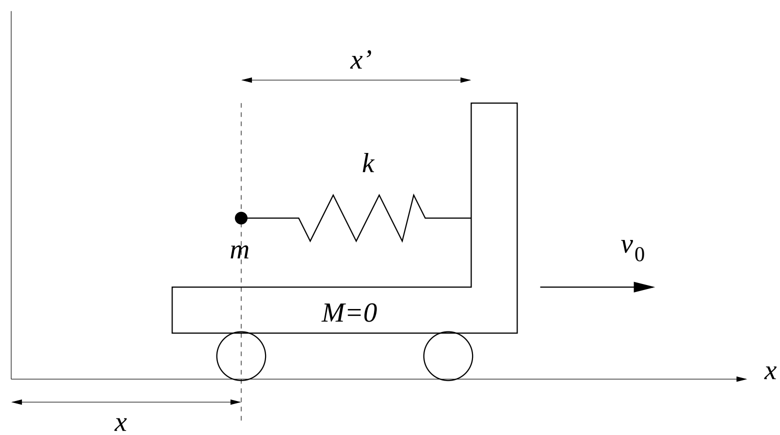
TEP4145 Klassisk mekanikk
Vår 2007

Ekstraøving, løsningsforslag

(se også Goldstein s 345-346)



a) Kinetisk energi:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Potensiell energi:

$$V = \frac{1}{2} k \left(x - v_0 t\right)^2$$

Dvs, vi har valgt $t = 0$ slik at likevektsposisjonen til m er $x_0 = 0$ ved $t = 0$, som betyr at $x_0(t) = v_0 t$. Dermed:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k \left(x - v_0 t\right)^2 = L(x, \dot{x}, t)$$

Bevegelsesligning, med tilhørende løsning:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -k(x - v_0 t) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m \dot{x} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m \ddot{x} \end{aligned}$$

Løsning: Substituer $x' = x - v_0 t$, som gir $\dot{x}' = \dot{x} - v_0$ og $\ddot{x}' = \ddot{x}$. Dermed:

$$m \ddot{x}' = -k x'$$

som har generell løsning

$$x'(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

med $\omega^2 = k/m$. Med andre ord: x' er posisjonen til m relativt til likevektsposisjonen $x_0(t) = v_0 t$, og en observatør på vogna ser en enkel harmonisk svingning, som ventet.
Energifunksjonen h_1:

$$\begin{aligned} h_1 &= \dot{x}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L \\ &= \dot{x}\cdot m\dot{x} - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\left(x - v0t\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\left(x - v0t\right)^2 \\ &= T + V \\ &= h_1(x, \dot{x}, t) \end{aligned}$$

Vi ser at $h_1 = T + V$ er systemets totale energi, men

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = -v_0 k(x - v_0 t) \neq 0$$

så h_1 er ikke bevart.
Hvorfor? Det må her være en ekstern tidsavhengig føringskraft som sørger for at vogna triller med konstant fart v_0:

$$\frac{dh_1}{dt} = -v_0 k x' = -v_0 k A\cos(\omega t + \phi)$$

som er vekselvis positiv og negativ. Dvs, den eksterne kraften utfører vekselvis et positivt og negativt arbeid på systemet slik at $v_{\text{vogn}} = v_0 = \text{konst}$.

b) Kinetisk energi:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}' + v_0\right)^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + m\dot{x}'v_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Potensiell energi.

$$V = \frac{1}{2}kx'^2$$

Lagrangefunksjonen:

$$L = L(x', \dot{x}') = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + m\dot{x}'v_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}kx'^2$$

Funksjonen h_2 blir da

$$\begin{aligned} h_2 &= \dot{x}'\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} - L \\ &= \dot{x}'\left(m\dot{x}' + mv_0\right) - L \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= h_2(x', \dot{x}') \end{aligned}$$

Her ser vi at h_2 *ikke* er total energi $T+V$. På den annen side er

$$\frac{dh_2}{dt} = 0$$

så h_2 er bevart. Dersom vi dropper det konstante leddet $-mv_0^2/2$, står vi igjen med den totale energien, relativt til vogna.

c) Vi har allerede bestemt bevegelsesligningen i punkt a. I punkt b får vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x'} &= -kx' \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} &= m\dot{x}' + mv_0 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} &= m\ddot{x}'
\end{aligned}$$

som gir

$$m\ddot{x}' = -kx'$$

dvs akkurat samme bevegelsesligning.