

Bølgerenna



Hensikt

Bølgerenna på bildet ovenfor brukes til å studere vannbølger. Bølger med varierende frekvens og amplitude kan genereres via en signalgenerator og en motor. Det er blant annet mulig å illustrere forskjellen på fasefart og gruppefart, og det er mulig å observere hvordan endringer i bølgefrequensen påvirker bølgelengden. Dyptvannsbetingelsen vil normalt være oppfylt, og vi ser på såkalte tyngdebølger.

Bakgrunnsteori

Vi skal nå kort se på enkel bakgrunnsteori for vannbølger. Vi regner med at vi kan bruke lineær bølgeteori, og går ut ifra at alle bølgekomponentene våre er sinusformede. Dette er en tilnærming som er gyldig for bølger med amplituder $A \ll 1/k = \lambda/2\pi$, der k er bølgetallet og λ bølgelengden. Når denne tilnærmelsen ikke er gyldig, vil bølgene ha spissere topper og slakkere bølgebunner i forhold til en sinusformet bølge. Vi skal så betrakte den såkalte dispersjonsrelasjonen, som sier at vannbølgenes vinkelfrekvens ω er relatert til bølgetallet k på følgende vis:

$$\omega^2 = gk \tanh(kd) \quad (1)$$

Her er d dybden, definert som den loddrette avstanden fra den uforstyrrede vannoverflaten til bunnen av vannvolumet, og g er tyngdeakselerasjonen. Vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi/T$ der T er perioden, og bølgetallet $k = 2\pi/\lambda$ der λ er bølgelengden. Den såkalte fasefarten v til en sinusformet bølge er gitt som:

$$v = \lambda/T = \omega/k \quad (2)$$

Dersom vi setter inn for ω fra ligning 1, får vi at denne fasefarten kan uttrykkes som:

$$v = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kd)} \quad (3)$$

Siden $kd = 2\pi d/\lambda$ ser vi at når $2\pi d \gg \lambda$ vil $\tanh(kd) \rightarrow 1$. Dette er den såkalte dyptvannsbetingelsen. Når vi har grunt vann vil derimot $2\pi d \ll \lambda$ slik at $\tanh(kd) \rightarrow kd$. Vi får dermed følgende approksimasjoner til fasefarten for bølger på respektivt dypt og grunt vann:

$$\text{Dypt vann: } v = \sqrt{g/k} \quad (4)$$

$$\text{Grunt vann: } v = \sqrt{gd} \quad (5)$$

Siden vinkelfrekvensen ω er ikke-lineært avhengig av k og fasefarten på dypt vann er avhengig av bølgelengden, er dyptvannsbølger dispersive. Fra ligningen ovenfor ser vi at dersom bølgelengden λ øker og vi er på dypt nok vann, så vil fasefarten v også øke. Vi ser også fra ligning 1 at dersom vinkelfrekvensen ω øker på dypt vann, så minker λ og v . På den andre siden har vi at gruntvannsbølger ikke er dispersive fordi fasefarten ikke avhenger av noen egenskaper ved bølgen. Vi ser imidlertid at når vi er på grunt vann og vanddyppet blir enda grunnere, så fører dette til en avtagning i fasefarten. Det er vanlig å regne med at dyptvannstilnærmelsen er gyldig når $d > \lambda/2$ og at gruntvannstilnærmelsen er gyldig når $d < \lambda/20$. Vi skal så se på gruppefarten til en vannbølge. Gruppefarten V er definert som den deriverte av vinkelfrekvensen med hensyn på bølgetallet:

$$V = \frac{d\omega}{dk} \quad (6)$$

Vi bruker så at uttrykket for ω^2 av k fra ligning 1 derivert på k er gitt som:

$$\frac{d\omega^2}{dk} = g \tanh(kd) + \frac{gkd}{\cosh^2(kd)} \quad (7)$$

Vi har videre at:

$$\frac{d\omega^2}{d\omega} = 2\omega \Rightarrow d\omega^2 = 2\omega d\omega \quad (8)$$

Vi kombinerer de to foregående uttrykkene, og får at gruppehastigheten V er gitt som¹:

$$\begin{aligned} V &= \frac{g}{2\omega} \tanh(kd) + \frac{gkd}{2\omega \cosh^2(kd)} \\ &= \frac{g}{2\omega} \tanh(kd) \left(1 + \frac{kd}{\sinh(kd) \cosh(kd)} \right) \\ &= \frac{\omega}{2k} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right) \\ &= \frac{1}{2}v \left(1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

På dypt vann når $4\pi d \gg \lambda$ vil $\sinh(2kd) \rightarrow \exp(2kd)/2$ slik at $2kd/\sinh(2kd) \rightarrow 4kd \exp(-2kd) \rightarrow 0$, mens på grunt vann når $4\pi d \ll \lambda$ vil $\sinh(2kd) \rightarrow 2kd$. Vi får dermed at gruppefarten på respektivt dypt og grunt vann kan tilnærmes ved:

$$\text{Dypt vann: } V = v/2 = \sqrt{g/4k} \quad (11)$$

$$\text{Grunt vann: } V = v = \sqrt{gd} \quad (12)$$

Gruppehastigheten er en viktig størrelse blant annet fordi energien til en bølge forplanter seg med gruppehastigheten. Det er også slik at når bølger oppstår ute på havet, så er det gruppehastigheten og ikke fasehastigheten til hver bølgekomponent som bestemmer når disse bølgene når land. For de fleste havbølger vil dyptvannstilnærmelsen være gyldig, og vi ser da at gruppehastigheten (så vel som fasehastigheten) er proporsjonal med $\sqrt{\lambda}$, slik at de lengste bølgene vil treffe land først. Vi kan også se såvidt på bevegelsen til vannet som en bølge eksisterer i. Det kan se ut som om vannet beveger seg avgårde med fasehastigheten, men det er klart at dette ikke

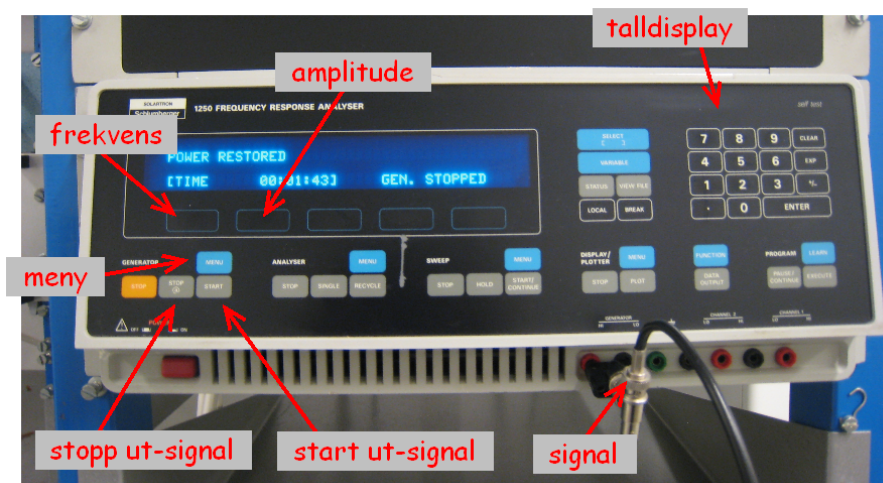
¹Tilleggsinfo:

$$\begin{aligned} \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\ \sinh(x) \cosh(x) &= \frac{\sinh(2x)}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

kan være tilfelle. Ligningene som bestemmer hastighetsprofilen til vannet som følge av posisjonen forteller nemlig at vannpartiklene vil bevege seg i elliptiske baner med konstante fokuspunkt (hvilket betyr at netto bevegelse over n antall perioder er lik null). På dypt vann vil både den horisontale og vertikale hastighetskomponenten avta eksponentielt med dybden, slik at dyptvannsbølgene ikke merkes ved bunnen av vannvolumet. På dypt vann vil også vannpartiklenes generelt elliptiske baner være sirkulære. For gruntvannsbølger vil den horisontale hastighetskomponenten være uavhengig av dybden, mens den vertikale hastighetskomponenten er lineært avhengig av dybden slik at vertikalbevegelsen ved bunnen av vannvolumet er null.

Oppsett

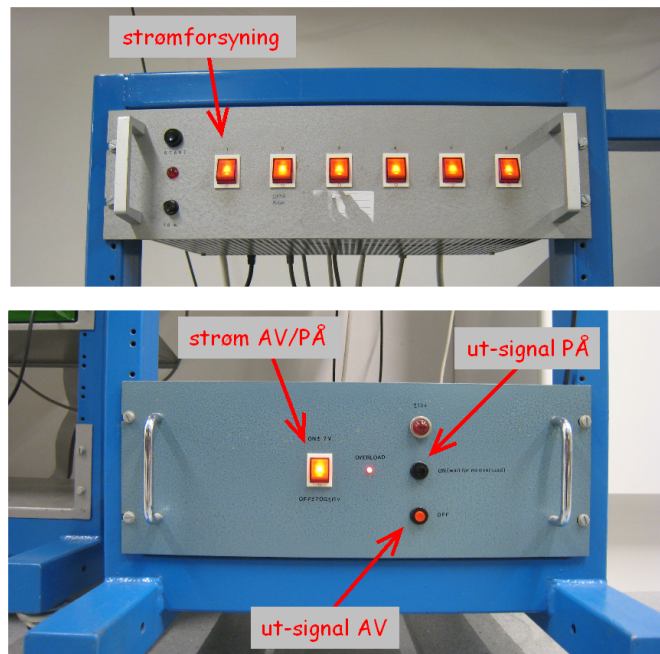
Før bølgerenna brukes, må den fylles med vann, hvilket er relativt tidkrevende. Vannbølger genereres deretter ved hjelp av en signalgenerator og en motor. Oppsettet med signalgeneratoren styres fra boksen vist på Figur 1, og den tilhørende strømforsyningstyringen er vist på Figur 2. Amplitude-



Figur 1: Kontrolldisplay for signalgenerering. Når du skal sjekke eller endre frekvensen og amplituden, trykker du 'meny'-valget, og deretter trykker du på de svarte displayknappene merket med 'frekvens' og 'amplitude' på figuren. Skriv inn ønsket frekvens (i Hz) og amplitude (i V), og trykk 'start' for å starte generatoren. For å stoppe signalet, trykk 'stopp' og deretter trykk 0°-valget som vil komme opp som valget for den svarte displayknappen markert med 'frekvens' på figuren.

og frekvensjusteringer utføres ved å trykke på 'Meny' knappen på boksen i Figur 1, og deretter ved å velge for eksempel 'Freq' for frekvensjustering. Typisk hensiktsmessige frekvenser vil ligge i området fra omtrent 0.5 Hz til

1.7 Hz (skriv inn 0.5 eller 1.7 i talldisplayet). Amplituden kan typisk settes til cirka 300 mV (skriv inn 0.3 i talldisplayet).



Figur 2: Strømforsyning for generering av bølger på renna. Øverst vises hovedstrømforsyningen. Når denne er på, kan man sku på boksen vist på det nederste bildet, der signalet gjøres tilgjengelig for motoren i bølgerenna når den svarte knappen trykkes inn. Husk alltid å kutte dette signalet ved å trykke inn den røde knappen før strømmen skrues av.

Ting du kan prøve ut

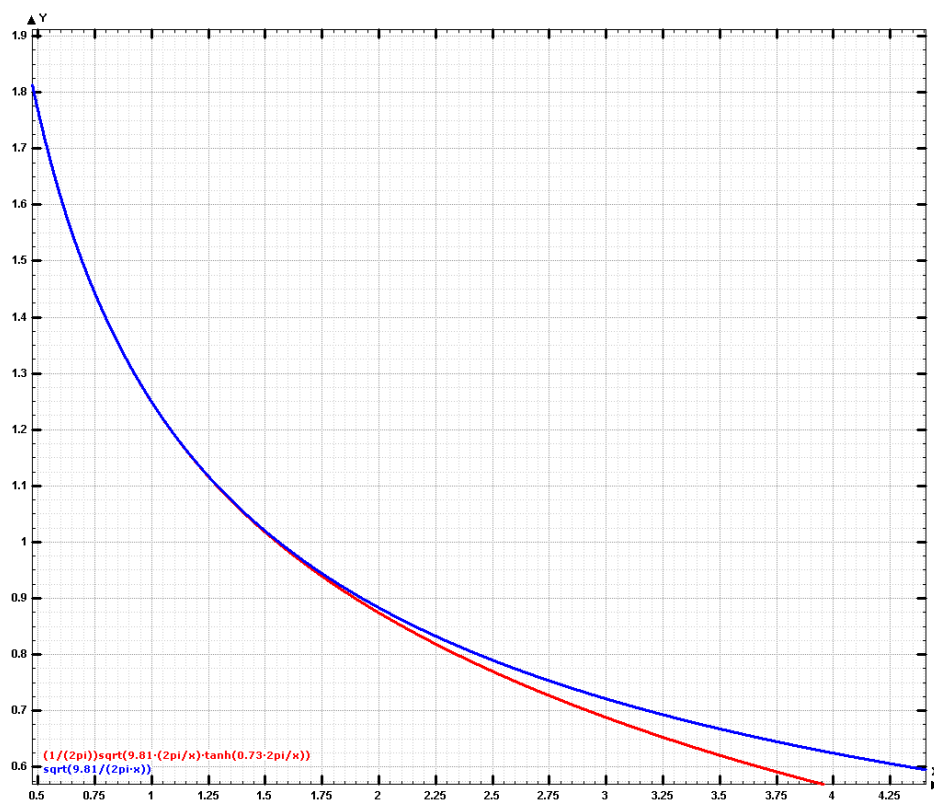
Sett frekvensen til 1.2 Hz og amplituden til 300 mV. Start signalgeneratoren og observer hvor fort en bølgetopp beveger seg i forhold til hvor fort overgangen mellom stille vann og bølgefronten propagerer forover i bølgerenna. Du vil da oppdage at en bølgetopp beveger seg hurtigere enn selve bølgefronten. Du kan relatere dette til hva du vet om fasefarten og gruppefarten til dyptvannsbølger. Prøv også å justere frekvensen moderat opp og ned. Dersom du lar vannet kommet til ro mellom hver frekvensjustering, kan du prøve å måle med stoppeklokka hvor lang tid det tar fra du starter signalgeneratoren til bølgefronten når grunna ved 10 m-merket. Du vil da i essens studere gruppefarten til bølgene. Kan du se noen sammenheng mellom frekvensen og gruppefarten?

Du kan også plassere den hvite isoporkula på vannet og observere hvordan kula beveger seg. Bevegelsen vil se omtrent ut som en sirkulær bevegelse overlagt en lineær bevegelse i bølgenes propageringsretning. Den sirkulære bevegelsen illustrerer bevegelsen til vannmolekylene i renna. Den lineære bevegelsen viser at vannbølgen har et moment i foroverretningen som delvis overføres til kula. Dersom du observerer formen på bølgene i renna som funksjon av forholdet mellom bølgeamplituden A og bølgelengden λ , vil du også kunne se at når amplituden er liten i forhold til bølgelengden så er bølgene med god tilnærming sinusformede, mens når amplituden er større og bølgelengden relativt sett mindre, så blir bølgene betraktelig spissere.

Når du har fått et kvalitativt innblikk i hvordan bølgene ser ut og brer seg fremover i renna, kan du undersøke perioden, fasefarten og gruppefarten til bølgene nærmere. Stopp generatoren og la vannoverflaten komme til ro mens du setter generatoren til for eksempel 1.5 Hz og 300 mV. Sett så igang en stoppeklokke når du slår på signalgeneratoren og stopp klokken når bølgefronten når enden av bølgerenna (med enden av bølgerenna mener vi her idelt sett 10 m-merket). Du kan nå regne ut gruppefarten til bølgene ved å dele lengden av renna på tiden det tok fra du slo på generatoren til bølgefronten nådde 10 m-merket. Når du har regnet ut gruppefarten, kan du observere bølgetoppene som passerer ett gitt punkt på bølgerenna. Sett igang stoppeklokken når en bølgetopp passerer dette punktet, og la et gitt antall topper passere dette punktet før du stopper klokken. Du kan nå bestemme frekvensen til bølgen du observerte ved å dele antall topper du observerte på tiden du leser av på stoppeklokka. Sjekk at frekvensen stemmer overrens med frekvensen på signalgeneratoren. Prøv også å bestemme bølgelengden. Dette kan lettest gjøre hvis to studenter følger to nabo-topper med hånden. Når en av studentene sier stopp, stopper begge to, og avstanden mellom hendene deres er da bølgens lengde. Fasefarten til bølgekomponenten kan deretter bestemmes gjennom uttrykket $v = \omega/k = \lambda/T = \lambda f$. Sjekk om denne fasefarten stemmer overrens med fasefarten $v = \sqrt{g/k} = \sqrt{g\lambda/2\pi} = g/2\pi f$ som forventes utifra dyptvannstilnærmelsen. Du kan videre undersøke om dyptvannstilnærmelsen bør være gyldig for bølgene dine ved å måle vanndybden og sjekke hvorvidt $d > \lambda/2$.

Når du har blitt kjent med hvordan fasefarten og gruppefarten til vannbølgene i renna manifesterer seg, kan du undersøke kortere bølgepakker eller pulser. Du kan lage en slik puls ved å la signalgeneratoren stå på over kun et lite antall perioder. Om du igjen setter generatorfrekvensen til 1.2 Hz kan du la generatoren stå på i for eksempel litt over tre sekunder, som utgjør cirka fire perioder av generatorens sinussignal. Observer bølgepakken som propagerer bortover renna. Følg den siste genererte bølgen og se hvordan denne beveger seg gjennom bølgepakken mens nye topper dannes i bakkant. En del av stu-

dentene kan deretter fokusere på ett gitt punkt på renna mens de teller hvor mange bølgetopper som passerer dette punktet fra pulsen ankommer til den har passert. Den andre andelen studenter får i oppgave å telle hvor mange topper bølgepakken har ved ett gitt tidspunkt. Dersom noen har med seg for eksempel et mobilkamera, kan det være lettere å telle toppene dersom en tar et bilde av bølgene på renna, og dermed får et bilde av bølgepakken ved ett gitt tidspunkt. Når man sammenligner hvor mange topper de to studentgruppene har observert, skal studentene som telte topper som passerte ett gitt punkt ha observert cirka dobbelt så mange topper som studentene som telte antall topper ved ett gitt tidspunkt.



Figur 3: Graf over dispersjonsrelasjonen fra ligning 1 i rødt for en vanndybde $d = 0.73$ m, der bølgelengden $\lambda = 2\pi/k$ i m leses av på x -aksen og den korresponderende frekvensen $f = \omega/2\pi$ i Hz på y -aksen. Den blå grafen viser dyptvannstilnærmelsen. Fra figuren ser vi spesielt at frekvenser på respektivt 0.6 Hz, 0.9 Hz, 1.2 Hz og 1.5 Hz korresponderer i følge den røde grafen med bølgelengder på omtrent 3.7 m, 1.9 m, 1.1 m og 0.7 m. Fasefarten $v = \lambda f$ er dermed gitt som 2.2 m/s, 1.7 m/s, 1.3 m/s og 1.1 m/s. Vi ser at dyptvannstilnærmelsen er best for høye frekvenser, som korresponderer med mindre bølgelengder, hvilket er naturlig.