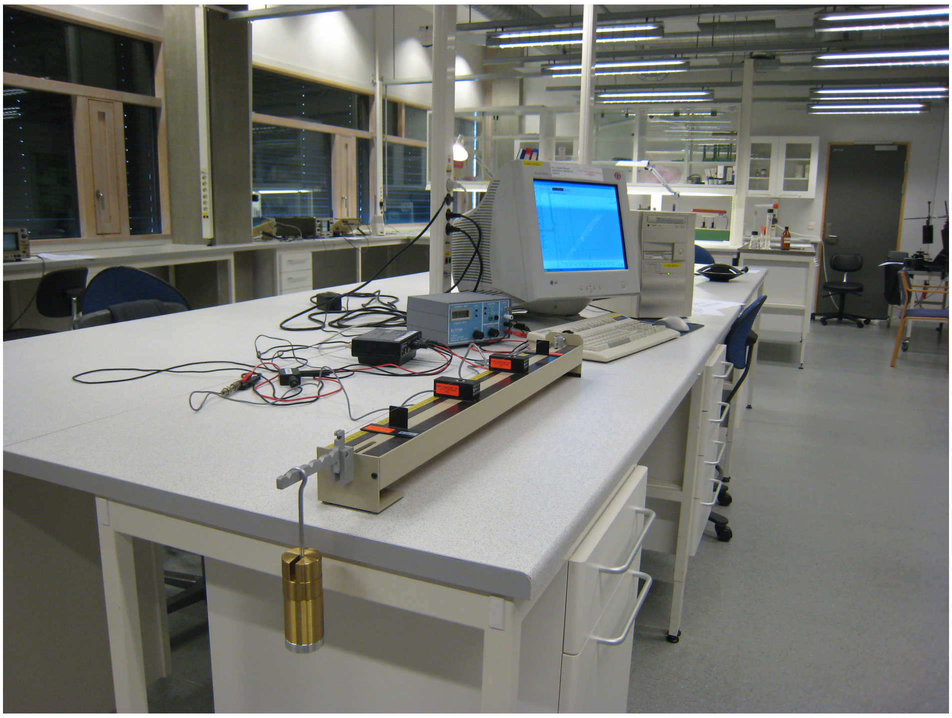
Gitarstrengfrekvenser og Fourierspektra



Hensikt

Oppsettet vist på bildet gir deg mulighet til leke med Fourierspektra og en gitarstreng. Gitarstrengen kan eksiteres enten ved at du klimprer på den som på en normal gitar, eller ved at du genererer et elektrisk signal som skaper et varierende magnetfelt som så induserer mekaniske svingninger på den metalliske strengen. Lyden som produseres som funksjon av gitarstrengens vibrasjon kan så taes inn via en lydtrykkssensor og en analog-til-digital omformer på en datamaskin. På datamaskinen finnes det et program som du deretter kan bruke til å analysere frekvensinnholdet i lyden du detekterte.

Bakgrunnsteori

Vi skal nå kort se på hva en Fouriertransform er, slik at det blir mulig å tolke de resultatene som vi oppnår i oppsettet med gitarstrengen når vi Fouriertransformerer vårt detekterte signal på datamaskinen. For de som skulle ønske en kort repetisjon angående stående bølger på streng, så finnes enkel bakgrunnsteori for dette tilgjengelig i labteksten som omhandler den svingende strengen. I denne teksten begynner vi med å se på den kontinuerlige Fouriertransformen $F(\omega)$ av en funksjon $f(t)$. $F(\omega)$ er da relatert til $f(t)$ via følgende uttrykk:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t)dt \tag{1}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(i\omega t)d\omega \tag{2}$$

Vi ser på et eksempel der $f(t)$ er en cosinusfunksjon:

$$f(t) = \cos(\omega_0 t) \tag{3}$$

Vi finner Fouriertransformen til denne funksjonen[1]:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t)\exp(-i\omega t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)}{2}\right)\exp(-i\omega t)dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(\omega-\omega_0)t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(\omega+\omega_0)t)dt\right) \\ &= \frac{1}{2}\,2\pi\left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right) \\ &= \pi\left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Fouriertransformen $F(\omega)$ til $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ er altså summen av et deltafunksjonsbidrag $\delta(\omega - \omega_0)$ i $\omega = \omega_0$ og et deltafunksjonsbidrag $\delta(\omega + \omega_0)$ i $\omega = -\omega_0$. Dersom funksjonen vår $f(t)$ hadde vært en sum av cosinusfunksjoner med frekvenser ω_n, så ville Fouriertransformen $F(\omega)$ ha deltafunksjonsbidrag i alle $\omega = \pm\omega_n$.

Utifra dette er det naturlig å forvente at den Fouriertransformerte av det detekterte lydsingalet vårt fra gitarstrengen, vil være en funksjon $F(\omega)$ med

[1] Tilleggsinfo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega' t)\exp(-i\omega t)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(\omega-\omega')t)d\omega = 2\pi\delta(\omega-\omega')$$

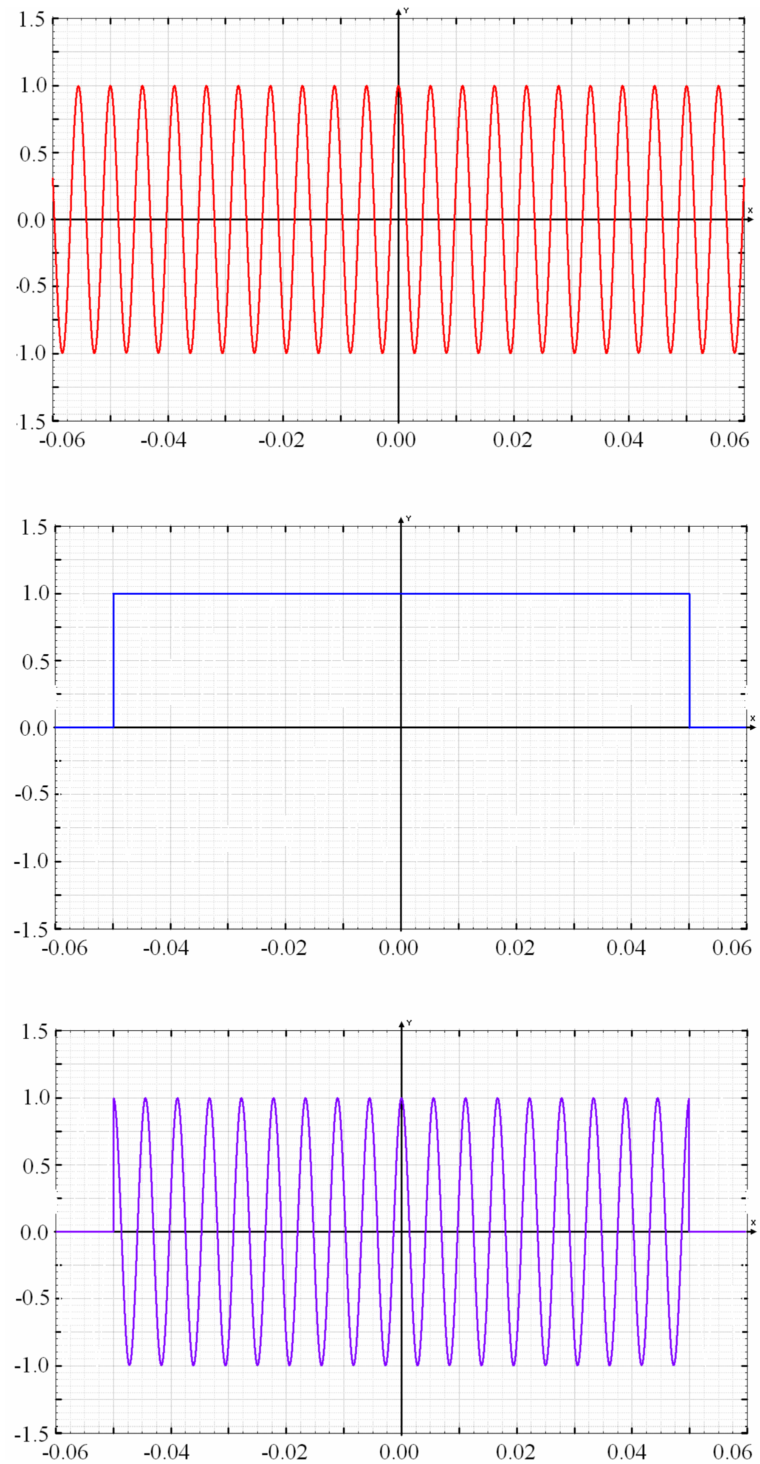
deltafunksjonsbidrag i alle ω tilsvarende vinkelfrekvensene til de stående bølgene på strengen. Dette er imidlertid en sannhet med visse modifikasjoner. For å illustrere én av grunnene til dette, skal vi først finne Fouriertransformen til en rektangulær puls $h(t) = \mathrm{rect}(t/\tau)$. Denne pulsen er lik 1 når $-\tau/2 < t < \tau/2$, og null ellers. Vi får altså at Fouriertransformen er gitt som:

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(t/\tau)\exp(-i\omega t)dt \\
&= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(-i\omega t)dt \\
&= \left[\frac{1}{-i\omega}\exp(-i\omega t)\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} \\
&= \frac{1}{-i\omega}\left(\exp(-i\omega\tau/2) - \exp(i\omega\tau/2)\right) \\
&= \frac{2\sin(\omega\tau/2)}{\omega} \\
&= \tau\,\mathrm{sinc}(\omega\tau/2)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Vi tenker oss nå at vi måler et cosinussignal. Vi vil i realiteten da bare måle over ett visst antall perioder (og ikke nødvendigvis et helt antall perioder heller). Dette er illustrert i den nederste grafen på Figur 1, der grafen $g(t)$ til signalet vi tenker oss at vi måler er gitt som produktet av cosinusfunksjonen $f(t)$ og den rektagulære pulsen $h(t)$. Vi skal så benytte oss av at Fouriertransformen $G(\omega)$ til produktet $g(t)$ av to funksjoner $f(t)$ og $h(t)$ er gitt som konvolusjonen $G(\omega) = F(\omega) * H(\omega)$ av deres Fouriertransformerte. Fouriertransformen av $g(t)$ blir dermed:

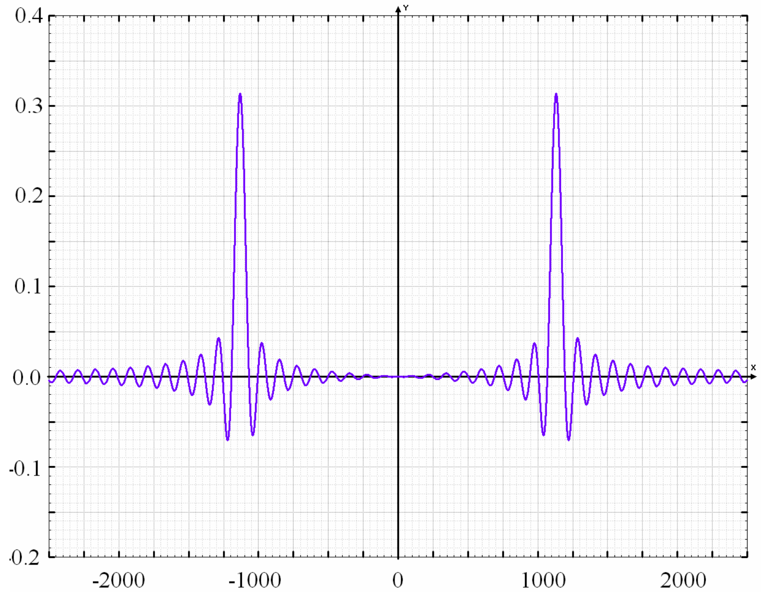
$$
\begin{aligned}
G(\omega) &= F(\omega) * H(\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \pi\left(\delta(\omega-\omega_0-\omega') + \delta(\omega+\omega_0-\omega')\right)\tau\,\mathrm{sinc}(\omega'\tau/2)d\omega' \\
&= \pi\tau\left(\mathrm{sinc}((\omega-\omega_0)\tau/2) + \mathrm{sinc}((\omega+\omega_0)\tau/2)\right)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Vi har altså funnet at Fouriertransformen $G(\omega)$ til den avkuttede cosinusfunksjonen $g(t)$ består av summen av to sinc-funksjoner sentrert i $\omega = \omega_0$ og $\omega = -\omega_0$. Vi ser på et eksempel med en tidsvarierende cosinusfunksjon $f(t) = \cos(2\pi \cdot 180t)$ med en frekvens $f = 180$ Hz $= \omega_0/2\pi$. Vi lar det rektangulære tidsvinduet vårt ha en periode på $\tau = 0.1$ s, se Figur 1. Den resulterende $G(\omega)$ er plottet på Figur 2. Fra denne figuren kan vi trekke flere konklusjoner. Vi ser at effekten av at vi betrakter cosinussignalet over et endelig tidsintervall, er at Fouriertransformen $G(\omega)$ er kontinuerlig, det vil si har bidrag ikke bare ved isolerte ω. Vi ser dessuten at bidraget sentrert rundt den negative frekvenskomponenten lekker over i det positive frekvensområdet. Dette kan føre til at maksimumspunktene for $G(\omega)$ ikke inntreffer



Figur 1: Grafen til $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ i rødt med $\omega_0 = 2\pi \cdot 180$ Hz og grafen til $h(t) = \mathrm{rect}(t/\tau)$ med $\tau = 0.1$ s i blått. Produktet $g(t) = f(t) \cdot h(t)$ er vist i lilla og representerer et cosinussignal som måles fra $t = -0.05$ s til $t = 0.05$ s.

nøyaktig ved $\pm\omega_0$. Denne effekten blir større jo flere frekvenskomponenter vi har til stedet i signalet vårt og jo kortere tidsintervall vi måler over. Legg i midlertid merke til at det ikke er Fouriertransformasjonen vår det er noe 'galt' med. $G(\omega)$ er en nøyaktig representasjon av det tidsbegrensede cosinussignalet. 'Problemet' ligger i at vi i vårt tilfelle ikke egentlig er interessert i å finne frekvensspektret til det tidsbegrensede signalet $g(t)$, men til det (bare teoretisk realiserbare) uendelige signalet $f(t)$.



Figur 2: Grafen til $G(\omega)$.

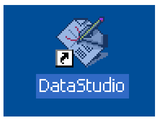
Du har kanskje lagt merke til at vi opp til nå, bare har snakket om kontinuerlige signaler? Både $f(t)$, $h(t)$ og $g(t)$ er tidskontinuerlige funksjoner, det vil si er definert for alle t. Signalet som vi faktisk Fouriertransformerer på datamaskinen i oppsettet med gitarstrengen, vil i midlertid være et digitalisert signal. Dette betyr i realiteten at vi har et sett med diskrete målepunkter som representerer signalet vårt. Vi skal ikke gå nærmere inn på Fourierteorien for diskrete signaler. For vår del holder det å vite at det er nødvendig med tilstrekkelig mange målepunkter for at det digitaliserte signalet skal være en god representasjon av lyden generert av den vibrerende gitarstrengen. Merk også at Fouriertransformasjonen av det digitaliserte signalet er en såkalt FFT, eller Fast Fourier Transform, som er en vidt brukt metode for å evaluere frekvensinnholdet i digitaliserte signaler.

Oppsett

Oppsettet med gitarstrengen og tilbehør består per høsten 2008 av følgende komponenter:

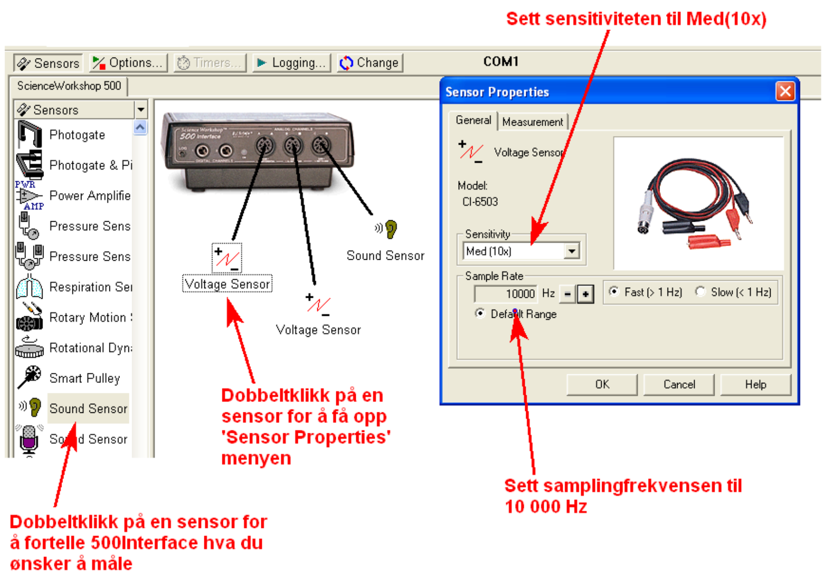
- Et sonometer (det vil se gitarstrengen og armen den er montert på, inkludert tilhørende vektlodd)
- Pasco Scientific Driver
- Pasco Scientific Detector
- Pasco Scientific Digital Function Generator – Amplifier
- Pasco Scientific Science Workshop 500 Interface (analog-til-digital omformer)
- Datamaskin med programmet DataStudio installert

Det følger dessuten med diverse ledninger, og er nødvendig med standard stikkontakt strømforsyning til signalgeneratoren, datamaskinen og analog-til-digital omformeren, som har en 9 V adaptor tilkoblet.

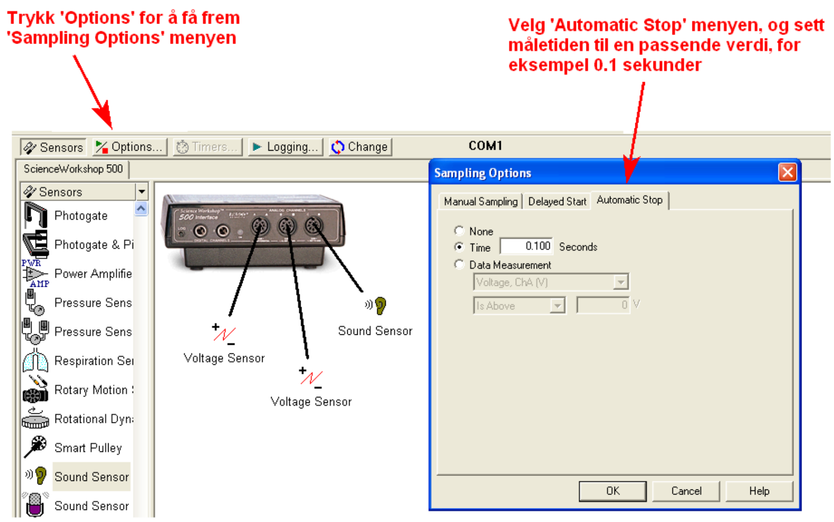


Programmet som brukes for å styre datainnhenting og -prosessering kalles DataStudio. Når du åpner programmet kommer det opp en meny med fire valg som spør deg om hvordan du vil bruke programmet. Velg 'Create Experiment'. Programmet vil da lete etter en analog-til-digital omformer. Når 500Interface er funnet, vil en menyboks med bilde av omformeren komme opp. Dersom maskinen ikke finner omformeren, lønner det seg å lukke programmet, slå av og på omformeren, og starte programmet på nytt.

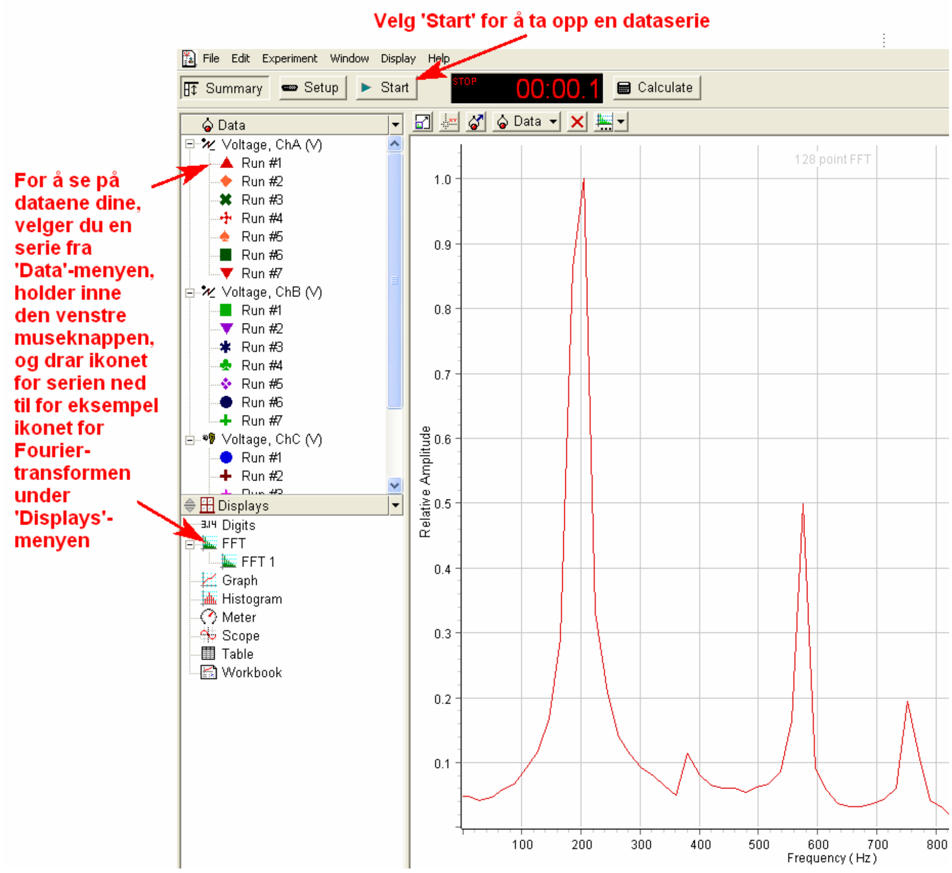
Du må så fortelle DataStudio hvilke sensorer du har koblet til 500Interface. Dette gjøres ved å dobbeltklikke på riktig type sensor i menyen til venstre for bildet av omformeren. Vi pleier å ha det målte lydtrykksignalet som et 'Voltage'-signal på kanal A, og signalet som måles direkte fra generatoren som et 'Voltage'-signal på kanal B. Kanal C er koblet til en lydtrykksensor som har en frekvensavhengig sensitivitet som etterligner følsomheten til menneskets hørselssans. Ikonet for denne sensoren er merket med et øre. Når du har lagt til de tre sensorene, vil de komme opp som ikoner på bildet av omformeren.



Om du så klikker på et av disse ikonene, vil du få opp 'Sensor Properties'-menyen, der du blant annet kan sette samplingfrekvensen og forsterkningen. Det kan være lurt å hver gang sjekke samplingfrekvensen før du tar opp en dataserie, da det ofte hender at samplingfrekvensen tilbakestiller seg til en annen verdi enn 10000 Hz, som er den frekvensen vi vanligvis bruker, etter at en serie er blitt tatt opp. For å bestemme hvor lang hver måleserie skal være, klikker du på 'Options'-menyen som finnes oppe til venstre for bildet av omformeren. Det er passende med noen tidels sekunder som angitt måletid.



Når du har gjort dette, er oppsettet klart til å gjøre målinger. For å ta opp en dataserie, klikker du på 'Start'-knappen som befinner seg øverst til venstre i programdisplayet. Når en dataserie er tatt opp, legges den til under 'Data'-menyen til venstre i programdisplayet. For å se på en dataserie, markerer du ikonet for dataserien og holder inne den venstre museknappen mens du drar ikonet ned til en av menyvalgene under 'Display'-menyen. Du kan velge 'Graph' for å se på amplituden til det digitaliserte signalet som funksjon av tiden. Dersom du drar dataserieikonet ned til FFT-menyvalget, vil du få opp Fourierspektret til signalet du valgte.



Ting du kan prøve ut

Det første du kan prøve ut er å eksitere gitarstrengen ved å klimpre på den. Ta opp lyden som genereres og se på signalet ved å dra dataikonet fra riktig meny (normalt 'Voltage, ChA (V)' for Pasco Scientific detektoren montert på sonometeret) for dataserien du akkurat tok opp ned til 'Graph'-menyen. Dra så signalet ned til 'FFT'-ikonet for å studere frekvensinnholdet i lyden du detekterte. Du kan deretter prøve å eksitere gitarstrengen på samme sted, men flytte detektoren. Ser du da noen forskjell i frekvensspekteret?

Du kan så prøve å eksitere gitarstrengen ved bruk av signalgeneratoren. Fourierspektrene du fikk når du eksiterte strengen manuelt, bør gi deg noen ideer om hvilke frekvensområder det er lurt å lete etter resonanser i. Når du finner en resonsans, kan du igjen ta opp en måleserie på datamaskinen og se på frekvensinnholdet. Du kan se på både det detekterte signalet (normalt på 'Voltage, ChA (V)') og singalet fra generatoren (normalt på 'Voltage, ChB (V)'). Prøv for eksempel å identifisere grunntonen til strengen. Når du har funnet en frekvens du mener tilsvarer gitarstrengens grunntone, kan du forsøke å eksitere strengen med denne frekvensen, med driveren og detektoren plassert ulike steder på strengen. Se for deg formen på den stående bølgen som tilsvarer strengens grunntone (dersom du har litt amplitude på signalgeneratoren, kan du også se denne bølgen på strengen). Kan du finne ut hvor det er lurt å plassere driveren for å i størst mulig grad eksitere grunntonen? Hva med den første overharmoniske tonen?

Du kan også eksperimentere med ulike måletider. Gå til 'Options'-menyen og sett måletiden til for eksempel 0.1 s og ta opp en dataserie. Sett deretter måletiden til for eksempel 0.4 s og ta opp en ny serie. Sammenlig deretter frekvenspektrene til de to måleseriene. Kan du se noen forskjell mellom de to frekvensspektrene? Kan du kanskje også ut ifra bakgrunnsteorien angående Fouriertransformer, gi en kort forklaring på eventuelle forskjeller du observerer?

I tillegg til å se på signalet fra detektoren som er montert på sonometeret, kan du se på signalet detektert av lydtrykksensoren som har en frekvensavhenging respons (som normalt finnes på 'Voltage, ChC (V)' og er markert med et øre). Prøv for eksempel å plystre en tone og ta opp signalet med denne detektoren. Hvordan ser frekvensspektret til plystretonen ut? Du kan også prøve å si ulike bokstaver, og se hvordan deres frekvensspektra ser ut. Hva med om du klapper en gang i hendene?