Forelesningsnotat, lørdagsverksted i fysikk

Kristian Etienne Einarsrud

1 Vektorer, grunnleggende matematikk og bevegelse

1.1 Introduksjon

Fysikk er en vitenskap som har som mål å beskrive verden rundt oss, fra små lengdeskalaer hvor kvantemekanikken rår til astronomiske størrelsesordener hvor generell relativitetsteori er gjeldende. Språket som vi benytter oss av for å beskrive verden er matematikk. Det er derfor viktig, i tillegg til et knippe intuisjon, å ha en del av matematikken i fingrene. Vi skal i dag gå gjennom noen sentrale matematiske emner og anvende disse på bevegelse. De konkrete emnene for i dag er:

- vektorer
- bevegelse i rommet
- integrasjon og derivasjon
- enheter

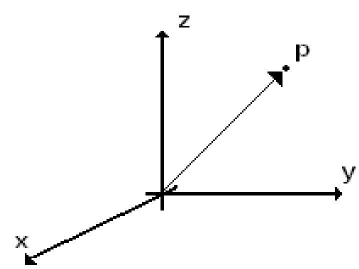
1.2 Vektorer

Grovt sett kan vi dele fysiske størrelser inn i to klasser (det finnes egentlig flere, men for enkelhets skyld skal vi bare forholde oss til to her). Den første klassen inneholder størrelser som ikke har noen retning, som for eksempel antall poteter i en sekk. Vi kaller slike størrelser for ordinære, eller retningsløse eller skalarer. Temperatur, volum og elektrisk spenning er andre eksempler på skalare størrelser.
Andre viktige størrelser i fysikken har imidlertid en retningsavhengighet. Hastighet er et eksempel på en slik størrelse. Man må gjerne gjøre rede for hvilken retning et legeme beveger seg, ikke bare hvor fort det beveger seg i denne retningen. Krefter er et annet eksempel på størrelser med retning, og det samme gjelder forflytning; om noen går fra et sted til et annet, så er vi som regel ikke bare interessert i hvor langt vedkommende gikk, men også hvor. Slike retningsavhengige størrelser kalles vektorer. Tabell 1 gir en oversikt over skalarer og vektorer. En skalar representeres ved hjelp av et enkelt tall, f.eks. $T = 30°\text{C}$ for temperatur, mens en vektor representeres ved hjelp av to eller flere tall. F.eks. kan vi representere en forflytning i rommet fra origo til et punkt P ved hjelp av tre tall (x, y, z) (eller (x_1, x_2, x_3)), som vist i figur 1.

Fremfor å skrive tre tall hver gang vi skal beskrive denne forflytningen så innfører vi et matematisk symbol $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Her er det verdt å merke seg at det eksisterer (minst) to alternative notasjoner, $\mathbf{r}$ og $\vec{r}$. Begge benyttes for å beskrive dette objektet som vi kaller en vektor. Vi skal her bruke **fete** bokstaver for å angi en vektor. Tallene som representerer vektoren kalles for vektorens

Tabell 1: Ulike fysiske størrelser

Skalar	Vektor
antall poteter	kraft
temperatur	forflytning
volum	hastighet
spenning	

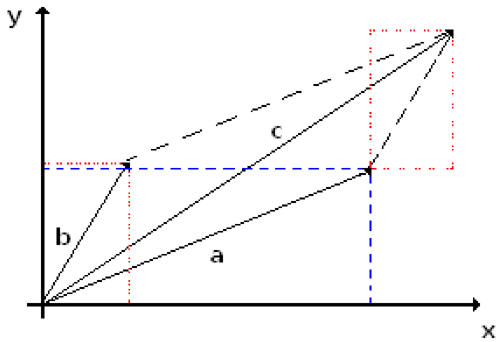


Figur 1: Eksempel på forflytningsvektor

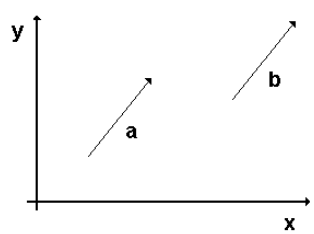
komponenter. I rommet kaller vi disse gjerne for x-, y- og z-komponenten av vektoren, men mer generelt kan man også snakke om 1., 2., ..., n-te komponent. I eksemplet med forflytning representerer komponentene hvor lang forflytningen er i henholdsvis x-, y- og z-retningen.

1.3 Vektorregning

En vektor er som sagt et matematisk objekt, og det eksisterer følgelig regler for hvordan man behandler disse objektene. Den første regelen vi skal ta for oss er addisjon.
Vi tenker oss en vektor $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ i et valgt koordinatsystem og en annen vektor $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Addisjon av disse to vektorene skjer komponentvis, slik at $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$. Som vi ser, gir addisjon av to vektorer en ny vektor $\mathbf{c}$ med komponenter $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$ og $c_z = a_z + b_z$. Vektoraddisjon har den interessante egenskapen at $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. Videre gjelder $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$. Vi kan altså legge sammen vektorer i hvilken rekkefølge vi vil.
Hva er den geometriske betydningen av vektoraddisjon? La oss se på dette ved å tegne opp to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ og se hvordan $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ blir seende ut, slik som i figur 2. Vi ser at vi kan addere komponentene til $\mathbf{b}$ og $\mathbf{a}$ ved å plassere rektangelet som representerer komponentene til $\mathbf{b}$ (lange stiplete linjer) ved siden av rektangelet som representerer komponentene til $\mathbf{a}$ (korte stiplete linjer). Vi ser at dette blir det samme som å plassere "halen" til $\mathbf{b}$ på "hodet" til $\mathbf{a}$. Pilen som da strekker seg fra "halen" til $\mathbf{a}$ til "hodet" til $\mathbf{b}$ utgjør da vektoren $\mathbf{c}$. Her er det verdt å merke seg at vi står fritt til å flytte vektorene til den posisjonen som er mest hensiktsmessig! En viktig konsekvens av dette er at to vektorer, f.eks. $\mathbf{a} = (1, 1)$ og $\mathbf{b} = (1, 1)$ er like, uavhengig av hvor de er posisjonert i koordinatsystemet, slik som figur 3 viser. Vi kan multiplisere en vektor $\mathbf{a}$ med et tall α. Dette gir

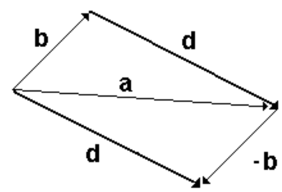


Figur 2: Addisjon av vektorer



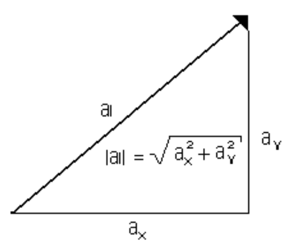
Figur 3: To vektorer plassert på ulike steder kan fortsatt være identiske!

oss en ny vektor med komponenter $(\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$.
La oss nå se på vektorsubtraksjon. Vi kan definere vektorsubtraksjon på samme måte som addisjon, men i stedet for å addere, så subtraherer vi komponentene. Eller, vi kan definere subtraksjon ved å definere en negativ vektor $-\mathbf{b} = -1\mathbf{b}$ og deretter addere komponentene. Netto blir dette det samme som å subtrahere komponentene direkte. Resultatet vises i figur 4. Figuren viser $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. Merk at differansen $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ enkelt kan finnes ved den ekvivalente relasjonen $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$. Differansen mellom to vektorer er altså minst like enkelt som å finne summen; vi plasserer halene til $\mathbf{b}$ og $\mathbf{a}$ sammen og trekker en vektor fra hodet på $\mathbf{b}$ til hodet på $\mathbf{a}$.



Figur 4: Subtraksjon av to vektorer: $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

Som nevnt tidligere har vektorer en lengde og en retning. Disse to egenskapene er nettopp det som gjør en vektor til en vektor. Lengden av en vektor kan lettest illustreres ved å bruke Pythagoras slik som figur 5 viser. Resultatet fra figur 5 kan "enkelt" generaliseres til flere dimensjoner. F.eks. kan lengden av forflytningen $\mathbf{r}$ nevnt tidligere skrives som $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Denne nye størrelsen har ingen retning; den er en skalar. Vi definerer oss derfor en ny størrelse $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ som vi kaller skalarprodukt (eller prikkprodukt). Den er definert som summen av de kvadrerte komponentene til en vektor, altså



Figur 5: Lengden av en vektor med bruk av Pythagoras

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \tag{1}$$

Vi definerer skalarproduktet mellom to vilkårlige vektorer (som har lik dimensjon, dvs like mange komponenter) som

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{2}$$

Lengden av en vektor er følgelig gitt som $a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.
Skalarproduktet har mange interessante og nyttige egenskaper, men disse kan man slå opp i f.eks. Rottmann. En egenskap som allikevel bør nevnes er

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \tag{3}$$

Det finnes også en enkel geometrisk måte å beregne $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ på, uten å måtte gå veien om komponentene til vektorene. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ er det samme som produktet av lengden av $\mathbf{a}$ og lengden av $\mathbf{b}$, multiplisert med cosinus til den mellomliggende vinkelen. Hvorfor? La oss tenke oss et spesielt koordinatsystem hvor $\mathbf{a}$ peker langs x-aksen, altså $\mathbf{a} = (a_x, 0, 0)$. Ligning 2 reduserer seg da til $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x$, som er lengden av $\mathbf{a}$ multiplisert med komponenten av $\mathbf{b}$ i $\mathbf{a}$ sin retning, altså $b \cos\theta$. Vi kan altså skrive

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta \tag{4}$$

Fra denne definisjonen ser vi at skalarproduktet mellom to vektorer som står vinkelrett på hverandre er 0 (for da er $\theta = \pi/2$).
Hvilken nytte har så skalarproduktet? Ganske stor. Senere skal vi f.eks. snakke om energi. Kinetisk energi er energi relatert til et objekt i bevegelse, og er definert ved $E = \frac{1}{2}mv^2$ (der m og v er hhv objektets masse og fart). Hvis objektet beveger seg i x-, y- og z-retning, vil vi måtte ta hensyn til farten i hver av disse retningene for å finne den totale energien. Altså; $E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.
Et annet eksempel på skalarprodukt er når vi skal finne hvor stort arbeid W som er utført av en kraft når noe skyves fra et sted til et annet. Arbeidet er da definert ved relasjonen $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ der $\mathbf{F}$ er kraften som virker og $\mathbf{s}$ er forflytningen.
Det er noen ganger hensiktsmessig å snakke om komponenten til en vektor i en bestemt retning (f.eks. i den vertikale retningen i forbindelse med tyngdekraft). I slike tilfeller er det nyttig å innføre noe vi kaller en enhetsvektor i retningen som vi ønsker å studere. Det er mange måter å skrive enhetsvektorer på. Vi velger å skrive en "hatt" over symbolet, f.eks. $\hat{x}$ for enhetsvektor i x-retning. En enhetsvektor er en vektor hvis skalarprodukt med seg selv er lik 1, altså $\hat{x} \cdot \hat{x} = 1$. I et kartesisk koordinatsystem med akser langs x, y og z trenger vi tre enhetsvektorer $\hat{x} = (1, 0, 0)$ i x-retning, $\hat{y} = (0, 1, 0)$ i y-retning og $\hat{z} = (0, 0, 1)$ i z-retning. Vi kan nå benytte oss av disse vektorene for å representere en vilkårlig vektor i dette koordinatsystemet, f.eks.

$$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z] = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z} \tag{5}$$

Altså har vi fått en nyttig måte å representere vektoren dersom vi er interessert i hva som skjer i en bestemt retning. Merk deg at enhetsvektorer er *dimensjonsløse*: Hvis f.eks. $\mathbf{a} = a_x\hat{x}$ beskriver en forflytning i x-retning, er det vektoren $\mathbf{a}$ og vektorkomponenten a_x som har enhet meter [m]. Enhetsvektoren, derimot, kan vi jo skrive som $\hat{x} = \mathbf{a}/a_x$, så vi ser at den blir uten enhet, dvs dimensjonsløs.

Kryssprodukt I tillegg til det tidligere definerte skalarproduktet finnes det en annen type multiplikasjon for vektorer. Dette er det såkalte kryssproduktet (også kalt vektorprodukt). Kryssproduktet er definert ved

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta\hat{n} \tag{6}$$

der θ er (den minste; det er jo to stykker!) vinkelen mellom vektorene $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ og $\hat{n}$ er en enhetsvektor som står vinkelrett på *både* $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Om vi tenker oss et plan som er utspent av $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, så vil $\hat{n}$ være normal til dette planet. Her finnes det imidlertid to muligheter for retningen til $\hat{n}$ ("opp" eller "ned"). Vi lar den såkalte "høyrehåndsregelen" bestemme retningen på $\hat{n}$: "Legg høyre pekefinger langs $\mathbf{a}$ og bøy den (igjen: gjennom den minste vinkelen, dvs den som er mindre enn 180°) så den peker i samme retning som $\mathbf{b}$. Din høyre tommelfinger peker da langs $\hat{n}$." [Oppgave: Hvilken retning peker da vektoren som man får om man tar kryssproduktet $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$?]
En annen ting som er verdt å merke seg er at kryssproduktet mellom to vektorer som er parallelle *alltid* er null, da den mellomliggende vinkelen er null!
Kryssproduktet har flere viktige anvendelser i fysikk. Vi skal her nevne to av disse. Den første dukker opp i forbindelse med ladde partikler som er i bevegelse (med hastighet $\mathbf{v}$ i et magnetfelt $\mathbf{B}$. Kraften som virker på en slik partikkel (med ladning q) er da gitt ved

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{7}$$

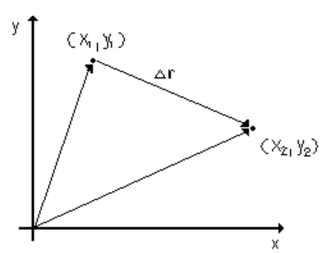
Mer om denne ligningen kommer i forelesningen om elektriske og magnetiske felt.
En annen viktig anvendelse av kryssproduktet er i forbindelse med kraftmoment (også kalt dreiemoment). Kraftmoment vil bli diskutert neste lørdag. Som motivasjon kan vi her nevne spennende (?) stikkord som skålvekt og spett.

2 Bevegelse

Å forstå bevegelse er en av hovedgrunnene til å holde på med fysikk. La oss i første omgang begrense oss til bevegelse i et plan, f.eks. xy-planet. (Det blir så mye styr å tegne figurer i tre dimensjoner...)

2.1 Forflytning

Utgangspunktet for å diskutere bevegelse er størrelsen forflytning. Vi tenker oss at en person befinner seg i et punkt (x_1, y_1) ved tiden t_1 og i punktet (x_2, y_2) ved tiden t_2. Som vi viste i avsnittet om vektorer, så kan vi tegne en vektor fra origo til hvert av disse punktene. La oss kalle disse to vektorene for henholdsvis $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$. Forflytningen som denne personen har utført er da gitt ved $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, slik som figur 6 viser. Forflytningen har skjedd i løpet av tidsintervallet $\Delta t = t_2 - t_1$. Her er det viktig



Figur 6: Forflytning i planet

å merke seg at forflytningen $\Delta\mathbf{r}$ er en vektor, mens tidsintervallet Δt er en skalar. Forflytning langs én akse, f.eks. x-aksen, er også en vektor, noe som vi kan se ved å benytte oss av enhetsvektorene innført i forrige avsnitt. Vi tenker oss to punkter x_1 og x_2 på x-aksen. En forflytning mellom disse to punktene kan da skrives som

$$\Delta\mathbf{r} = x_2\hat{x} - x_1\hat{x} = (x_2 - x_1)\hat{x} \tag{8}$$

2.2 Hastighet

Størrelsen hastighet beskriver hvor raskt posisjonen til et objekt endres. På norsk brukes ordene hastighet og fart gjerne litt om hverandre, i dagligtale, men også i vitenskapelig sammenheng.
Et begrep som alle har en viss erfaring med er gjennomsnittshastigheten til en gitt bevegelse, definert som forflytningen dividert med tidsintervallet hvor forflytningen fant sted, altså

$$\text{gjennomsnittshastighet} = \frac{\text{forflytning}}{\text{tidsintervall}} \tag{9}$$

I det forrige eksempelet vil gjennomsnittshastigheten da være

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \tag{10}$$

Siden $\Delta\mathbf{r}$ er en vektor og Δt en skalar, blir hastigheten $\mathbf{v}$ en vektor. Hvis vi måler forflytning i meter [m] og tid i sekunder [s], så ser vi fra ligning 9 at hastighet får enheten meter pr sekund [m/s]. For eksempel, om vi tenker oss at en person gjør en forflytning med lengde 1 m i løpet av 1 s, så vil gjennomsnittshastigheten bli 1 m/s.

Instantan hastighet Ved å bruke begrepet gjennomsnittshastighet så mister vi all informasjon om hvordan hastigheten har variert i løpet av tidsintervallet. Man klarer for eksempel ikke å forklare hvordan man kan få en fartsbot på en strekning, selv om man "i snitt" har holdt fartsgrensa. Det er klart at dersom man stadig måler forflytningen over mindre og mindre tidsintervaller så vil man kunne si mer om hvordan hastigheten varierer. Vi tenker oss at vi ved tiden t befinner oss i punktet $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t)$, og at vi befinner oss i punktet $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t + \Delta t)$ etter at tidsintervallet Δt er forløpt. Innsetting av dette i definisjonen for gjennomsnittshastighet gir nå

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{11}$$

Ved å la Δt gå mot null, oppnår vi det som vi definerer som instantanhastigheten

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{12}$$

der siste likhet følger av (den velkjente?) definisjonen på derivert fra matte 1. Denne nye størrelsen er så viktig at vi heretter bare kaller den for "hastighet" fremfor "instantanhastighet". Lengden av hastighetsvektoren (noen pleier å kalle denne *skalare* størrelsen for fart, men som sagt, fart og hastighet er synonyme begreper på norsk) blir da

$$v = |\mathbf{v}| (= \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}) \tag{13}$$

2.3 Akselerasjon

Begrepet akselerasjon er knyttet til endringen av hastighet over et tidsintervall. Ved å trekke analogier til gjennomsnittshastigheten er det naturlig å definere gjennomsnittsakselerasjon på samme måte.

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \tag{14}$$

Som nevnt tidligere har hastighet enhet [m/s]. Akselerasjon får da følgelig enhet [m/s^2].
Hvis et objekt beveger seg med hastighet 4 m/s i positiv x-retning ved tiden t = 0 s, og med hastighet 8 m/s i positiv x-retning ved tiden t = 2 s, så har det altså hatt en gjennomsnittlig akselerasjon på 2m/s^2 i positiv x-retning.

Instantan akselerasjon På samme måte som vi kom frem til (instantan) hastighet, kan vi komme frem til en definisjon på (instantan) akselerasjon

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{15}$$

der den siste likheten følger fra å sette inn ligning 12 for $\mathbf{v}$. Altså er akselerasjon den deriverte av hastigheten med hensyn på tid, eller ekvivalent, den annenderiverte av forflytningen med hensyn på tiden.

3 Bevegelsesligninger ved hjelp av integrasjon

Definisjonene for hastighet og akselerasjon er differensialligninger. Og differensialligninger kan man integrere for å finne funksjoner, for eksempel, hvordan forflytningen vil endre seg i tid ved konstant akselerasjon.
Hvis vi starter med definisjonen for akselerasjon (ligning 15) og multipliserer begge sider med dt så får vi

$$d\mathbf{v} = \mathbf{a}dt \tag{16}$$

Om vi antar at akselerasjonen er konstant (altså ikke avhengig av tiden) og integrerer begge sider, så oppnår vi

$$\int_{v_0}^{v(t)} d\mathbf{v}' = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0 = \mathbf{a} \int_{t_0}^{t} dt' = \mathbf{a}(t - t_0) \tag{17}$$

der $\mathbf{v}_0$ er hastigheten ved tiden t_0, og $\mathbf{v}(t)$ hastigheten ved tiden t. Ved å løse denne ligningen med hensyn på $\mathbf{v}(t)$ så oppnår vi

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}(t - t_0) + \mathbf{v}_0 \tag{18}$$

Ved å bruke definisjonen på hastighet så oppnår vi

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a}(t - t_0) + \mathbf{v}_0 \tag{19}$$

Multiplikasjon på begge sider med dt og integrasjon på samme måte som tidligere gir så

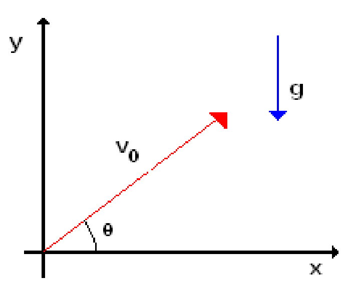
$$\int_{r_0}^{r(t)} d\mathbf{r}' = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \int_{t_0}^{t} (\mathbf{a}(t - t_0) + \mathbf{v}_0)dt'$$
$$= \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 - \mathbf{a}t_0 t + \mathbf{v}_0 t$$

der $\mathbf{r}_0$ er posisjonen ved tiden t_0. Hvis vi nå antar at $t_0 = 0$ og løser ligningen med hensyn på $\mathbf{x}(t)$ så oppnår vi

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \tag{20}$$

Dette utrykket beskriver hvordan posisjonen til et objekt endrer seg som funksjon av tiden dersom det opplever en konstant akselerasjon (forflytningen er følgelig gitt ved $\Delta\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0$).
Et eksempel på konstant akselerasjon har vi i et tyngdefelt, der den konstante akselerasjonen er $g = -9.81\text{m/s}^2$ i den vertikale retningen ($-\hat{y}$ med enhetsvektornotasjon, dersom vi velger positiv y-akse oppover).

Eksempel på bevegelse og vektorer Tenk deg at du står på flatmark og kaster en ball på skrå oppover med hastighet v_0. Hvor langt kommer ballen, og hvor lang tid bruker den?
Vi tenker oss at vi står i origo og kaster ballen slik at hastigheten danner en vinkel θ med x-aksen, som vi velger i horisontal retning slik som figur 7 viser.



Figur 7: Skrått kast

Et lurt sted å starte er å sette opp det vi vet om problemet

- $|\mathbf{v}_0| = v_0$
- $\mathbf{r}_0 = (0{,}0)$

- $\mathbf{v}_0 = (v_0\cos\theta\ ,\ v_0\sin\theta)$
- $\mathbf{a} = (0,-g)$

Ballen er altså utsatt for en konstant akselerasjon med lengde g i negativ y-retning (tyngdekraft!). Ved å sette opp differensialligningene for akselerasjon og hastighet og integrere opp disse som vist tidligere i dette kapitlet, så oppnår vi

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}_0 t \tag{21}$$

Leddet $\mathbf{r}_0$ er 0 og sløyfes derfor.
Trikset som man så gjør for å besvare spørsmålet om avstand og tid er å se på komponentene av vektorligningen (ligning 21). x-komponenten (som bestemmer hvor langt ballen er kommet horisontalt) er gitt ved

$$x(t) = v_0 t \cos\theta \tag{22}$$

fordi x-komponenten av akselerasjonen er 0. y-komponenten er på samme måte gitt som

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta \tag{23}$$

Hvis vi nå kaller tidspunktet som ballen treffer bakken for t_{max}, så har vi

$$y(t_{max}) = 0 = -\frac{1}{2}gt_{max}^2 + v_0 t_{max} \sin\theta \tag{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}gt_{max}^2 = v_0 t_{max} \sin\theta \tag{25}$$

Dette bestemmer da t_{max}:

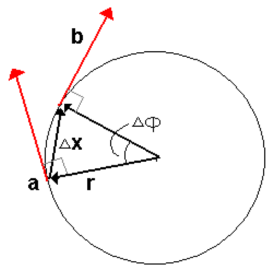
$$t_{max} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \tag{26}$$

Tilbakelagt avstand i x-retning blir følgelig

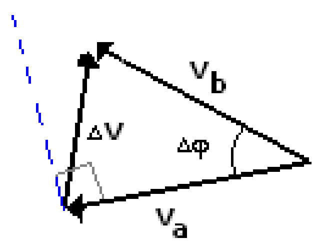
$$x_{max} = x(t_{max}) = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \tag{27}$$

3.1 Sirkelbevegelse

Tilnærmede sirkelbaner er vanlige i astrofysikk; planetene går i tilnærmede sirkelbaner rundt solen. Også i teknikk forekommer sirkelbevegelser ofte, tenk bare på alle delene som går rundt på en sykkel eller i en motor.
Vi begynner med å ta for oss en gjenstand som beveger seg i en sirkelformet bane, med konstant banefart. Hastigheten er imidlertid ikke konstant da den skifter retning hele tiden. Dette betyr at gjenstander i sirkelbane blir utsatt for en akselerasjon.
Vi tenker oss at vi beveger oss i en sirkelbane med radius r og sentrum i origo, slik som figur 8 viser. Gjenstanden befinner seg i punktet a (som vi kan beskrive med en vektor $\mathbf{a}$ fra origo til a) ved tiden t og punktet b (som vi kan beskrive med vektoren $\mathbf{b}$) ved tiden $t + \Delta t$. Hastighetene i punktene er henholdsvis $\mathbf{v}_a$ og $\mathbf{v}_b$ (merk at vi antar at absoluttverdien av hastigheten er konstant, slik at $|\mathbf{v}_a| = |\mathbf{v}_a| = v$). Forflytningen er som vanlig gitt ved $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Vi tegner opp hastighetene og differansen mellom vektorene, $\Delta\mathbf{v}$, i et diagram slik som figur 9. Som vi ser av figuren er



Figur 8: Sirkelbevegelse



Figur 9: Hastighetsvektorer og differanse. Den stiplede linjen viser retningen på $\Delta \mathbf{v}$ når $\Delta \phi$ blir veldig liten.

vinkelen mellom hastighetsvektorene den samme som mellom posisjonsvektorene (hvorfor?), nemlig $\Delta\phi$. Begge trekantene er likebeinte og har samme toppvinkel og er dermed formlike. Dette gir oss en sammenheng mellom *lengden* av sidene i trekantene, nemlig

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{|\Delta\mathbf{r}|} = \frac{|\mathbf{v}|}{r} \tag{28}$$

Ved å multiplisere begge sider med $|\Delta\mathbf{r}|$ og deretter dividere med Δt på begge sider så oppnår vi

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{|\mathbf{v}|}{r}\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t} \tag{29}$$

Hvis man så lar Δt gå mot null, så finner vi *lengden* av akselerasjonen altså:

$$|\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{v}|^2}{r} \tag{30}$$

Skrevet på "skalarnotasjon" blir dette følgelig

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{31}$$

Vi ser at dette stemmer enhetsmessig da vi har $[(\mathrm{m/s})^2/\mathrm{m}] = [\mathrm{m/s}^2]$.
Vi har altså funnet lengden av akselerasjonen, men hva med retningen? Om vi går tilbake til figur 9, så ser vi hvilken retning $\Delta\mathbf{v}$ har og følgelig vet vi hvilken retning $\mathbf{a}$ har. I grensen Δt går mot null vil også vinkelen $\Delta\phi$ gå mot null. I denne grensen vil $\Delta\mathbf{v}$ bli vinkelrett til hastigheten, altså i samme retning som $\mathbf{b}$ og $\mathbf{a}$! Akselerasjonen i en sirkelbevegelse peker altså inn mot sentrum av sirkelen.

Vinkelhastighet Når noe roterer rundt og rundt, skjønner vi uten videre at vinkelen θ mellom posisjonsvektoren $\mathbf{r}$ og (for eksempel) x-aksen endrer seg med tida. Vi kan da lage oss en slags hastighet ved å se på vinkelendringen $d\theta$ i løpet av et lite tidsintervall dt. Forholdet mellom disse to størrelsene er nettopp *vinkelhastigheten* ω:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

En hel runde rundt tilsvarer en vinkelendring på 2π radianer. Det betyr at hvis noe roterer rundt en akse en runde per sekund, så blir vinkelhastigheten $\omega = 2\pi$ rad/s. Hvis dette "noe" nå befant seg i en avstand r fra rotasjonssenteret, vet vi at lengden rundt tilsvarer omkretsen $2\pi r$. Den "vanlige" hastigheten v blir dermed omkretsen dividert med tidsintervallet. Mere generelt: Hvis et punkt i avstand r fra sentrum roterer en vinkel $d\theta$ i løpet av tiden dt, så har det beveget seg en lengde $r\,d\theta$ på denne tiden. Hastigheten blir følgelig

$$v = \frac{r\,d\theta}{dt} = r\omega$$

Eksempel: En sirkulær skive roterer med konstant vinkelhastighet ω. Da vil punkter på skiva som ligger nært sentrum ha mindre hastighet enn punkter som ligger lenger ute, fordi hastigheten v da øker proporsjonalt med avstanden r fra sentrum.

Polarkoordinater Når vi studerer "fysikk i planet", kan vi velge om vi vil bruke kartesiske koordinater x og y eller såkalte polarkoordinater r og θ. Her angir r avstanden fra origo og ut til et punkt med posisjonsvektor $\mathbf{r}$, mens θ angir vinkelen mellom x-aksen og $\mathbf{r}$. Dersom et punkt i planet har kartesiske koordinater (x, y), vil det samtidig ha polare koordinater (r, θ), der sammenhengen mellom koordinatene er gitt ved

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

Vi har dessuten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ved å bruke gode gamle Pythagoras.

4 Litt om enheter

At "enhetene stemmer" er blitt sjekket flere ganger i denne teksten, men er disse egentlig så viktige? Ja, absolutt. Det viktigste med enheter er at det lar oss sjekke hvorvidt et svar er riktig eller ikke. Hvis vi tenker oss at vi har funnet et (algebraisk) uttrykk for masse, f.eks.

$$m = \rho V \tag{32}$$

Hvordan kan vi vite at dette utrykket er rimelig? Vel, tettheten ρ har enheter [kg/m^3], mens volumet har enhet [m^3]. Altså har begge sider enhet [kg] og utrykket er dermed rimelig. Det samme prinsippet gjelder for mer kompliserte uttrykk, for eksempel utrykket vi fant for forflytning, ligning 20. Venstresiden har enhet [m] og det samme gjelder for *alle* ledd på høyresiden. Vi sier at ligningen er "konsistent dimensjonsmessig".

Dessverre er det slik at man ofte bruker ulike enheter når man snakker om samme ting. For eksempel kunne tettheten vært oppgitt i gram pr liter [g/l]. Hvordan skulle man da gå frem om volumet var målt i m^3? Heldigvis kan man enkelt regne seg om fra en enhet til en annen;

- 1000 g $= 10^3$ g $= 1$ kg
- 1 l $= 1$ dm^3 $= 1\ (10^{-1}\text{m})^3 = 10^{-3}\text{m}^3 = 0.001\text{m}^3$

Et volum på 1 m^3 som inneholder et stoff med tetthet 500 g/l vil altså ha en masse på 500 kg.

Noen land er fast bestemt på å holde på sine enheter. Et eksempel som alle kjenner er "feet" [ft] og "inches"[in] som man er spesielt begeistret for i engelsktalende land. Også for slike enheter eksisterer det omregningsregler

- 1 in $= 0.0254$ m $= 2.54\cdot10^{-2}$m $= 2.54$cm
- 1 m $= 39.3701$ in
- 1 ft $= 12$ in $= 0.3048$ m $= 30.48\cdot10^{-2}$m $= 30.48$cm

Vi har tidligere snakket om hastighet med enhet [m/s]. De fleste har imidlertid bedre erfaring med [km/h]. Hvordan kommer man fra den ene til den andre beskrivelsen av samme ting?

- 1 km = $1 \cdot 10^3$m = 1000 m
- 1 min = 60 s
- 1 h = 60 min = $60 \cdot 60$ s = 3600 s

Gitt at vi beveger oss i 10 m/s, hvor stor er hastigheten i km/h?

$$10\frac{\text{m}}{\text{s}} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{3600}{3600} = 36000\frac{\text{m}}{3600\text{s}} = 36000\frac{\text{m}}{\text{h}} \cdot \frac{1000}{1000} = 36\frac{1000\text{m}}{\text{h}} = 36\frac{\text{km}}{\text{h}} \tag{33}$$