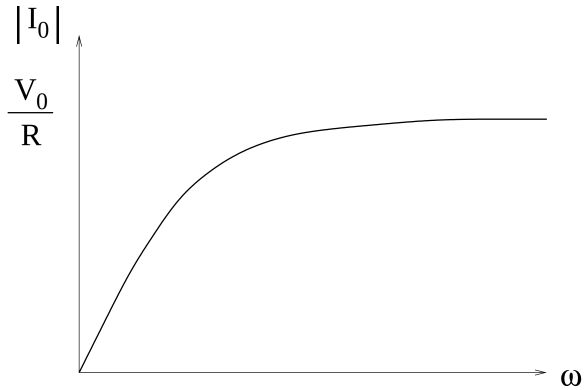
Til slutt: Er resultatet rimelig? La oss sjekke grensene "små" og "store" frekvenser:

$$\omega \to 0: \quad |I_0| \to 0 \quad \text{og} \quad \alpha \to -\arctan \infty = -\frac{\pi}{2}$$

Dette virker fornuftig: Null likestrøm gjennom en kondensator. Dermed hele spenningsfallet over kondensatoren, og (-) 90 graders faseforskjell mellom spenning og strøm (dvs: den bittelille strømmen som går der dersom ω er bittelitt forskjellig fra null), alternativt $\beta \to 0$, dvs null faseforskjell mellom påtrykt spenning og ladning på kondensatoren.

$$\omega \to \infty: \quad |I_0| \to \frac{\omega V_0 C}{\omega RC} = \frac{V_0}{R} \quad \text{og} \quad \alpha \to -\arctan 0 = 0$$

Dette virker også fornuftig: Hele den påtrykte spenningen gjenfinnes som spenningsfall over motstanden. Strømamplituden $|I_0|$ kan ikke bli større enn V_0/R. Sammenhengen mellom ladningsamplituden $|Q_0|$ og strømamplituden $|I_0|$ er $|I_0| = \omega|Q_0|$. Når ω blir stor og $|I_0|$ er begrenset til V_0/R, må det bety at $|Q_0|$ må bli liten.



b) Med motstand R og kapasitans C i parallell:

$$V_0 \cos \omega t = R I_R = \frac{Q}{C}$$

(dvs Kirchhoffs spenningsregel anvendt på begge sløyfene). Videre

$$I = I_R + I_C = I_R + \dot{Q}$$

(dvs Kirchhoffs strømregel).
Her er det faktisk omtrent like enkelt å regne med reell eller kompleks formalisme. Jeg velger den komplekse (se også øving 4):

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

Dermed:

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} e^{i\omega t}$$

og

$$Q = VC = V_0 C e^{i\omega t}$$

Altså, for total strøm:

$$I = I_R + \dot{Q} = \left(\frac{V_0}{R} + i\omega V_0 C \right) e^{i\omega t} = \frac{V_0}{R} \left(1 + i\omega RC \right) e^{i\omega t}$$

Fysisk (total) strøm på formen

$$I(t) = |I_0| \cos(\omega t - \alpha)$$

gir amplitude

$$|I_0| = \frac{V_0}{R} \sqrt{1 + (\omega RC)^2}$$

og fasevinkel

$$\alpha = -\arctan \omega RC$$

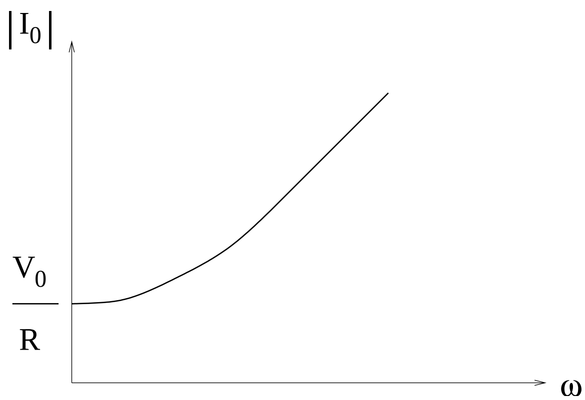
"Grensesjekk":

$$\omega \to 0 : \quad |I_0| \to \frac{V_0}{R} \quad \text{og} \quad \alpha \to -\arctan 0 = 0$$

Dette virker fornuftig: Null likestrøm gjennom kondensatoren, all strøm gjennom motstanden.

$$\omega \to \infty : \quad |I_0| \to \omega V_0 C (\to \infty) \quad \text{og} \quad \alpha \to -\arctan \infty = -\pi/2$$

Dette virker også fornuftig: Maksimal ladning på kondensatoren, $Q_0 = V_0 C$, oppnås veldig raskt, så strømmen inn på kondensatoren, $I_C = \omega V_0 C$, blir stor. Strømmen gjennom motstanden, $I_R = V_0/R$, er gitt ved Ohms lov og svinger i fase med den påtrykte spenningen, uavhengig av om ω er stor eller liten. Total strøm domineres imidlertid av I_C, så fasevinkelen blir den samme som i en VC-krets.



c) Med motstand R og induktans L i serie:

$$V - L\dot{I} = RI$$

dvs

$$L\dot{I} + RI = V_0 \cos \omega t$$

Med kompleks notasjon, $V = V_0 \exp(i\omega t)$, $I = I_0 \exp(i\omega t)$, får vi

$$Li\omega I_0 + RI_0 = V_0$$

eller

$$I_0 = \frac{V_0}{R + i\omega L}$$

med absoluttverdi

$$|I_0| = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

og fasevinkel (igjen, med I_0 på formen $|I_0| \exp(-i\alpha)$)

$$\alpha = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

"Grensesjekk":

$$\omega \to 0 : \quad |I_0| \to \frac{V_0}{R} \quad \text{og} \quad \alpha \to \arctan 0 = 0$$

Dette virker fornuftig: Med likespenning representerer spolen rett og slett en kortslutning, og kretsen består bare av spenningskilden og motstanden.

$$\omega \to \infty : \quad |I_0| \to \frac{V_0}{\omega L} \to 0 \quad \text{og} \quad \alpha \to \arctan \infty = \pi/2$$

Dette virker også fornuftig: Påtrykt spenning svinger så raskt at vi ikke får etablert noen strøm gjennom spolen. Hele den påtrykte spenningen gjenfinnes som en indusert motspenning i spolen. Dermed null spenningsfall over motstanden, og null strøm. Fasevinkelen α blir som i VL-kretsen.
Vi kan også tenke slik: Spenningsfallet over motstanden har amplitude $R|I_0|$. Spenningsfallet over induktansen har amplitude $L\omega|I_0|$. Ingen av disse kan uansett bli større enn amplituden til den påtrykte spenningen V_0. Dermed, hvis ω blir tilstrekkelig stor, nærmere bestemt hvis $\omega \gg R/L$, må $|I_0|$ bli liten.

Skisse av strømamplituden: