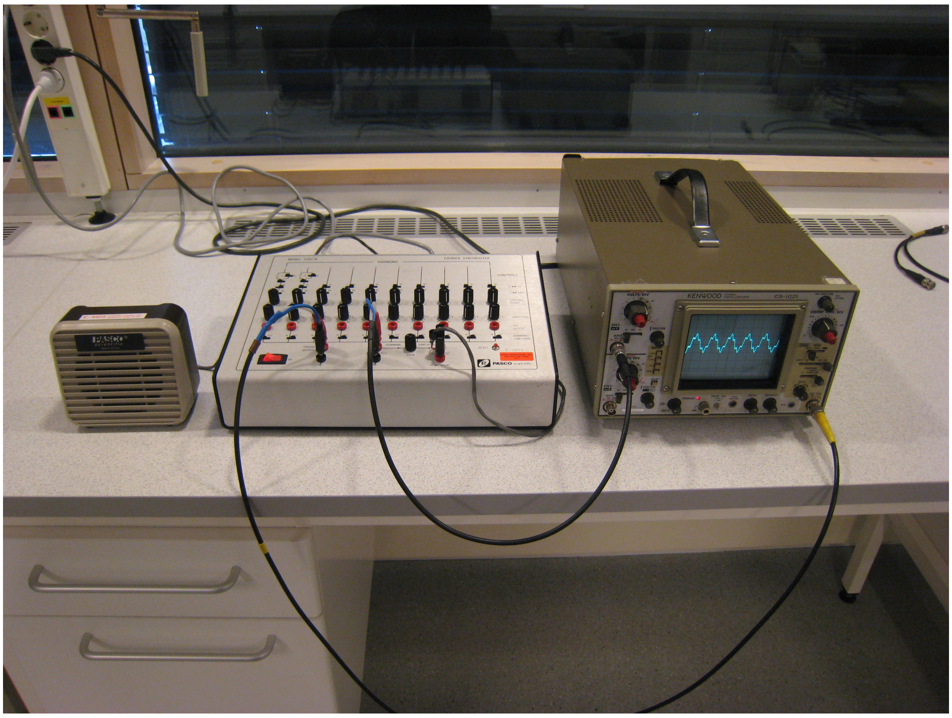
Fouriersyntese av lyd



Hensikt

Laboppsettet vist på bildet er kjent under navnet 'Fouriersyntese av lyd'. Hensikten med oppsettet er å erfare hvordan ulike kombinasjoner av en grunntone og dens overharmoniske høres ut, samtidig som signalet følges på et oscilloskop. På Fouriersynthesizeren har man tilgjengelig en grunntone på 440 Hz, samt de første åtte overharmoniske. Oppsettet kan derved brukes til å illustrere hvordan et begrenset antall harmoniske komponenter kan legges sammen til for eksempel et tilnærmet firkantsignal. Grunntonen på 440 Hz er den standardiserte definisjonen på tonen A4, og brukes som referansetone under stemming av musikkinstrumenter.

Bakgrunnsteori

Fourierrekker er et grunnleggende tema innenfor fysikk, matematikk og ikke minst signalbehandling. Teorien bak Fourierrekker sier i hovedsak at en stykkevis kontinuerlig periodisk funksjon $f(t)$ med periode T kan representeres som en sum av sinus- og cosinusfunksjoner:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \tag{1}$$

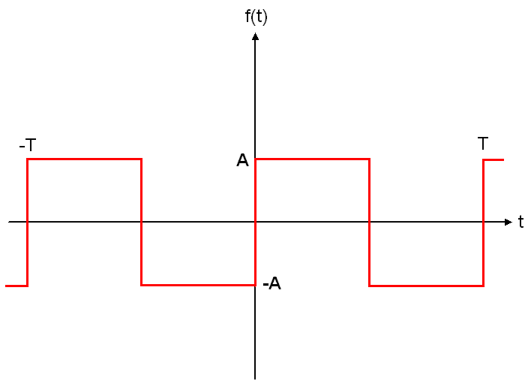
Her er $\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi/T_n = 2\pi n/T$, slik at de to leddene vi får når $n = 1$ er seriens 'grunntoner' med en frekvens $f_1 = 1/T$, og de påfølgende leddene de såkalte overharmoniske, med frekvenser $f_n = nf_1$. Fourierkoeffisientene a_0, a_n og b_n i Fourierrekken ovenfor er gitt ved de såkalte Eulers formler:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t'}^{t'+T} f(t)dt \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t'}^{t'+T} f(t)\cos(\omega_n t)\,dt \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t'}^{t'+T} f(t)\sin(\omega_n t)\,dt \tag{4}$$

Vi kan illustrere bruken av disse ligningene ved å finne Fourierrekken til et antisymmetrisk firkantsignal $f_f(t)$ med periode T og amplitude A, se figur.



Vi regner først ut Fourierkoeffisienten a_0:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \\ &= \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} A dt + \int_{T/2}^{T} (-A)dt\right) \\ &= \frac{1}{T}\left(\frac{AT}{2} - AT + \frac{AT}{2}\right) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Videre finner vi et uttrykk for a_n:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega_n t)\,dt \\
&= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} A\cos(\omega_n t)\,dt + \int_{T/2}^{T}(-A)\cos(\omega_n t)\,dt\right) \\
&= \frac{2A}{\omega_n T}\left(\sin(\omega_n T/2) - \sin(0) - \sin(\omega_n T) + \sin(\omega_n T/2)\right) \\
&= \frac{2A}{\omega_n T}\left(2\sin(\omega_n T/2) - \sin(\omega_n T)\right) \\
&= \frac{A}{n\pi}\left(2\sin(n\pi) - \sin(n2\pi)\right) = 0 \qquad (6)
\end{aligned}$$

Vi ser altså at alle Fourierkoeffisientene a_0 og a_n er null for vårt antisymmetriske firkantsignal. Dette kunne vi også ha funnet ut ved å legge merke til at integrandene $f(t)$ og $f(t)\cos\omega_n t$ i uttrykkene ovenfor er odde funksjoner. Fordi integralet av en odde funksjon fra $-C$ til C, der C er en vilkårlig konstant, alltid er null, vil også integralet fra for eksempel $-T/2$ til $T/2$ av en odde funksjon være null. Fordi integralet av en periodisk funksjon $f(t)$ med periode T er det samme over ethvert intervall fra t' til $t' + T$, ser vi da hvorfor integralene ovenfor måtte bli null. Integranden $f(t)\sin\omega_n t$ i uttrykket for b_n er imidlertid produktet av to odde funksjoner, så integranden i dette tilfellet er symmetrisk. Vi finner et uttrykk for Fourierkoeffisienten b_n:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega_n t)\,dt \\
&= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} A\sin(\omega_n t)\,dt + \int_{T/2}^{T}(-A)\sin(\omega_n t)\,dt\right) \\
&= \frac{2A}{\omega_n T}\left(-\cos(\omega_n T/2) + \cos(0) + \cos(\omega_n T) - \cos(\omega_n T/2)\right) \\
&= \frac{2A}{\omega_n T}\left(1 - 2\cos(\omega_n T/2) + \cos(\omega_n T)\right) \\
&= \frac{A}{n\pi}\left(1 - 2\cos(n\pi) + \cos(n2\pi)\right) \\
&= \frac{2A}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) \qquad (7)
\end{aligned}$$

Vi ser dermed at når $n = 1, 3, 5...$ så blir $b_n = 4A/n\pi$, mens når $n = 2, 4, 6...$ har vi at $b_n = 0$. Fourierserien til firkantsignalet vårt blir altså:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\omega_n t) \\
&= \frac{4A}{\pi}\left(\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t) + ...\right) \qquad (8)
\end{aligned}$$

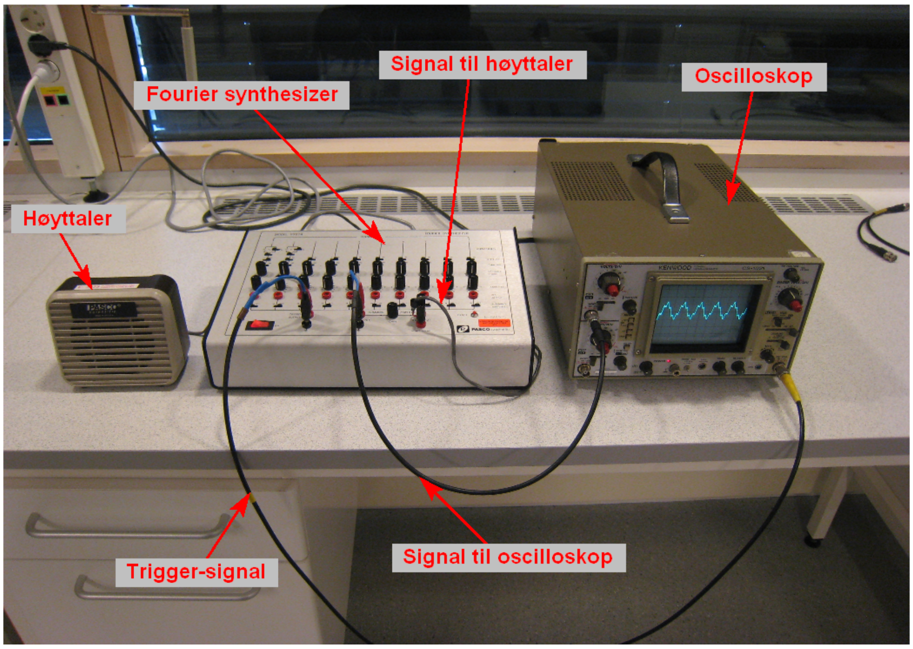
Med vår Fouriersynthesizer kan vi produsere signaler med frekvenser fra $f_1 = \omega_1/2\pi = 440\,\mathrm{Hz}$ til $f_9 = 9f_1 = 3960\,\mathrm{Hz}$, så vi har mulighet til å høre på det tilnærmede firkantsignalet vi oppnår ved å addere de fem første leddene i vår Fourierserie.

Oppsett

Oppsettet for Fouriersyntese av lyd er relativt enkelt, og består per høsten 2008 av følgende komponenter:

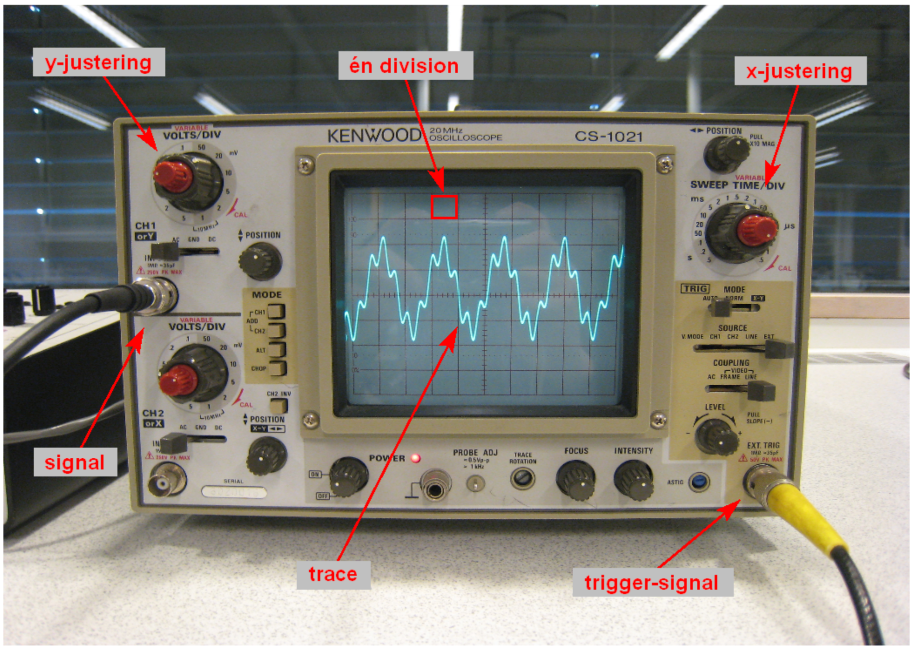
- Pasco Scientific Fourier Synthesizer
- Pasco Scientific høyttaler
- Kenwood oscilloskop
- To BNC-til-banan kabler

Det er i tillegg nødvendig å ha standard stikkontakt strømforsyning tilgjengelig for Fouriersynthesizeren og oscilloskopet.



Figur 1: Forslag til oppsett.

Figur 1 viser et forslag til hvordan oppsettet kan se ut. Før man slår på de ulike komponentene bør amplituden til alle Fourierkomponentene på synthesizeren være satt til null og forsterkningen til høyttaleren være satt til sitt minimum. Frontpanelet på Fouriersynthesizeren er relativt selvforklarende. Kontrollknappene til de to grunntonesignalene på 440 Hz er lokalisert til venstre og markert med 1. Videre er de første åtte overharmoniske og deres kontroller markert med tallene 2 til 9. Signalene med grunntonefrekvensen kan velges til å være enten sinus-, firkant- eller trekantsignaler, mens de overharmoniske er sinusformede. Alle signalene har egne amplitude- og faseknapper, og kan switches inn eller ut av det totale summerte signalet, som er det signalet vi sender inn på oscilloskopet og høyttaleren. Figur 2 viser front-



Figur 2: Oscilloskopet.

panelet til oscilloskopet. Noen sentrale komponenter er definert på figuren, slik som kontaktene der vi tar inn trigger- og inn-signalet. Tracet viser signalet vårt, med spenningen på y-aksen til displayet. På displayet har x-aksen enhet tid. De to knottene merket med 'y-justering' og 'x-justering', bestemmer oppløsningen i henholdsvis volts/div og time/div. En såkalt div, eller division, er en rute på displayet. Hvis vi ønsker å kalibrere oppløsningen, benyttes de røde knottene i midten av de større svarte knottene som er merket med volts/div og time/div. Du kan for eksempel kalibrere tidsaksen ved å justere med den røde knotten slik at en periode T_n til en av de harmoniske komponentene fra Fouriersynthesizeren forholder seg til den kjente frekvensen f_n slik at $T_n = 1/f_n$.

Ting du kan prøve ut

Med Fouriersynthesizeren, mikrofonen og oscilloskopet er det mulig å erfare hvordan ulike signaler høres ut samtidig som de observeres på oscilloskopet. Ved å switche inn de ulike bølgeformene tilgjengelig for grunntonefrekvensen, kan du for eksempel høre hvordan lyden av et firkantsignal og et trekansignal skiller seg ut ifra lyden som resulterer fra et rent sinussignal. Du kan deretter prøve ut om signalene høres annerledes ut når du endrer fasen. Kan du for eksempel høre forskjell på et sinus- og et cosinussignal? Prøv deretter å switche inn en av de overharmoniske. Begynn med den overharmoniske sin amplitude satt til null og skru amplituden opp mens du følger med på oscilloskopet og hører på lyden som produseres.

Under avsnittet med bakgrunnsteori, fant vi et uttrykk for Fourierrekken til et firkantsignal. Du kan nå prøve å lage et slikt signal med Fouriersynthesizeren. I Tabell 1 er det også inkludert beskrivelser av hvordan du kan lage et antisymmetrisk trekantsignal, en fiolintone og en pianotone. Hør på disse ulike signalene samtidig som du observerer signalene på oscilloskopet. Fiolin- og pianotonen vil ikke høres helt ut som de tilsvarende tonene produsert av virkelige fioliner og pianoer, både fordi flere overharmoniske antagelig medvirker til instrumenttonene, men også på grunn av andre faktorer slik som tidsvariasjoner i tonestyrke, som ikke reproduseres av Fouriersynthesizeren.

Ellers kan du leke så mye du vil, men pass på at du ikke setter mikrofonforsterkningen for høyt slik at lyden av signalet blir ubehagelig å høre på!

Tabell 1: Ulike bølgeformer og instrumenttoner som du kan oppnå med Fouriersynthesizeren. Det forutsettes at bølgeformene uten faseskift er sinusfunksjoner. Amplitudene er angitt i prosent relativt til amplituden på grunntonen.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Firkant	Amp.	100	0	33	0	20	0	14	0	11
	Fase	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
Trekant	Amp.	100	0	11	0	4	0	2	0	1.2
	Fase	0°	0°	180°	0°	0°	0°	180°	0°	0°
Fiolin	Amp.	100	0	33	0	20	0	14	0	11
	Fase	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
Piano	Amp.	100	50	33	25	20	17	14	13	11
	Fase	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°