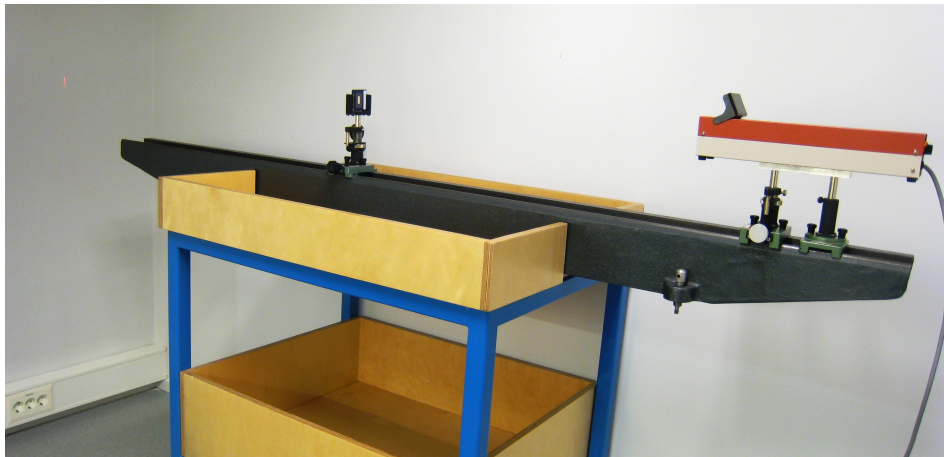


Diffraksjon og interferens med laser



Hensikt

Oppsettet på bildet brukes til å undersøke diffraksjonsmønstre fra ulike spalter og gittere. Når laserlys treffer et diffraksjonsobjekt, vil intensitetsmønsteret i observasjonsplanet være gitt som absolutt kvadratet av Fouriertransformen av feltamplituden i diffraksjonsplanet. Dette kommer vi frem til dersom vi benytter oss av det såkalte Huygens-Fresnel-prinsippet, som sier at vi kan modellere åpninger i diffraksjonsplanet som en samling med infinitesimale punktkilder som sender ut kulebølger. Diffraksjon er i så måte et interferensfenomen mellom mange punktkilder. På samme måte som lysdiffraksjon skjer på spalter med spaltebredder på størrelse med lysbølgelengden, kan man gjøre diffraksjonsforsøk med røntgen-, elektron- og nøytronstråling på ulike materialer. Bølgelengden til strålingen er da av samme størrelsesorden som avstanden mellom atomene i materialet som studeres.

Bakgrunnsteori

Oppsettet i denne teksten handler om diffraksjon og interferens. Vi bruker ordet interferens til å beskrive feltintensiteten i punkter i rommet der bølger overlapper. Den totale feltamplituden i et gitt punkt er da summen av de ulike bølgeamplitudene, mens intensiteten vi observerer er lik absoluttkvadratet av den totale feltamplituden. Ordet diffraksjon brukes om situasjoner der bølger treffer hindringer. En slik hindring kan for eksempel være en skjerm med et hull i. I lekelabteksten 'Interferensmodell for punktformede kilder', er det vist at intensiteten som oppstår i et punkt P når vi har interferens mellom to punktkilder som sender ut kulebølger kan uttrykkes ved:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\Delta r + \Delta\phi) \quad (1)$$

Her er Δr forskjellen i veilengde for de to bølgene til observasjonspunktet P, og $\Delta\phi$ faseforskjellen mellom de to kildene. I lekelabteksten 'Michelson Interferometer', er det også vist at dersom vi kan approksimere at de to intensitetene I_1 og I_2 er like store i P, slik at $I_1 = I_2 = I_0$, så får vi at uttrykket ovenfor forenkles til:

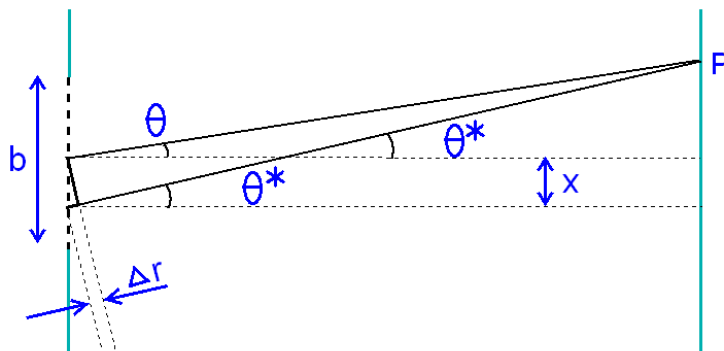
$$I = 4I_0 \cos^2(k\Delta r/2 + \Delta\phi/2) \quad (2)$$

Vi kan tenke oss at en planbølge som treffer en skjerm med et hull i, gir opphav til kulebølger fra hvert infinitesimale punkt i hullet. Denne modellen er kjent som Huygens-Fresnels prinsipp. Diffraksjon er altså i essens et interferensproblem med et veldig stort antall punktkilder. I stedet for å summere opp feltamplitudene fra to punktkilder, slik som vi gjør i lekelabteksten 'Interferensmodell for punktformede kilder' når vi utleder ligning 1, må vi da summere over feltene fra alle de infinitesimale punktkildene. Vi får dermed et integral over feltbidraget fra hver punktkilde.

Vi skal nå se på diffraksjon fra én enkelt spalte. Vi går ut ifra at avstandene mellom laserkilden og diffraksjonsobjektet og mellom diffraksjonsobjektet og observasjonsplanet, er store nok til at vi kan behandle situasjonen som fjernfeltsdiffraksjon, eller såkalt Fraunhoferdiffraksjon. Dette kravet kan under mer nøyaktige eksperimenter enn hva vi legger opp til i lekelaben, oppnåes ved å plassere en linse mellom laserkilden og diffraksjonsobjektet, og en linse mellom diffraksjonsobjektet og observasjonsplanet. Den første linsen gjør at parallelle stråler, det vil si planbølger, sendes inn mot diffraksjonsobjektet. Da vil hver infinitesimale punktkilde ha samme amplitude i diffraksjonsplanet. For diffraksjonsobjektet ser det da ut som om kilden befinner seg i uendeligheten. Den andre linsen gjør at alle parallelle stråler fra diffraksjonsplanet, samles i ett punkt på observasjonssiden av linsen.

Vi skal se på situasjonen der vi har en lang og tynn rektangulær spalte med en bredde b mye mindre enn lengden b' , som vi sender lys inn mot. Vi

er da interessert i å finne ut hvordan intensitetsfordelingen vår ser ut på en observasjonsskjerm på andre siden av spalten. Situasjonen er illustrert i Figur 1. Mer spesifikt ser vi på intensiteten i et punkt P. På grunn av at $b \ll b'$ blir problemet tilnærmet endimensjonalt, så vi er ute etter å finne intensiteten langs linjen på observasjonsplanet som er parallell med bredden b og som inneholder det direkte lyset. Vinkelen mellom minste-avstands-



Figur 1: Lys som treffer en spalte med bredde b og lengde $b' \gg b$, der b' er orientert perpendikulært på bildeplanet.

linjen fra spalteplanet til observasjonsplanet, og mellom linjen fra midten av spalten til punktet P, kaller vi θ . Når b er liten i forhold til avstanden mellom diffraksjonsplanet og observasjonsplanet, vil $\theta^* \approx \theta$. Feltet fra den infinitesimale punktkilden som befinner seg en avstand x i diffraksjonsplanet fra midten av spalten, kan vi uttrykke som:

$$dE = \frac{E_x}{r_x} \exp(i(kr_x - \omega t)) \quad (3)$$

Vi regner med at avstanden fra midten av spalten der $x = 0$ til P er r . Vi kan da uttrykke det differensielle feltet via:

$$\begin{aligned} dE &= \frac{E_x}{r + \Delta r} \exp(i(k(r + \Delta r) - \omega t)) \\ &= \frac{E_x}{r + \Delta r} \exp(i(kr - \omega t)) \exp(ik\Delta r) \end{aligned} \quad (4)$$

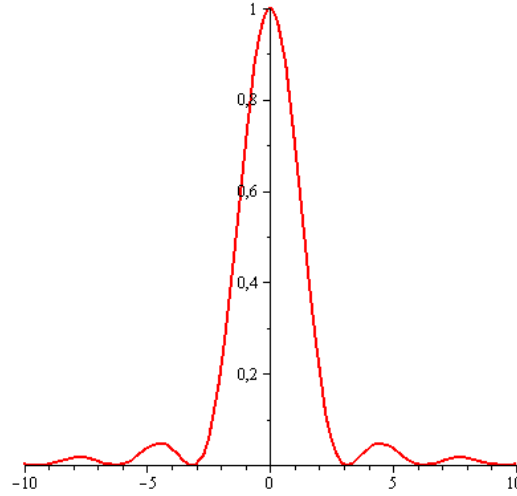
Fra figuren ser vi at veilengdeforskjellen $\Delta r = x \sin(\theta)$. Fordi $k = 2\pi/\lambda$ har vi da at $k\Delta r = 2\pi x \sin(\theta)/\lambda$. Veilengdeforskjellen $\Delta r \ll r$, så Δr -bidraget i amplitudedefaktoren kan vi med god nøyaktighet se bort i fra. Vi kan imidlertid ikke se bort ifra fasefaktoren $\exp(ik\Delta r)$. Når vi i tillegg husker på at vi regner med at vi har innkommende planbølger slik at feltet E_x i diffraksjonsplanet er like stort for alle x i spalten, med $E_x = E_0$, så får vi at det differensielle feltet kan uttrykkes som:

$$dE = \frac{E_0}{r} \exp(i(kr - \omega t)) \exp(i2\pi x \sin(\theta)/\lambda) \quad (5)$$

For å finne det totale feltet i P, må vi integrere opp feltbidragene fra alle de infinitesimale punktkildene våre:

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-b/2}^{b/2} dE \\
&= \int_{-b/2}^{b/2} \frac{E_0}{r} \exp(i(kr - \omega t)) \exp(i2\pi x \sin(\theta)/\lambda) dx \\
&= \frac{E_0}{r} \exp(i(kr - \omega t)) \int_{-b/2}^{b/2} \exp(i2\pi x \sin(\theta)/\lambda) dx \\
&= \frac{E_0}{r} \exp(i(kr - \omega t)) \frac{1}{i2\pi \sin(\theta)/\lambda} (\exp(i\pi b \sin(\theta)/\lambda) - \exp(-i\pi b \sin(\theta)/\lambda)) \\
&= \frac{E_0}{r} \exp(i(kr - \omega t)) \frac{\sin(\pi b \sin(\theta)/\lambda)}{\pi \sin(\theta)/\lambda} \\
&= \frac{E_0}{r} \exp(i(kr - \omega t)) b \operatorname{sinc}(\pi b \sin(\theta)/\lambda)
\end{aligned} \tag{6}$$

Vi har altså funnet at feltamplituden som funksjon av $\beta = \pi b \sin(\theta)/\lambda$ er proporsjonal med en såkalt sinc-funksjon $\operatorname{sinc}(\beta) = \sin(\beta)/\beta$, vist i Figur 2. Vi benytter oss av den siste skriveformen fordi det da er lettere å senere se



Figur 2: Plot av funksjonen $(\sin(\beta)/\beta)^2$ som funksjon av β .

likheten mellom uttrykket for intensitetsfordelingen fra en lang spalte og fra et sirkulært hull. Vi har dermed at intensitetsfordelingen for en rektangulær spalte med spaltebredde b mye mindre enn spaltelengden er gitt som:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 \tag{7}$$

$$\beta = \pi b \sin(\theta)/\lambda \tag{8}$$

Her er I_0 intensiteten i det punktet i observasjonsplanet der $\theta = 0^\circ$. De som tidligere har vært innom lekelaboppsettet som omhandler gitarstengen, husker kanskje at sinc-funksjonen er Fouriertransformen til en firkant-funksjon, som ikke er en dum representasjon av feltet i spalten vår. Dette er ikke tilfeldig. Som vi ser fra ligning 6, er feltamplituden i observasjonsplanet relatert til feltamplituden i diffraksjonsplanet via en Fouriertransform.

Vi skal nå prøve å tenke oss frem til diffraksjonsintensiteten i observasjonsplanet når diffraksjonsobjektet vårt er en kvadratisk spalte. Vi tenker oss at vi begynner med en rektangulær spalte med bredde b og lengde $b' \gg b$. Vi har sett at denne spalten gir en tilnærmet endimensjonal sinc^2 -fordelt intensitet i observasjonsplanet i retningen som er parallell med spaltebredden b . Når vi så minsker b' slik at vi tilslutt oppnår en kvadratisk spalte med $b' = b$, virker det da naturlig at vi vil få en sinc^2 -formet intensitetsfordeling også i retningen parallell med b' . Vi får altså et todimensjonalt 'intensitetsskryss'. Intensitetsfordelingen for en kvadratisk spalte med spaltebredde og -lengde b kan dermed uttrykkes som:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin(\beta')}{\beta'} \right)^2 \quad (9)$$

$$\beta = \pi b \sin(\theta)/\lambda \quad (10)$$

$$\beta' = \pi b \sin(\theta')/\lambda \quad (11)$$

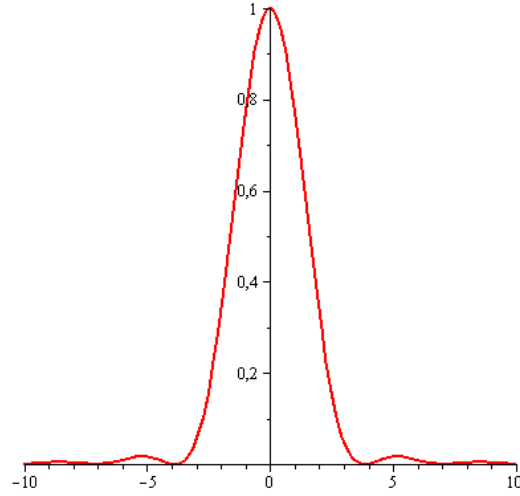
Her er θ vinkelen mellom minste-avstands-linjen fra spalteplanet til observasjonsplanet og den komponenten av linjen fra midten av spaltebredden b til observasjonspunktet P som er parallell med b , mens θ' tilsvarende er vinkelen mellom minste-avstands-linjen fra spalteplanet til observasjonsplanet og den komponenten av linjen fra midten av spaltebredden b' til observasjonspunktet P som er parallell med b' . I_0 er intensiteten i punktet der $\theta = \theta' = 0^\circ$.

Det siste eksemplet vi skal se på der diffraksjonsintensiteten resulterer som følge av at det innkommende lyset vårt treffer én enkel åpning, er eksemplet der åpningen er sirkulær. Vi oppgir at intensitetsfordelingen for diffraksjon fra ett sirkulært hull med diameter D , er gitt som følger:

$$I = I_0 \left(\frac{2J_1(\beta)}{\beta} \right)^2 \quad (12)$$

$$\beta = \pi D \sin(\theta)/\lambda \quad (13)$$

Her er J_1 en førsteordens Besselfunksjon av første type, vist på Figur 3. Vi ser utifra denne ligningen at intensitetsfordelingen fra det sirkulære hullet er rotasjonssymmetrisk om senteraksen fra diffraksjons- til observasjonsplanet.



Figur 3: Plot av funksjonen $(2J_1(\beta)/\beta)^2$ som funksjon av β .

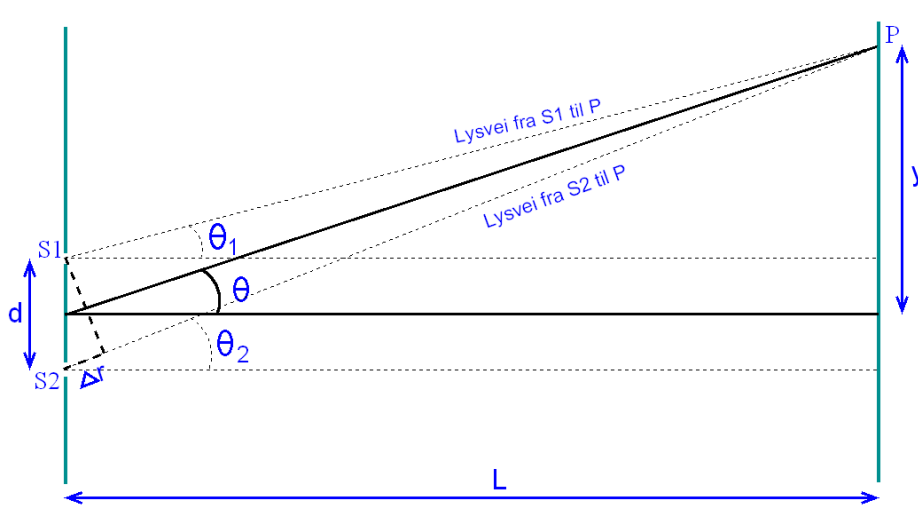
Vi skal så bevege oss over mot diffraksjonsoppsett der vi har mer enn én åpning i diffraksjonsplanet. Vi begynner med å se på situasjonen som er illustrert i Figur 4. Vi har to tynne, lange rektangulære spalter med spaltebredder b i en innbyrdes avstand d . Kravet for konstruktiv interferens mellom lyset fra to punkt i de to spaltene, vil være oppfylt når veilengdeforskjellen Δr er et helt antall bølgelengder. Vi ser fra figuren at dersom spalteseparasjonen d er mye mindre enn avstanden L fra diffraksjons- til observasjonsplanet, så har vi at $\sin(\theta_1) \approx \sin(\theta_2) \approx \sin(\theta)$. Veilengdeforskjellen Δr kan uttrykkes via denne vinkelen som $\Delta r = d \sin(\theta)$ slik at $k\Delta r/2 = \pi d \sin(\theta)/\lambda = \alpha$. Den totale intensitetsfordelingen for to rektangulære spalter med innbyrdes avstand d og med spaltebredder b mye mindre enn spaltelengdene, vil da basert på ligning 2 være gitt som:

$$I = 4I_0 \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 \cos^2(\alpha) \quad (14)$$

$$\beta = \pi b \sin(\theta)/\lambda \quad (15)$$

$$\alpha = \pi d \sin(\theta)/\lambda \quad (16)$$

Her er I_0 den intensiteten som vi ville observert i det sentrale diffraksjonsmaksimumet fra én enkelt spalte. Den kanskje mest vanlige formen for diffraksjon oppstår imidlertid når vi har mange spalter, eller et såkalt diffraksjonsgitter. Intensitetsfordelingen for N identiske og parallelt orienterte, rektangulære spalter med innbyrdes avstand d og med spaltebredder



Figur 4: Lys som treffer to spalter med bredder b og lengder $b' \gg b$. Spaltene har en innbyrdes avstand d , som vist på figuren.

b mye mindre en spaltelengdene er gitt som:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin(N\alpha)}{\sin(\alpha)} \right)^2 \quad (17)$$

$$\beta = \pi b \sin(\theta) / \lambda \quad (18)$$

$$\alpha = \pi d \sin(\theta) / \lambda \quad (19)$$

Helt til slutt skal vi se på tilfellet der hindringen vår ikke er en skjerm med en åpning, men en smalt objekt, slik som for eksempel en tråd. Du kan tenke deg hvordan et slikt smalt objekt kan sees på som en invertert spalte. Ved å prøve ut dette i laben, kan du observere at intensitetsmønsteret som oppstår når lyset passerer en tynn tråd er meget likt intensitetsmønsteret fra en tynn spalte, med unntak av et sterkt lysmaksimum i midten av mønsteret.

Tabell 1: Oversikt over β -verdiene til de første maksima og minima for funksjonene i kolonnen til venstre.

Funksjon	maks $n = 0$	min $n = 0$	maks $n = 1$	min $n = 1$	maks $n = 2$	min $n = 2$	maks $n = 3$	min $n = 3$
$(\sin(\beta)/\beta)^2$	± 0.00	± 3.14	± 4.49	± 6.28	± 7.73	± 9.42	± 10.9	± 12.6
$(2J_1(\beta)/\beta)^2$	± 0.00	± 3.83	± 5.14	± 7.02	± 8.42	± 10.2	± 11.6	± 13.3

Oppsett

Oppsettet for observasjon av interferens og diffraksjon med laserlys består per høsten 2008 av følgende deler:

- En HeNe-laser
- En optisk benk montert på et trillebord
- Tre festestativ med tilhørende plateklemmer
- Spalter (rektangulære en-spalter og noen få-splate gitter)
- En hvit vegg
- Et mørkt rom

Det er nødvendig med standard stikkontakt strømforsyning til laseren.

Ting du kan prøve ut

Hensikten med oppsettet med laseren og spaltene er å observere hvordan ulike spalter og kombinasjoner av spalter gir opphav til ulike intensitetsfordelignere i observasjonsplanet. Du kan begynne med å se på intensitetsmønsteret som oppstår når du plasserer en enkelt spalte slik at laserlyset treffer spalten. Prøv å varierespaltebredden, og observer hva som skjer med intensitetsmønsteret. Du vil observere at større avstander i diffraksjonsplanet, fører til mindre avstander mellom lysmaksima i observasjonsplanet.

Etter at du har blitt kjent med den rektangulære spalten, kan du prøve å undersøke mønsteret som oppstår når laserlyset passerer en tynn tråd, slik som for eksempel et hårstrå. Ved å sammenligne diffraksjonsmønsteret fra et hårstrå og fra en rektangulær spalte, kan du si noe om diameteren til hårstrået i forhold til spaltebredden?

Du kan også prøve å sette inn gittere med flere spalter plassert parallelt med hverandre. Observer hva som skjer med intensitetsmønsteret når du setter inn gittere med færre eller flere splater. Med N spalter i gitteret, vil det mellom hvert hovedmaksima være $N - 1$ nullpunkter og $N - 2$ mindre intensitetsmaksimum. Observer også hvilken effekt avstanden mellom spaltene i et gitter har på intensitetsmønsteret.