Impuls, bevegelsesmengde, energi. Bevaringslover.

Kathrin Flisnes

19. september 2007

- **Bevegelsesmengde ("massefart")** Når et legeme har masse og hastighet, viser det seg fornuftig å definere legemets bevegelsesmengde $\vec{p}$. Størrelsen $\vec{p}$ kalles også i enkelte tilfeller "massefart". Hvorfor dette uttrykket brukes er enkelt å se av definisjonen for bevegelsesmengden,

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{1}$$

Hva blir så enheten på bevegelsesmengden, $[\vec{p}]$? Da vi har $[m]$=kg og $[\vec{v}]$=m/s, får vi

$$[\vec{p}] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Vi ser på et lite **eksempel**:
En tennisball med masse m=50 g slås slik at den får en hastighet $v = |\vec{v}|$=150 km/t. Hvor stor blir størrelsen av bevegelsesmengden, $p = |\vec{p}|$, til ballen?

Først må vi huske å gjøre om til SI-enheter, altså massen i kg og hastigheten i m/s. For å komme fra km/t til m/s må vi, som dere kanskje husker, dele på 3.6. Dermed får vi

$$p = |\vec{p}| = m|\vec{v}| = mv = 0.050 \text{ kg} \cdot \frac{150}{3.6} \text{ m/s}$$

$$\underline{\underline{p = 2.1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}}}$$

- **Impuls (kraftimpuls)**
Kraftimpuls, $\vec{I}$, defineres som

$$\vec{I} = \vec{F}t \tag{2}$$

når kraften $\vec{F}$ er konstant i tidsintervallet t. Dersom kraften varierer i tidsintervallet t, altså at $\vec{F} = \vec{F}(t)$, må vi bruke det mer generelle uttrykket

$$\vec{I} = \int \vec{F}(t)dt \tag{3}$$

Vi ser at kraftimpulsen $\vec{I}$ er en vektor siden kraften $\vec{F}$ er det. Kraftimpulsen kan tenkes på som en slags "effektiv" overføring av kraft som også tar med i beregningen hvor lenge kraften vedvarer. Hva blir enheten på kraftimpulsen? Vi vet at kraft har enhet $\left[\vec{F}\right] = \mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{s}^2}$ mens $[t] = \mathrm{s}$. Dermed får vi

$$\left[\vec{I}\right] = \mathrm{Ns} = \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}}$$

Når en gjenstand blir påvirket av en kraftimpuls, får den endret sin bevegelsesmengde:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_{etter} - \vec{p}_{før} \tag{4}$$

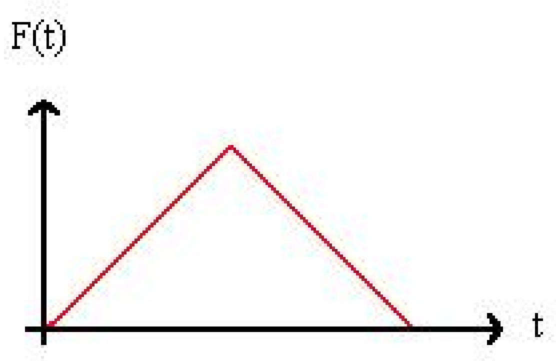
Her kan det være lurt å gjøre en liten enhetskontroll. Når vi titter tilbake på enhetene vi fant for litt siden, ser vi at vi har $\left[\vec{I}\right] = [\vec{p}]$, slik vi forventer ut fra ligning (4).

Vi ser på et nytt **eksempel**.
a)
En bordtennisball med masse m=2.5 g har hastighet v_0=36 km/t direkte mot deg. Etter at du har slått den med racketen har den hastighet v_1=54 km/t direkte motsatt vei av opprinnelig. Hvor stor kraftimpuls har du overført til ballen?
b)
Hvis racketen gir en konstant kraft $\vec{F}$ til ballen i tiden t=0.1 s, hvor stor må denne kraften være for å gi kraftimpulsen funnet i a)?

Løsning, a):
Først kan vi begynne med å gjøre om til grunnenheter (SI-enheter):
$m = 0.0025$ kg
$v_0 = (36/3.6)$ m/s $= 10$ m/s
$v_1 = (54/3.6)$ m/s $= 15$ m/s

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = m\vec{v_1} - m\vec{v_0}$$

Siden begge hastighetene virker langs samme linje, kan vi sette rett inn i formelen, så lenge vi husker på fortegnene:



Figur 1: Mulig skisse av kraft som funksjon av tid for ball som treffer vegg.

$$I = m(v_1 - v_0) = 0.0025 \text{ kg} \cdot (-15 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s})$$

$$I = -0.0625 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = -0.0625 \text{ Ns}$$

Hva betyr det at vi har minustegn foran svaret her? Husk på at vi har valgt positiv retning MOT oss. At I er negativ signaliserer dermed at kraftimpulsen overføres BORT fra oss, slik at vi får

$$\underline{\underline{I = 0.0625 \text{ Ns}}}$$

i samme retning som slutthastigheten.

Løsning, b):
Vi har at $\vec{I} = \vec{F}t$, altså virker kraften og kraftimpulsen i samme retning. Vi får dermed

$$F = \frac{I}{t} = \frac{0.0625 \text{ Ns}}{0.1 \text{ s}}$$

$\underline{\underline{F = 0.625 \text{ N}}}$ i samme retning som slutthastigheten.

NB: Generelt vil kraften fra racketen på ballen IKKE være konstant i et slikt støt. Dersom man ser på f.eks. en ball som treffer en vegg, vil kraften fra veggen på ballen generelt være mer likt funksjonen som er skissert i figur **??**.

- **Bevaring av bevegelsesmengde**

  Når ingen ytre krefter virker på et system, er den totale bevegelsesmengden i systemet bevart. Det samme gjelder også dersom resultanten av eventuelle ytre krefter er lik null.

  Dette ser vi dersom vi setter $\vec{F}_{res}$=0. Vi får da også $\vec{I}_{res} = \vec{F}_{res}/t$=0. Dette medfører at $\Delta\vec{p}$=0 og dermed $\vec{p}_{etter} = \vec{p}_{før}$.

  Hvis vi ser på to kuler med masse m_1 og m_2 som støter mot hverandre, får vi (fra Newtons andre lov) at kraften på kule 1 fra kule 2 i kollisjonstiden, $\vec{F}_{21}$, må være

  $$\vec{F}_{21} = m_1\vec{a}_1 = m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) = \frac{d\vec{p}_1}{dt}.$$

  Tilsvarende er kraften på kule 2 fra kule 1

  $$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

  Fra Newtons tredje lov får vi $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, og dermed

  $$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$$

  $$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d}{dt}\vec{p}_{total} = 0$$

  og dermed $\vec{p}_{total}$ en konstant.

- **Energi**

  Kinetisk energi (bevegelsesenergi), beskrives ved

  $$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \tag{5}$$

  Potensiell energi er generelt definert som

  $$E_p(r) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{6}$$

  hvor $\vec{r}_0$ er det valgte stedet for null potensiell energi. Hvis vi ser på potensiell energi i tyngdefeltet, hvor $\vec{F} = m\vec{g}$, får vi, dersom vi velger $E_p(h = 0) = 0$ og positiv z-retning oppover,

  $$E_p(h) = -\int_0^h (-mg)dz = mgh \tag{7}$$

På samme måte kan vi regne ut energien i en fjær, som har $\vec{F} = -k\vec{x}$ hvor $\vec{x}$ er utslaget fra fjæras likevekt. Det er naturlig å legge nullpunktet for potensiell energi i dette likevektspunktet, altså i x=0. Dermed får vi

$$E_p(x) = -\int_0^x -kx'dx' = \frac{1}{2}kx^2 \tag{8}$$

NB: Vi kan legge nullpunktet for potensiell energi akkurat der vi ønsker. Her har vi nevnt to valg som er både vanlige og "fornuftige", ikke bare gir de logisk mening, men de forenkler også beregningene våre. Når man regner med potensiell energi er det bare *endringer* i potensiell energi som har fysisk betydning.

Enheten for energi, både kinetisk og potensiell, er J (står for Joule). Denne enheten er definert ved at 1 J = 1 Nm.

- **Bevaring av energi** Så lenge ingen andre krefter enn tyngden gjør arbeid på et system, er den totale energien $E_{total} = E_p + E_k$ bevart.

  Dersom det gjøres arbeid på systemet (eller av systemet på omgivelsene, for den saks skyld), blir formelen for bevaring følgende:

$$(E_{total})_{etter} = (E_{total})_{før} + W \tag{9}$$

  Arbeidet W regnes med fortegn. Dersom systemet gjør arbeid på omgivelsene, har vi $W < 0$. Gjør omgivelsene arbeid på systemet, har vi $W > 0$. Arbeidet er generelt definert som

$$W = \int \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} \tag{10}$$

  Dersom kraften $\vec{F}$ er konstant over strekningen $\vec{s}$, gir dette $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

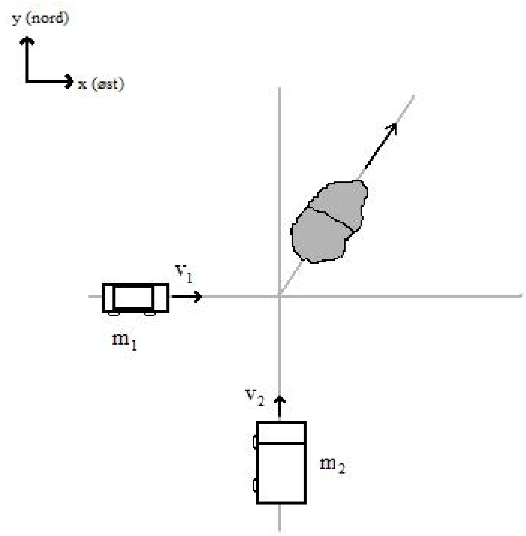
  Nå er det på tide med et **eksempel** igjen. Vi slipper en ball fra ro i 2 meters høyde over bakken. Dersom vi ser bort fra luftmotstanden, hvor stor hastighet har den idet den treffer bakken?
  Siden ingen andre krefter enn tyngden gjør arbeid på ballen, får vi

$$(E_p)_{før} + (E_k)_{før} = (E_p)_{etter} + (E_k)_{etter}$$

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2$$

  Her har vi h_0=2 m, v_0=0 m/s og h_1=0 m (bakkenivå). Omordner vi litt, får vi

$$v_1 = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ m}}$$



Figur 2: Bilkollisjon - regneeksempel

$$\underline{\underline{v_1 = 6.26 \text{ m/s}}}$$

For å oppsummere bevaring av bevegelsesmengde og energi kan det være nyttig å gå gjennom et klassisk **eksempel** - bilkollisjon.

a)

Vi tenker oss at to biler er på kollisjonskurs. Bil nummer 1 har masse $m_1 = 1000$ kg og hastighet $v_1 = 72$ km/t i retning østover. Bil nummer 2 har masse $m_2 = 2500$ kg og hastighet $v_2 = 54$ km/t i retning nordover. Etter kollisjonen henger bilene sammen og beveger seg som ett felles vrak. Hva blir farten $\vec{V}$ til dette felles-legemet?

b)

Hva skjer med den kinetiske energien før og etter kollisjonen?

Løsning, a):

Legg koordinatsystemet slik at y-aksen peker mot nord, som vist i figur **??**. Da beveger bil 1 seg i positiv x-retning og bil to i positiv y-retning. Det nye legemet de to vrakene utgjør vil ha massen $M = m_1 + m_2$. Bevegelsesmengden er bevart:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P} = M\vec{V}$$

$$m_1 v_1 \hat{x} + m_2 v_2 \hat{y} = M(V_x \hat{x} + V_y \hat{y})$$

Setter vi x-komponenter lik hverandre og y-komponenter lik hverandre, får vi dermed

$$V_x = \frac{m_1 v_1}{M}, V_y = \frac{m_2 v_2}{M}$$

Innsatt de oppgitte tall gir dette $V_x = 5.71$ m/s og $V_y = 10.71$ m/s. Fra dette får vi $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 12.14$ m/s $= 43.7$ km/t.

Vinkelen med x-aksen, θ, finner vi som

$$\theta = \arctan \frac{V_y}{V_x} = 61.9^\circ$$

Løsning, b): Vi begynner med å regne ut den kinetiske energien til systemet før kollisjonen:

$$(E_k)_{før} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$(E_k)_{før} = \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot (20 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2} \cdot 2500 \text{ kg} \cdot (15 \text{ m/s})^2$$

$$(E_k)_{før} = 482150 \ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = 482150 \text{ Nm}$$

$$\underline{\underline{(E_k)_{før} = 0.48 \text{ MJ}}}$$

hvor 1 MJ $= 10^6$ J $= 10^6$ Nm.

Etter kollisjonen har systemet kinetisk energi

$$(E_k)_{etter} = \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} \cdot (1000 + 2500) \text{ kg} \cdot (12.14 \text{ m/s})^2$$

$$\underline{\underline{(E_k)_{etter} = 0.26 \text{ MJ}}}$$

Vi ser at systemet ikke har samme kinetiske energi etter krasjet som før. Dersom vi antar flatt underlag, vil potensiell energi før og etter kollisjonen være den samme, og vi får

$$\Delta E_{total} = \Delta E_k = (E_k)_{etter} - (E_k)_{før}$$

$$\Delta E_{total} = -0.22 \text{ MJ}$$

Mekanisk energi er ikke bevart i et slikt støt, fordi det for eksempel blir gjort arbeid når bilene deformeres ($W = \Delta E_{total}$). Kollisjonen er det vi kaller et uelastisk støt. I et fullstendig *elastisk støt* er både bevegelsesmengden og den mekaniske energien bevart. I et *uelastisk støt* er kun bevegelsesmengden bevart, ikke den mekaniske energien.