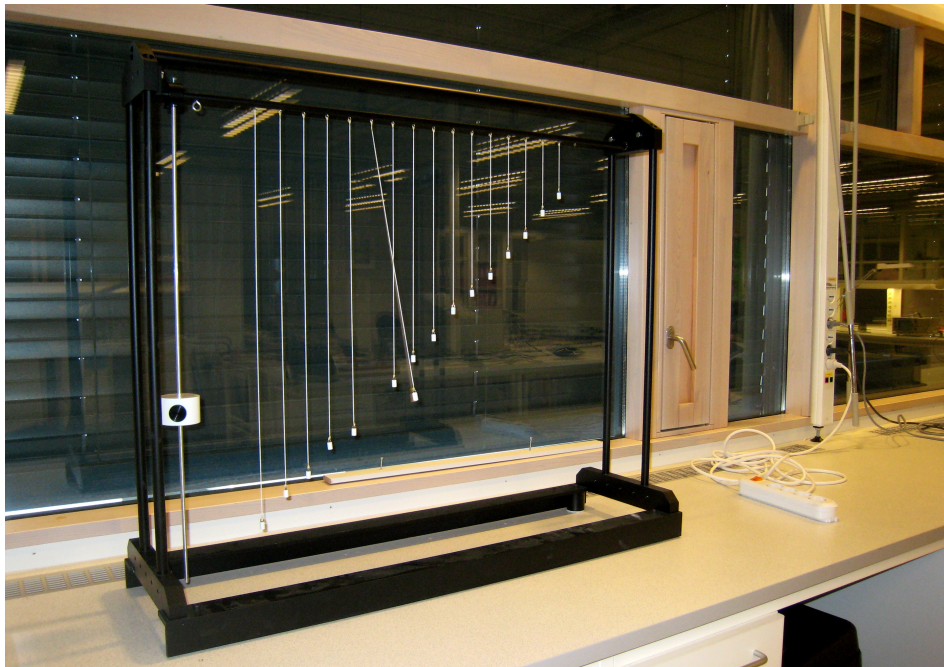


Pendler, differensialligninger og resonansfenomen

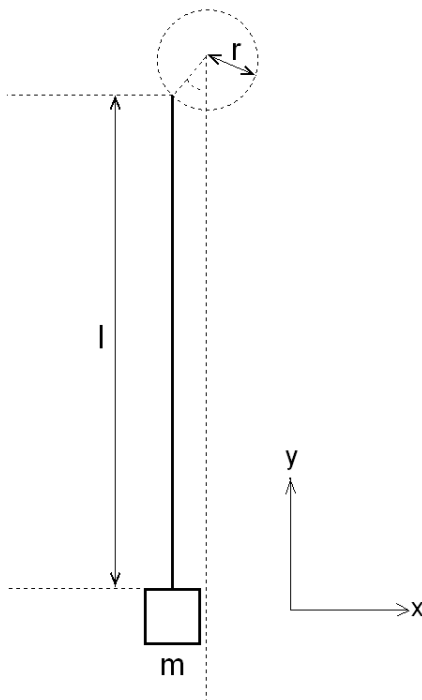


Hensikt

Oppsettet på bildet kan brukes til å illustrere ulike fenomen som opptrer i drevede svingesystemer, slik som for eksempel resonans. Labteksten til dette oppsettet omhandler kort den doble pendelen, og en drevet pendel. Vi sammenligner uttrykkene vi kommer frem til for den drevede pendelen, med den oppførselen som vi observerer i oppsettet.

Bakgrunnsteori

Systemet vi først kort skal se på i denne teoridelen, er en såkalt dobbel pendel. Den innerste pendelen er den radielle aksen til sylindren som de små loddene i oppsettet er festet til. Den ytterste pendelen er ett snor-og-lodd par. Situasjonen ved tiden $t = 0$ er illustrert i Figur 1. Denne situasjonen



Figur 1: En dobbel pendel bestående av en snor med lengde l og en masse m festet til en dreibar sylinder med radius r . Den lange sylinderaksen peker normalt på bildeplanet.

oppnår vi ved å trekke det store loddet som kontrollerer rotasjonen av festestangen i oppsettet, ut til en vinkel Θ_m . Når vi slipper denne pendelen vil den oscillere frem og tilbake. Dersom vi regner friksjonsløst, og antar at vinkelutslaget Θ_m er lite nok til at vi kan approksimere $\sin(\Theta_m) \approx \Theta_m$, får vi at den tunge pendelen vil oscillere harmonisk, med et vinkelutslag som vi kan uttrykke som:

$$\Theta = \Theta_m \cos(\sqrt{g/L} t) \quad (1)$$

Her er L lengden fra midten av festestangen til massesenteret til den tunge pendelen. Vi ser altså at perioden $P = 2\pi/\sqrt{g/l} = 2\pi\sqrt{l/g}$ er bestemt ved tyngdeakselerasjonen g og lengden L på pendelen. Vi skal så se på bevegelsen til et av snor-og-lodd parene. Vi refererer igjen til Figur 1. Vinkelen mellom sylinderens sentrum og snorfestet, vil være gitt ved vinkelutslaget Θ til den

tunge pendelen. Posisjonen til snorfestet vi da være gitt som:

$$X = r \sin(\Theta) = r \sin(\Theta_m \cos(\sqrt{g/L} t)) \quad (2)$$

$$Y = -r \cos(\Theta) = -r \cos(\Theta_m \cos(\sqrt{g/L} t)) \quad (3)$$

Vinkelen mellom snorretningen til l og y -retningen, kaller vi θ . Vi regner med at både Θ og θ er positive når vinkelutslaget er mot den positive x -retningen, og negative når utslaget er mot den negative x -retningen. Vi får da tilsvarende at posisjonen til det lille loddet med masse m er gitt som:

$$x = X + l \sin(\theta) = r \sin(\Theta_m \cos(\sqrt{g/L} t)) + l \sin(\theta) \quad (4)$$

$$y = Y - l \cos(\theta) = -r \cos(\Theta_m \cos(\sqrt{g/L} t)) - l \cos(\theta) \quad (5)$$

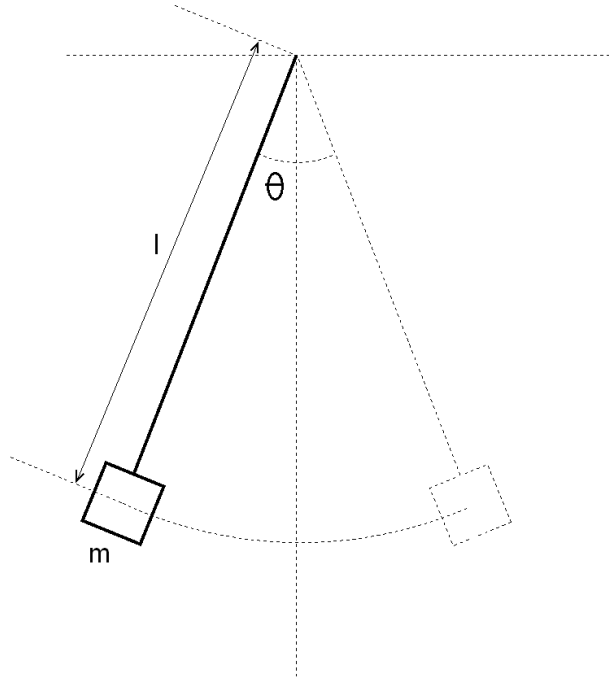
Vi kan gå videre med disse ligningene, og sette opp et uttrykk for den potensielle og kinetiske energien til pendelen, som etter litt regning vil gi oss en inhomogen, ikke-lineær differensialligning som ikke kan løses analytisk. Det tilsynelatende enkle problemet med den doble pendelen, er kjent for å kunne oppføre seg kaotisk når systemets totale energi er stor nok¹. Vi er imidlertid heldige nok til å ha en fysisk modell av dobbel-pendel systemet. Forskjellen på en klassisk dobbel pendel og vårt system er at 1) de små pendelstengene ikke er stenger, men tråder slik at bevegelse langs snoraksen er mulig, 2) vi skal bare se på små vinkelutslag, og 3) den indre pendelen er drevet av den tunge pendelen, så bevegelsen til den indre pendelen er gitt, og vil bli lite perturbert av bevegelsene til de lette pendlene.

Vi skal nå fokusere på et system som har flere likhetstrekk med den doble pendelen. Vi skal se på en dempet, drevet pendel med små vinkelutslag. Differensialligningen som bestemmer vinkelbevegelsen til en dempet, drevet pendel kan skrives som:

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + mgl \sin(\theta) = C \cos(\omega t) \quad (6)$$

Det første leddet på venstre siden gir oss pendelmassen ganger akselerasjonen tangentielt på bevegelsen, det andre leddet uttrykker dempning, og det tredje leddet uttrykker effekten av gravitasjonskraften på pendelmassen, som ønsker å bringe pendelen tilbake til posisjonen der $\theta = 0$ og pendelen henger rett ned. Dette leddet har form som dreiemomentet av tyngden rundt pendelfestet. Høyresiden er den drivende kraften, som også er et dreiemoment om pendelfestet. Vi gir denne drivkraften samme oscillasjonsfrekvens som den tunge pendelen fra ligning 1, slik at $\omega = \sqrt{g/L}$. En kort innføring i hvordan vi løser differensialligninger på denne formen, finnes i lekelabteksten 'Lysspredning', med ett viktig unntak – differensialligningen ovenfor er

¹Om du søker for eksempel Google med søkeord 'double pendulum', eller 'chaotic pendulum' vil du få opp en masse demonstrasjoner av dette.



Figur 2: En pendel.

nemlig ikke-lineær på grunn av leddet som inneholder $\sin(\theta)$. For små vinkelutslag vil imidlertid $\sin(\theta) \approx \theta$, og vi lineariserer derfor differensiallikningen vår og får da at:

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + mgl\theta = C \cos(\omega t) \quad (7)$$

Denne likningen har en generell løsning $\theta(t)$ som er en sum av en partikulærløsning $\theta_p(t)$ og en homogenløsning $\theta_h(t)$ som kan skrives på følgende vis:

$$\theta(t) = \theta_p(t) + \theta_h(t) \quad (8)$$

$$\theta_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{mgl/ml^2} \\ &= \sqrt{g/l} \end{aligned} \quad (10)$$

$$A = \frac{Cml^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(ml^2)^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (11)$$

$$B = \frac{C\gamma\omega}{(ml^2)^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (12)$$

$$\theta_h(t) = \exp(-\gamma t/2ml^2)(A' \cos(\omega' t) + B' \sin(\omega' t)) \quad (13)$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/(4(ml^2)^2)} \quad (14)$$

Vi ser altså at i starten av tidsforløpet vårt, vil $\theta(t)$ ha bidrag som oscillerer med to ulike vinkelfrekvenser, der $\omega = \sqrt{g/L}$ er vinkelfrekvensen til den drivende kraften og ω' er angitt ovenfor. På grunn av eksponentialfaktoren i $\theta_h(t)$ vil imidlertid bidraget til $\theta(t)$ fra dette leddet etter hvert dø ut, og vi sitter igjen med en bevegelse $\theta(t) = \theta_p(t)$ med en frekvens lik driverfrekvensen. Vi skal nå se litt nærmere på amplituden og fasen til $\theta_p(t)$. Vi skriver derfor om $\theta_p(t)$ til følgende form:

$$\theta_p(t) = D \cos(\omega t - \phi) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{A^2 + B^2} \\ &= \frac{C}{\sqrt{(ml^2)^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \arctan(B/A) \\ &= \arctan(\gamma\omega/(ml^2(\omega_0^2 - \omega^2))) \end{aligned} \quad (17)$$

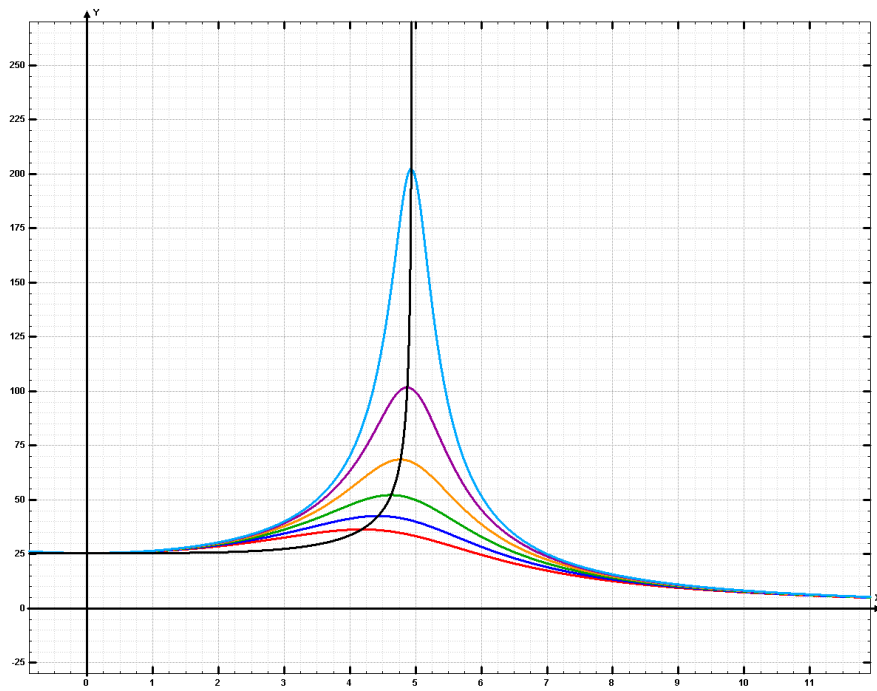
Amplitudeforholdet D/C er plottet som funksjon av ω i figur 3, for tilfellet der $m = 0.01$ kg, $l = 0.4$ m, og γ varierer. For å finne maksimalamplituden som funksjon av ω , deriverer vi D med hensyn på ω og setter den deriverte lik null. Vi får da at maksimal D forekommer når:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2(ml^2)^2} = \omega'^2 - \frac{\gamma^2}{4(ml^2)^2} \quad (18)$$

Grafen til det maksimale utslaget for D/C som funksjon av driverfrekvensen ω , er også vist på figur 3. Vi ser at jo mindre demningsfaktoren γ blir, jo større blir amplitudeforsterkningen D/C . Vi ser også at når dempningsfaktoren er liten, så inntreffer den maksimale amplitudeforsterkningen når driverfrekvensen $\omega \approx \omega_0$, hvilket er en approksimasjon som blir bedre jo mindre dempning vi har. Dersom $\gamma = 0$ får vi at den maksimale amplitudeforsterkningen inntreffer når $\omega = \omega_0$. Dette fenomenet er kjent som resonans. Vi skal så ta en kjapp titt på fasen til oscillasjonene når driverfrekvensen nærmer seg systemets udempede egenfrekvens. Fra ligning 17, ser vi at når $\omega \rightarrow \omega_0$ fra venstre, vil $\phi \rightarrow -\pi/2$, mens når $\omega \rightarrow \omega_0$ fra høyre, vil $\phi \rightarrow \pi/2$. Vi ser derfor at om vi har én pendel med $\omega_{0,1} = \omega + \delta\omega$ og en annen pendel med $\omega_{0,2} = \omega - \delta\omega$, der ω er driverfrekvensen og $\delta\omega$ er liten, så vil de to pendlene med egenfrekvenser $\omega_{0,1}$ og $\omega_{0,2}$ ha en innbyrdes faseforskjell på π radianer, og de vil altså oscillere i motfase. Vi legger også merke til at den drevede pendelen vil være faseforskjøvet $\pi/2$ i forhold til den drivende kraften.

Oppsett

Oppsettet med pendlene er vist på forsidefiguren til denne teksten.



Figur 3: Plot av amplitudeforsterkningen D/C som funksjon av driverfrekvensen ω . Her har vi satt $m = 0.01$ kg og $l = 0.4$ m, slik at $\omega_0 = \sqrt{(9.81/0.4)} \text{ rad/s} = 5 \text{ rad/s}$ og $\gamma = 0.006, 0.005, 0.004, 0.003, 0.002, 0.001 \text{ (kgm}^2/\text{s)}^2$, der den høyeste grafen korresponderer med den minste dempningsfaktoren γ . Den svarte grafen som skiller seg ut fra de andre grafene, plotter posisjonen til maksimalamplituden.

Ting du kan prøve ut

Det første du kan prøve ut i dette oppsettet er å teste effekten som pendlene med de små loddene har på den tunge pendelen. Sett i gang svingninger ved å trekke de lette pendlene ut til en gitt vinkel, og se om deres bevegelser påvirker den store pendelen i merkbar grad. Du kan deretter stoppe de lette pendlene, og trekke den tunge pendelen ut til en gitt vinkel før du slipper den slik at den begynner å oscillere. Observer hva som skjer med de små pendlene. Du vil se at bevegelsen til de små pendlene endrer seg med tiden. Til slutt vil én eller kanskje to pendler skille seg merkbart ut fra de andre. Hva er spesielt med denne eller disse pendlene? Husk på at egenfrekvensen til en udempet pendel er gitt som $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, der g er tyngdeakselerasjonen og l er pendellengden. Prøv også å justere det store pendelloddet opp og ned, og observer igjen hvilken eller hvilke pendler som beveger seg med størst utslag.

Du kan deretter prøve å plassere det tunge pendelloddet slik at du får to pendler som begge har store amplitudeutslag etter en viss tid. Observer når disse pendlene når deres maksimale vinkelutslag, og sammenlign med når den tunge pendelen er ved maks. I teoridelen fant vi at den dempede, drevede pendelen med en udempet egenfrekvens $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ litt større enn driverfrekvensen, vil oscillere i motfase med en pendel med en egenfrekvens litt mindre enn driverfrekvensen. Kan du observere dette i oppsettet? Vi fant også i teoridelen at den dempede, drevede pendelen vil nå sitt maksimale utslag med en faseforskyvning på $\pi/2$ i forhold til når driveren når sitt maksimale utslag. Det betyr at den drevede, dempede pendelen når sitt maksimale vinkelutslag når utslaget til driveren er null. Kan du observere dette i oppsettet vårt? Vær imidlertid oppmerksom på at dine observasjoner etter all sannsynlighet ikke vil stemme perfekt overrens med de forventede faseskiftene på $\pi/2$ og π , både fordi dette, selv for vårt modellsystem med den dempede, drevede pendelen, ville kreve en driverfrekvens ω midt mellom egenfrekvensene til de små pendlene, og fordi det fysiske systemet vårt ikke er en ideell dempet, drevet pendel.

Du har kanskje lagt merke til at når du setter i gang svingninger med den store pendelen, så vil i begynnelsen alle de små pendlene bevege seg med relativt store utslag? Etter en viss tid faller imidlertid de fleste pendlene mer til ro, mens én eller to pendler får kraftige utslag. Du kan relatere dette til diskusjonen fra teoridelen, der vi fant at utslaget $\theta(t)$ til en gitt drevet, dempet pendel er summen av en såkalt partikulærløsning $\theta_p(t)$ og en homogenløsning $\theta_h(t)$. Det kan være til hjelp dersom du prøver å sette igang oscillasjoner av de små pendlene ved å dra alle sammen ut til ett gitt utslag, for så å slippe de samtidig. Sammenlign bevegelsen du nå observerer med bevegelsen til pendlene i den tidlige fasen rett etter at du har

eksitert systemet ved å sette i gang svingninger av den tunge pendelen. Du vil se at oppførselen til de små pendlene er relativt lik i de to tilfellene. Var det imidlertid ikke slik at homogenløsningen $\theta_h(t)$ var en løsning av differensialligningen for en dempet pendel med en drivkraft lik null? Du kan derfor kanskje skjønne hvorfor oppførselen til pendlene for små t når pendlene drives av den tunge pendelen, er lik oppførselen til pendlene når de slippes fra et gitt utslag. I begge tilfeller ser vi i hovedsak homogenløsningen $\theta_h(t)$, så lenge ikke driverfrekvensen fra den store pendelen gjør at vi er ved resonans.