
Klassisk Mekanikk

...

IVER H. BREVIK

KOMPENDIUM

i faget

TEP4145

Til L^AT_EX ved Simen Ellingsen



*Institutt for Energi og Prosessteknikk,
Norges Teknisk Naturvitenskapelige Universitet*

Mars 2006

Klassisk Mekanikk

Iver H. Brevik *

2006

Innhold

1	Fundamentale prinsipper	4
1.1	Systemer med flere partikler	5
1.2	Føringer	7
1.2.1	Generaliserte koordinater	8
1.3	D'Alemberts prinsipp og Lagranges ligninger	8
1.4	Levi-Civita-symbolet	11
1.5	Generaliserte (hastighetsavhengige) potensialer	12
1.5.1	Anvendelse: Elektromagnetisk potensial	12
1.5.2	Friksjonskrefter og Rayleighs dissipasjonsfunksjon	13
1.6	Eksempler på bruk av Lagrangeformalismen	13
2	Variasjonsprinsipper og Lagranges ligninger	17
2.1	Hamiltons prinsipp	17
2.2	Lagranges ligninger fra Hamiltons prinsipp	17
2.3	Variasjonsregning	18
2.4	Hamiltons prinsipp for ikke-holonome systemer	22
2.5	Fordeler med variasjonsprinsipp	25
2.6	Bevarelsesetninger og symmetriegenskaper	25
2.6.1	Translasjon	26
2.6.2	Rotasjon	27
2.6.3	Bevarelse av energi	28
3	Hamiltons ligninger	30
3.1	Legendretransformasjoner og Hamiltons bevegelsesligninger	30
3.1.1	Hamilton vs. Lagrange	30
3.1.2	Generelt om Legendretransformasjoner	30
3.1.3	Fra Lagrange- til Hamiltonformalisme	31
4	Tølegemeproblemet; sentrale krefter	34
4.1	Reduksjon til ekvivalent ettlegemeproblem	34
4.2	Bevegelsesligningene	35
4.3	Ekvivalent éndimensjonalt problem	37
4.4	Virialteoremet	40
4.5	Keplerproblemet	43
4.5.1	Omløpstid T	45
4.5.2	Tidsutviklingen	46
4.6	Spredning i sentralt kraftfelt	47
4.6.1	Repulsiv spredning av ladde partikler i Coulombfeltet	48

*Til L^AT_EX ved Simen A. Ellingsen. Originalillustrasjoner ved Jon Andreas Støvneng, bortsett fra de to nederste figurene på side 69 og på side 107 ved Iver Brevik, og figur 19, 21 samt liten figur på s. 49 ved Simen Ellingsen

5	Stive legemers kinematikk	52
5.1	Uavhengige koordinater	52
5.2	Ortogonal transformasjoner	53
5.3	Formelle egenskaper til transformasjonsmatrisen	56
5.4	Eulervinklene	57
5.5	Infinitesimale transformasjoner	59
5.6	Tidsendring av en vektor	61
5.6.1	Komponentene $\vec{\omega}$ langs legemets akser	62
5.7	Corioliskraften	62
6	Bevegelsesligninger for stive legemer	65
6.1	Dreieimpuls og kinetisk energi	65
6.2	Eulerligningene	66
6.3	Fri rotasjon av stivt legeme; presesjon	67
7	Små oscillasjoner	74
7.1	Kort rekapitulering	74
7.2	System av koblede oscillatorer	75
7.2.1	Svingemoder	77
7.2.2	Amplituder	77
7.2.3	Minorer til systemdeterminanten	78
7.2.4	Normalkoordinater	78
7.3	Fri vibrasjoner av lineært symmetrisk treatomig molekyl	81
8	Spesiell relativitetsteori	84
8.1	Innledning	84
8.2	Lorentztransformasjonen	84
8.2.1	Einsteins addisjonsformel	87
8.2.2	Formelle egenskaper til \mathbb{L}	87
8.3	Litt om reell metrikk	88
8.4	Kovariant firedimensjonal formulering	90
8.4.1	Firerhastighet	93
8.4.2	Firerstrømtetthet	93
8.4.3	Maxwells ligninger og firerpotensial	94
8.5	Relativistisk mekanikk	96
8.6	Relativistisk kinematikk	99
8.6.1	Relativistisk felttensor	102
9	Kanoniske transformasjoner	104
9.1	Transformasjon av faserommet	104
9.1.1	Alternativ 1: $F = F_1(q, Q, t)$	105
9.1.2	Alternativ 2: $F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i$	105
9.1.3	Alternativ 3: $F = q_i p_i + F_3(p, Q, t)$	106
9.1.4	Alternativ 4: $F = q_i p_i - Q_i P_i + F_4(p, P, t)$	106
9.2	Poissonklammer	108
9.2.1	Sammenheng med kvantemekanikken	108
9.2.2	Jacobis identitet og Poissons teorem	109
9.2.3	Kanonisk transformasjon av Poissonklammer	110
9.2.4	Liouvilles teorem	110
9.3	Hamilton-Jacobi-teori	111

1 Fundamentale prinsipper

Vi definerer først noen grunnleggende størrelser:

- Hastighetsvektor: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
- Lineær impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$
- Total kraft: \vec{F} (gravitasjon, elektrodynamisk, etc.)
- Dreieimpuls omkring origo: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.
- Kraftmoment omkring origo: $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Vi husker fra mekanikken at Newtons 2. lov,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (1.1)$$

gjelder i **inertialsystemer**. Hvis massen m er konstant, kan eq. (1.1) skrives på formen:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Motsatt kan vi også si at dersom Newtons 2. lov gjelder, har vi et inertialsystem (=Galileisk system). Vi husker videre at vi har bevaringslover for henholdsvis lineær impuls og dreieimpuls:

Hvis $\vec{F} = 0$, er \vec{p} bevart.

Hvis $\vec{N} = 0$, er \vec{L} bevart.

Med definisjonen av kraftmomentet ovenfor får vi nå at

$$\begin{aligned} \vec{N} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \frac{d\vec{L}}{dt} - \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{=0} \\ &= \frac{d\vec{L}}{dt}. \end{aligned}$$

Som vi ser, er dette resultatet helt analogt med Newtons 2. lov som vi hadde for translasjon.

Arbeidet som utføres av en ytre kraft \vec{F} på partikkelen når denne beveger seg fra 1 til 2 er gitt ved

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (1.2)$$

Anta at $m = \text{konstant}$:



Figur 1:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \int \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d}{dt} v^2 dt$$

Dette gir:

$$W_{12} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1, \quad (1.3)$$

det vil si at arbeidet på partikkelen fra 1 til 2 er lik endringen i partikkelens kinetiske energi. Vi har et **konservativt system** dersom W_{12} er den samme for *alle* mulige veier fra 1 til 2. Matematisk kan dette uttrykkes slik:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0, \quad \text{eller} \quad (1.4)$$

$$\vec{F} = -\nabla V(\vec{r}), \quad (1.5)$$

der V generelt er en funksjon av posisjonen \vec{r} (den potensielle energien). Vi ser at eq. (1.4) utelukker at et system med friksjon kan være konservativt; ettersom friksjonskraften virker motsatt bevegelsesretningen, vil hele tiden $\vec{F} \cdot d\vec{s} > 0$. Nullnivået for funksjonen V er vilkårlig. For et konservativt system har vi altså fra eq. (1.4), (1.2) og (1.3) at

$$\left. \begin{aligned} W_{12} &= V_1 - V_2 \\ W_{12} &= T_2 - T_1 \end{aligned} \right\} \implies T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Det betyr at:

For et konservativt system er total partikkelenergi $T + V$ bevart.

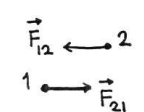
(1.6)

1.1 Systemer med flere partikler

For partikkel i skriver vi Newtons 2. lov som:

$$\sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)} = \dot{\vec{p}}_i,$$

der $\vec{F}_i^{(e)}$ er ytre kraft på partikkel i og \vec{F}_{ji} er indre kraft fra partikkel j ($\vec{F}_{ii} = 0$). Vi antar at \vec{F}_{ji} oppfyller Newtons 3. lov:



Kreftene to partikler utøver på hverandre er like store og motsatt rettet

(“Svak lov om aksjon og reaksjon”)

(1.7)

Summerer over alle partikler i :

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{(e)}}_{=\vec{F}^{(e)}} + \underbrace{\sum_{i,j;i \neq j} \vec{F}_{ji}}_{=0}$$

Impulsbevarelse

Vi definerer posisjonen til **massesenteret**, \vec{R} (massesenter forkortes gjerne med CM - “centre of mass”):

$$\vec{R} \equiv \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (1.8)$$

og får:

$$M \frac{d^2}{dt^2} \vec{R} = \vec{F}^{(e)}, \quad (1.9)$$

dvs. CM beveger seg som om all masse var konsentrert i CM. Vi har over definert den totale massen som $M \equiv \sum_i m_i$. Den totale impulsen er nå gitt ved

$$\vec{P} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = M \frac{d\vec{R}}{dt}.$$

Vi sammenligner med ligningene vi hadde for én partikkel, og får bevaringsloven for total impuls:

$$\text{Hvis } \vec{F}^{(e)} = 0, \text{ er } \vec{P} \text{ bevart.} \quad (1.10)$$

Merk at bevaringsloven for total impuls krever svak lov om aksjon og reaksjon.

Dreieimpulsbevarelse

Vi skriver den totale dreieimpulsen som vi har sett:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

så

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i,$$

siden $\sum_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \frac{1}{m_i} \vec{p}_i \times \vec{p}_i = 0$. Innsetting i Newtons 2. lov, $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ij}$, gir

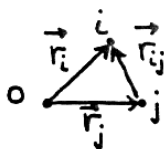
$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j;i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}$$

Siste ledd kan skrives som sum over et par av formen

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji},$$

fordi $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$. Med $\vec{r}_i - \vec{r}_j \equiv \vec{r}_{ij}$ kan vi skrive

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}^{(e)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j;i \neq j} \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ji}$$



Hvis indre kraft mellom i og j ligger langs forbindelseslinjen, altså at vi har sentrale krefter (“sterk lov om aksjon og reaksjon”), vil alle $\vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} = 0$, slik at

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)}; \quad \vec{N}^{(e)} = \text{ytre dreiemoment.} \quad (1.11)$$

Dermed finner vi bevaringsloven for total dreieimpuls: Vi sammenligner med ligningene vi hadde for én partikkel, og får bevaringsloven for total impuls:

$$\text{Hvis } \vec{N}^{(e)} = 0, \text{ er } \vec{L} \text{ bevart.} \quad (1.12)$$

Merk at bevaringsloven for total impuls forutsetter sentrale krefter.

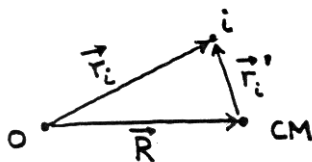
Vi ser av figur 2 at vi kan skrive om \vec{L} ved å sette $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$ og $\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}'_i$:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}'_i) \times m_i (\vec{v} + \vec{v}'_i) \\ &= \sum_i \vec{R} \times m_i \vec{v} + \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i + \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{v}'_i \right)}_{=0} \times \vec{v} + \vec{R} \times \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}'_i}_{=0} \end{aligned}$$

gir

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{v} + \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i.$$

Av dette ser vi at dreieimpulsen om origo er lik dreieimpulsen av systemet konsentrert i CM pluss dreieimpulsen omkring CM. Dersom \vec{R} ligger fast i forhold til origo ($\vec{v} = 0$), er \vec{L} lik dreieimpulsen omkring CM og uavhengig av referansepunktet.

Figur 2: Omskriving av \vec{L}

Energi

Vi husker uttrykket for arbeidet som utføres når et system flyttes fra 1 til 2 (ligning 1.2):

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{s}_i + \sum_{i,j;i \neq j} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i.$$

La oss se på venstre side av denne ligningen der vi setter $\vec{F}_i = m_i \dot{\vec{v}}_i$ og $d\vec{s}_i = \vec{v}_i dt$:

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{v}_i dt = \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = T_2 - T_1,$$

som før! Vi har brukt det velkjente $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$. Vi kan igjen dele opp i en “massesenterdel” og en “indre del” (som vist i figur 2):

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v} + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v} + \vec{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \vec{v} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}'_i}_{=0} \end{aligned}$$

endelig:

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 \quad (1.13)$$

1.2 Føringer

Føringer er betingelser som definerer rammene for systemet vi betrakter.



Figur 3: Eksempler på føringer

Vi ønsker å uttrykke systemets føringer matematisk. I denne forbindelse skiller vi mellom to klasser av føringer:

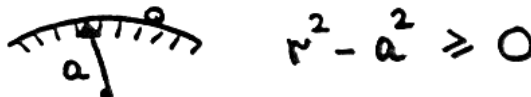
- **Holonome føringer** er føringer som kan uttrykkes matematisk på formen

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = 0.$$

Eksempel: et fast legeme der avstanden mellom to punkter i legemet er konstant:

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$$

- **Ikke-holonome føringer** lar seg ikke skrive på formen ovenfor. Eksempel: partikkel som beveger seg i området omkring en hard kule:



Videre klassifiserer vi føringer med hensyn til tidsavhengighet:

- **Rheonome føringer** er tidsavhengige.
- **Skleronome føringer** er tidsuavhengige.

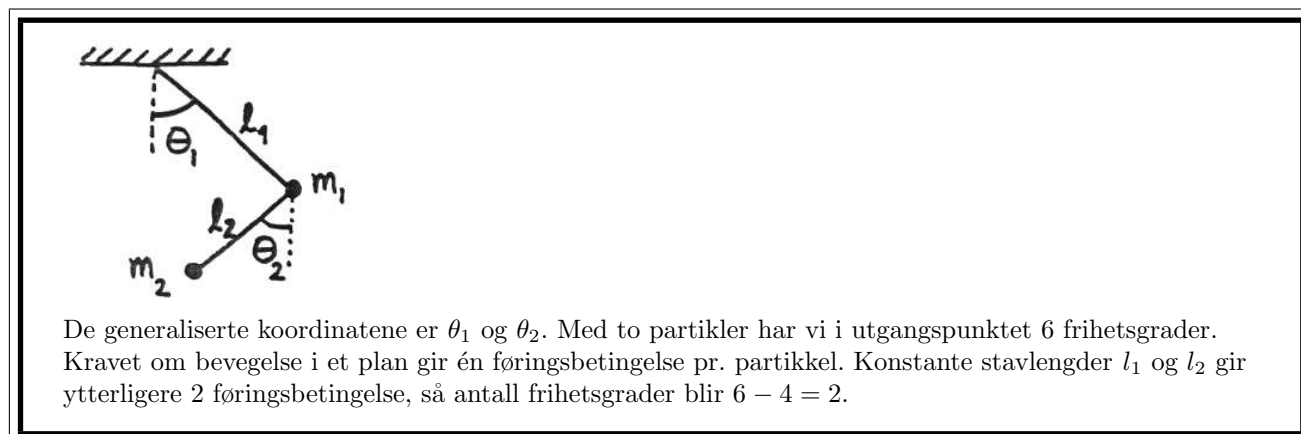
1.2.1 Generaliserte koordinater

Vi vet at N partikler har $3N$ uavhengige koordinater, eventuelt $3N$ **frihetsgrader**. Med k holonome føringsbetingelser fås $3N - k$ frihetsgrader. Vi innfører da nye og uavhengige koordinater $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$ slik at

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \\ &\vdots \\ \vec{r}_N &= \vec{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \end{aligned}$$

Føringsbetingelsene er nå implisitt inneholdt i transformasjonsligningene som transformerer det ene settet med koordinater til det andre.

Eksempel: Dobbeltpendel med bevegelse i et plan



1.3 D'Alemberts prinsipp og Lagranges ligninger

Vi begynner med å innføre begrepet **virtuell forskyvning**: en infinitesimal forskyvning av systemets koordinater, $\delta\vec{r}_i$, i overensstemmelse med eventuelle føringsbetingelser. Krefter og føringsbetingelser endres derfor ikke av virtuelle forskyvninger (ta også gjerne en titt på figur 5 på side 18).

Vi betrakter et system som vi antar er i **likevekt**, dvs. at alle $\vec{F}_i = 0$. Dermed gjelder naturligvis også at $\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$. Vi spalter så \vec{F}_i i en påtrykt kraft $\vec{F}_i^{(a)}$ (a for "applied"), og en føringskraft \vec{f}_i og får:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0.$$

Vi begrenser oss nå til kun å se på systemer som oppfyller

$$\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1.14)$$

Dette er ikke en så streng restriksjon som det kan virke som. Sammenligner en med definisjonen (1.2) av arbeid, ser en at (1.14) er ekvivalent med at føringskreftene ikke gjør noe arbeid på systemet, oppfylt for alle føringskrefter som virker normalt på bevegelsen. Kravet gjelder for eksempel også føringer som beskriver punkter i stive legemer. (1.14) er imidlertid *ikke* oppfylt for systemer med friksjonskrefter som gjør arbeid på systemet. Med antagelsen (1.14) får vi “prinsippet om virtuelt arbeid”:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.15)$$

Merk at generelt er $\vec{F}_i^{(a)} \neq 0$ siden $\delta \vec{r}_i$ på grunn av føringsbetingelser generelt ikke alle er uavhengige.

Vi ser så på et **system i bevegelse** som oppfyller Newtons 2. lov for hver komponent, $\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0$. Dette er analogt med det statiske tilfellet ovenfor dersom vi betrakter $-\dot{\vec{p}}$ som en “effektiv motkraft”. På samme måte som før skriver vi

$$\sum_i (\vec{F} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i + \underbrace{\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i}_{\text{antas } = 0} = 0$$

Dette kalles **D’Alemberts prinsipp**:

$$\boxed{\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0} \quad (1.16)$$

Vi har med dette oppnådd å eliminere føringskreftene. Dermed kan vi fra nå av droppe indeksen (a).

Vi antar nå at vi har å gjøre med et holonomt system og innfører uavhengige koordinater $\{q_i\}$ slik at $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, og ved å bruke kjerneregelen for derivasjon skriver vi hastigheten \vec{v}_i :

$$\vec{v}_i \equiv \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \vec{v}_i(q, \dot{q}, t)$$

Den virtuelle forskyvningen skriver vi

$$\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Merk at δt ikke er involvert her. Virtuelt forskyvning gjelder kun koordinatene q_i , der vi har “frosset” tiden.

Vi betrakter første ledd i D’Alemberts prinsipp:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \equiv \sum_j Q_j \delta q_j,$$

der vi har definert den **generaliserte kraft**,

$$Q_j \equiv \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (1.17)$$

Deretter ser vi på andre ledd:

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Her er

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right].$$

Vi kan bytte om d/dt og $\partial/\partial q_j$ i siste ledd:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} \\ \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d \vec{r}_i}{dt} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{v}_i = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

Av dette ser vi at

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d \vec{r}_i}{dt} \quad \text{og} \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (1.19)$$

Vi setter dette inn i andre ledd i D'Alemberts prinsipp som omformet ovenfor og får:

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right] \\ &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j},\end{aligned}$$

der $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ er systemets kinetiske energi.

Dermed kan vi skrive D'Alemberts prinsipp slik:

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0$$

Antagelsen om holonome føringsbetingelser medfører at alle δq_j er uavhengige. Dermed gjelder relasjonen over for hver enkelt j (ikke bare for summen over j), og vi får et sett av 2.ordens ligninger:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (1.20)$$

Disse kalles ofte Lagranges ligninger, men det er vanligst å reservere denne betegnelsen for konservative systemer, det vil si der kraften kan uttrykkes

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V$$

Det gir at

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Innsatt i (1.20):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0$$

Potensialet $V = V(q_i)$ er ikke avhengig av generaliserte hastigheter \dot{q}_i , så

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j}.$$

Vi definerer **Lagrangefunksjonen**

$$\boxed{L \equiv T - V}, \quad (1.21)$$

setter inn i (1.20) og får **Lagranges ligninger**:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (1.22)$$

Merk at (1.22) forutsetter holonomt og konservativt system.

Vi merker oss videre at L ikke er entydig; en alternativ funksjon $L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} F(q, t)$ for en vilkårlig funksjon $F(q, t)$ gir nøyaktig samme ligninger som L (du kan selv sette inn i utledningen over og se at dette følger av at vi ikke tillater variasjon i banens endepunkter).

Kommentar til utledningen ovenfor: Vi startet med et ønske om å eliminere føringskreftene fra bevegelsesligningene. Dette har vi oppnådd. I tillegg har vi endt opp med *enklere* ligninger som kun involverer *skalare* funksjoner, T og V , i motsetning til utgangspunktet som involverte *vektorer*, \vec{F}_i og \vec{r}_i .

1.4 Levi-Civita-symbolet

Før vi går videre, introduserer vi et nyttig verktøy når en arbeider med vektorer og tensorer; det såkalte Levi-Civita-symbolet ϵ_{ijk} . Dette symbolet har følgende egenskaper:

- antisymmetrisk i alle indekser (dvs. ϵ_{ijk} skifter fortegn når to indekser bytter plass).
- lik null når to eller flere indekser er like
- $\epsilon_{ijk} = +1$ når ijk er sykliske (f.eks. $\epsilon_{123} = 1$)
- $\epsilon_{ijk} = -1$ når ijk er antisykliske (f.eks. $\epsilon_{132} = -1$)

Levi-Civita-symbolet er i matematisk forstand en pseudotensor, en generalisering av en aksial vektor. Ved en koordinattransformasjon vil en pseudotensor multipliseres med transformasjonsdeterminanten (dette vil bli bedre kjent for dem som senere ser nærmere på klassisk feltteori).

Vi kan bruke Levi-Civita-symbolet til vektoralgebra. Vi antar i det videre summekonvensjon (dvs. det summeres over gjentatte indekser). I de følgende eksempler noterer vi vektorer med nummererte indekser slik at $(x, y, z) \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$ og en vektor \vec{A} har i denne notasjonen komponentene (A_1, A_2, A_3) . Denne vektornotasjonen skal bli særlig nyttig i relativitetsteorien senere. Eksempler:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{B} \times \vec{C} : & A_i &= \epsilon_{ijk} B_j C_k \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} : & B_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j A_k = \epsilon_{ijk} A_{k,j} \end{aligned} \quad (1.23)$$

der vi også har innført enda litt ny notasjon for å redusere mengden skrivning:

$$\begin{aligned} \partial_j &\equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \\ A_{k,j} &\equiv \partial_j A_k. \end{aligned}$$

Vi har videre for ϵ_{ijk} at

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (1.24)$$

Eksempel

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= (\vec{A} \times \vec{B})_i (\vec{C} \times \vec{D})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \epsilon_{ilm} C_l D_m \\ &= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) A_j B_k C_l D_m \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \end{aligned}$$

1.5 Generaliserte (hastighetsavhengige) potensialer

Vi skal se at Lagranges ligninger også kan benyttes for enkelte ikke-holonome systemer. Vi antar at vi har med et hastighetsavhengig potensial $U(q_j, \dot{q}_j)$ å gjøre og definerer Lagrangefunksjonen som tidligere: $L = T - U$. Dersom vi kan skrive den generaliserte kraften Q_j på formen

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}, \quad (1.25)$$

får Lagranges ligninger uforandret form. $U(q, \dot{q})$ kalles et **generalisert potensial**.

1.5.1 Anvendelse: Elektromagnetisk potensial

Som et viktig eksempel på generaliserte potensialer ser vi på et elektromagnetisk potensial. Fra elektromagnetismen husker vi Maxwells ligninger (i SI-enheter):

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Lorentzkraften:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

Relasjonen $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ er automatisk oppfylt dersom vi skriver \vec{B} som "curl" til et vektorpotensial, ettersom vi husker fra barnelærdommen at divergensen til curlen til enhver vektor alltid er null:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Innsatt i Maxwells ligninger gir dette den nye ligningen:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Etttersom vi har fra matematikken at curl til en gradient alltid er null, skriver vi

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi,$$

der φ er en skalar funksjon. Vi kan nå uttrykke Lorentzkraften ved \vec{A} og φ :

$$\vec{F} = q \left[-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \nabla \times \vec{A} \right].$$

Det er nå hensiktsmessig å ta i bruk vektornotasjonen med indekser slik vi innførte dem i forrige avsnitt. Ved å bruke (1.23), (1.24) og at $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$ skriver vi:

$$\begin{aligned} \left[\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) \right]_i &= \epsilon_{ijk} v_j (\nabla \times \vec{A})_k = \epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \partial_l A_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \partial_l A_m \\ &= v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i \end{aligned}$$

og setter inn i Lorentzkraften:

$$\begin{aligned} F_i &= q \left[-\partial_i \varphi + \partial_i \vec{v} \cdot \vec{A} - \frac{dA_i}{dt} \right] \\ &= q \left[-\partial_i (\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} (\vec{A} \cdot \vec{v}) \right] \\ &= -\partial_i U + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_i}, \end{aligned}$$

der

$$U = U(x_i, v_i) = q\varphi - q\vec{A} \cdot \vec{v} \quad (1.26)$$

Merk at vi har brukt at

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\underbrace{q\varphi}_{=0} - q\vec{A} \cdot \vec{v} \right) = - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} q\vec{A} \cdot \vec{v}$$

Vi har nå funnet Lagrangefunksjonen for ladet partikkel i elektromagnetisk felt :

$$L = T - U = T - q\varphi + q\vec{A} \cdot \vec{v} \quad (1.27)$$

1.5.2 Friksjonskrefter og Rayleighs dissipasjonsfunksjon

Vi har sett at Lagranges ligninger for et holonomt system alltid kan skrives på formen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i,$$

der L inneholder potensialet fra konservative krefter mens Q_i er kreftene som *ikke* kan avledes fra et potensial. Et typisk eksempel er friksjonskrefter. Som regel er friksjonskraften F_f proporsjonal med hastigheten v til en partikkel:

$$F_{fx} = -k_x v_x, \text{ evt.} \\ F_{fx} = - \frac{\partial}{\partial v_x} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right).$$

I 3 dimensjoner kan vi skrive

$$\vec{F}_f = -\nabla_v \mathcal{F}, \quad (1.28)$$

der \mathcal{F} er Rayleighs dissipasjonsfunksjon definert ved:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2)$$

Arbeidet utført av systemet mot friksjon:

$$dW = -\vec{F}_f \cdot d\vec{r} = -\vec{F}_f \cdot \vec{v} dt = (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2) dt = 2\mathcal{F} dt.$$

Det vil si at

$$\text{Raten for energitap pga. friksjon er } 2\mathcal{F}. \quad (1.29)$$

Generalisert friksjonskraft skrives

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_{if} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}$$

Lagranges ligninger blir nå:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (1.30)$$

Vi må altså kjenne to skalare funksjoner, L og \mathcal{F} , for å finne bevegelsesligningene for systemet.

1.6 Eksempler på bruk av Lagrangeformalismen

Vi skal se på tre eksempler på hvordan Lagrangeformalismen er et kraftig verktøy for å beskrive fysiske systemer.

a: Én partikkel, kartesiske koordinater

Vi beskriver en fri partikkel hvis posisjon er gitt ved kartesiske koordinater (x, y, z) . Kinetisk energi er gitt ved

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

så

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \end{aligned}$$

Bevegelsesligninger er gitt ved Lagrangeligningene (1.20):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

der $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$ og $Q_i = F_i$, som er kraften som virker på partikkelen (f.eks. fra et ytre potensial). Innsatt gir dette:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z,$$

som vi gjenkjenner som Newtons 2. lov! Du kan selv sjekke at dersom F_i er konservative krefter, dvs. $F_i = -\partial V/\partial q_i$, får vi det samme resultatet dersom vi setter Lagrangefunksjonen $L = T - V$ inn i ligningene (1.22).

b: Én partikkel, plane polarkoordinater

Vi beskriver nå partikkelens bevegelser ved polarkoordinater, dvs. at de kartesiske koordinatene transformeres slik:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \{q_i\} = \{r, \theta\}.$$

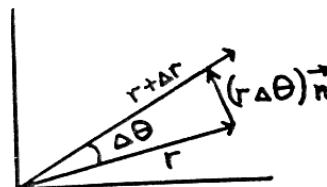
Hastigheter:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta, \end{aligned}$$

så kinetisk energi blir

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Dette kunne vi også sett av geometrien i problemet:



$$\begin{aligned} \text{Radiell hastighet:} & \quad \frac{\Delta r}{\Delta t} \rightarrow \frac{dr}{dt} = \dot{r} \\ \text{Asimutal hastighet:} & \quad \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow r \frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \end{aligned}$$

De generaliserte kraftkomponentene er $Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$. I polarkoordinater:

$$\begin{aligned} Q_r &= \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{F} \cdot \hat{r} = F_r \\ Q_\theta &= \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \vec{F} \cdot r\hat{n} = rF_\theta \end{aligned}$$

To generaliserte koordinater gir to Lagrangeligninger; vi finner de partiellderiverte:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r},$$

videre

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta},$$

og vi får Lagrangeligningene (med $q_1 = r$ og $q_2 = \theta$):

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= F_r \\ mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} &= rF_\theta. \end{aligned}$$

Her kjenner vi igjen $r\dot{\theta}^2$ som sentripetalakselerasjon.

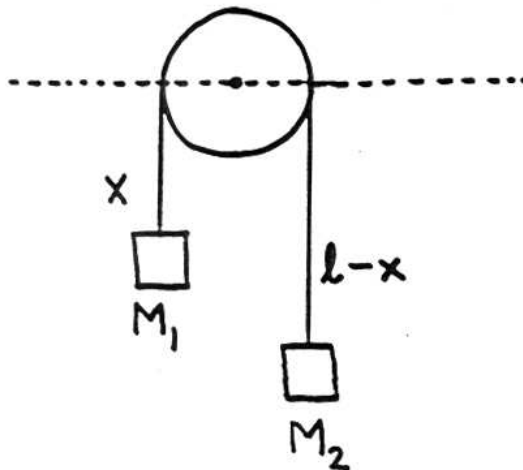
Vi kan sette inn kjente uttrykk for \vec{L} og \vec{N} ,

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L = rp_\theta = rmv_\theta = rmr\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta} \\ \vec{N} &= \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow N = rF_\theta, \end{aligned}$$

og Lagrangeligningen i $q_2 = \theta$ får den (forhåpentligvis) velkjente formen

$$\frac{dL}{dt} = N.$$

c: Atwoods maskin



Et typisk eksempel på et enkelt fysisk system som godt lar seg beskrive ved Lagrangeformalismen, er den såkalte Atwoods maskin (se figuren). Som figuren indikerer, har systemet kun én uavhengig koordinat: x . Vi velger nullnivå for potensiell energi ved den stiplede linjen i figuren og finner:

$$\text{Potensiell energi: } V = -M_1gx - M_2g(l - x)$$

$$\text{Kinetisk energi: } T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2,$$

så Lagrangefunksjonen blir

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2 + M_1gx + M_2g(l - x).$$

Relevante partiellderiverte:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 - M_2)g, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\dot{x},$$

gir Lagrangeligningen

$$\begin{aligned} (M_1 + M_2)\ddot{x} &= (M_1 - M_2)g \\ \downarrow \\ \ddot{x} &= \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}g, \end{aligned}$$

som vi vel nærmest kunne sett direkte.

Merk at føringskreftene (strekket i snoren) ikke forekommer i den Lagrangeske formuleringen; de er implisitt med i definisjonen av de uavhengige koordinatene (her koordinaten x). Vi kan dermed heller ikke bestemme snorstrekket direkte kun ved bruk av Lagranges metode.

2 Variasjonsprinsipper og Lagranges ligninger

2.1 Hamiltons prinsipp

Vi har til nå utledet Lagranges ligninger fra et “differensielt” prinsipp, ved å se på små virtuelle forskyvninger fra en gitt tilstand. Lagranges ligninger kan også utledes fra et “integralprinsipp” (evt. globalt prinsipp) ved å se på små variasjoner i hele bevegelsen mellom tider t_1 og t_2 .

La oss presisere utsagnet “systemets bevegelse mellom t_1 og t_2 ”:

Konfigurasjonsrommet dannes av aksene til de n generaliserte koordinatene $q_1 \cdots q_n$ ($n = 3N - k$).

Posisjonen/tilstanden til hele systemet er ved gitt tid t gitt ved *ett* punkt i konfigurasjonsrommet.

“Systemets bevegelse” er beskrevet ved en kurve i konfigurasjonsrommet der hvert punkt på kurven representerer *hele* systemets konfigurasjon ved et bestemt tidspunkt.

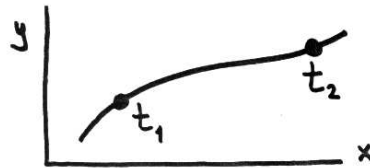
Hamiltons prinsipp:

Systemet beveger seg fra t_1 til t_2 slik at

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (2.1)$$

har et ekstremum (stasjonær verdi) for den virkelige veien.

Her er $L = T - V = L(q, \dot{q}, t)$, og integralet I kalles **virkningsintegralet** eller **virkingen**. Systemet er konservativt dersom $V = V(q)$, men Hamiltons prinsipp gjelder også i mer generelle tilfeller der $V \rightarrow U = U(q, \dot{q}, t)$ dersom $Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}$. Slike systemer kalles **monogeniske**.



Figur 4: (x, y) er fikserte ved t_1 og t_2 . t er en *parameter* for banen i konfigurasjonsrommet.

Hamiltons prinsipp kan uttrykkes slik:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1 \cdots q_n, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_n, t) dt = 0. \quad (2.2)$$

Vi skal se at Lagranges ligninger følger av Hamiltons prinsipp.

2.2 Lagranges ligninger fra Hamiltons prinsipp

Anta først at vi har én frihetsgrad, $q = q(t)$.

De forskjellige kurvene parametriseres ved en parameter α slik at $\alpha = 0$ tilsvarende ekstremum av I . Dermed kan vi skrive

$$q(t, \alpha) = q(t, 0) + \alpha \eta(t),$$

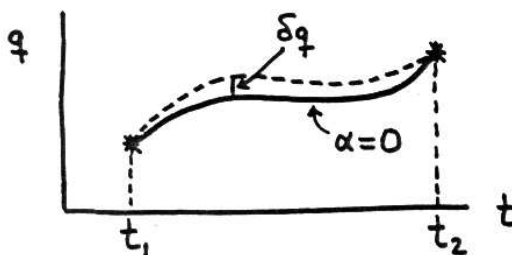
der $\eta(t)$ er vilkårlig, men oppfyller at $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Virkingen skriver vi nå:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L[q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t] dt.$$

Vi er interesserte i virtuelle variasjoner for en *fast* t :

$$\delta q = \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha$$

$$\delta \dot{q} = \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha.$$



Figur 5: Partikkelbane fra 1 til 2

Variasjonen av I blir nå

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt.$$

Vi kan bytte om på δ og $\frac{d}{dt}$ i siste ledd fordi:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{q} &= \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha = \frac{\partial^2 q}{\partial \alpha \partial t} d\alpha \\ \frac{d}{dt} \delta q &= \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha = \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial \alpha} d\alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$$

At $\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial \alpha}$ er innlysende her, ettersom det ikke er andre koordinater, men vi ser at det også må gjelde for flere koordinater dersom settet av koordinater q er uavhengige (dvs. $q_i = q_i(t)$). Vi skal siden generalisere til flere koordinater. Med dette får vi:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt + \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q dt. \end{aligned}$$

Ifølge Hamiltons prinsipp, skal vi ha $\delta I = 0$, og ettersom δq er vilkårlig, følger det at

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

En direkte generalisering til mange frihetsgrader, $i = 1, \dots, n$ gir

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0, \quad (2.3)$$

som medfører at

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

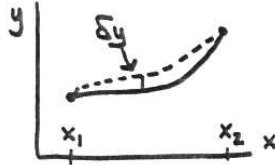
som er Lagranges ligninger. Vi har sett at resultatet krever uavhengige koordinater, altså holonome føringer. Det gjelder for konservative systemer og for ikke-konservative systemer dersom $Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}$, $L = T - U$.

2.3 Variasjonsregning

Anta en kurve $y(x)$ mellom $y_1 = y(x_1)$ og $y_2 = y(x_2)$ og la $y' = \frac{dy}{dx}$ (i *Goldstein* brukes \dot{y} , men vi reserverer dette til kun å gjelde $\frac{dy}{dt}$). Vi ønsker å finne ekstremalverdien av integralet

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx,$$

der $f(y, y', x)$ er en funksjon definert på kurven $y(x)$. Dette er det samme som å finne den kurven $y(x)$ som gir $\delta I = 0$. Vi får samme type regning som i foregående avsnitt.



$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right] dx = 0.$$

Som før kan vi bytte om δ og $\frac{d}{dx}$ i siste ledd: $\delta y' = \frac{d}{dx} \delta y$, dermed

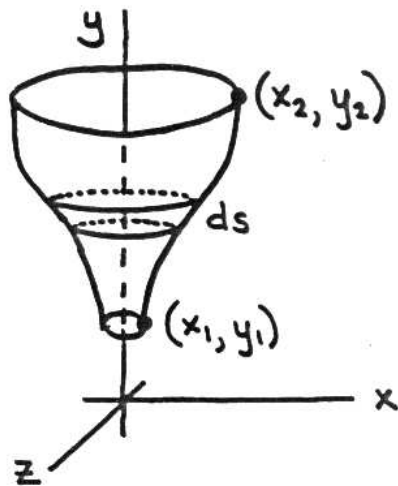
$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y \right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx + \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx = 0 \end{aligned}$$

Siden δy er vilkårlig, får vi:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0} \quad (2.4)$$

Disse kalles **Euler-Lagrangeligningene** eller oftest bare **Eulers ligninger**.

Eksempel: Minimum omdreiningsflate



La oss betrakte en eller annen kurve mellom to fikserte punkter, (x_1, y_1) og (x_2, y_2) , som vi dreier om y -aksen. Vi skal finne den kurven $y(x)$ som gjør at omdreiningsflaten får minimum areal. Arealet av en stripe av overflaten er

$$ds = 2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

som gir arealet

$$A = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx,$$

med $f(y, y', x) = x\sqrt{1 + y'^2}$. Derivatene er

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

så

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \quad \text{ved Euler-Lagranges ligning.}$$

Løsning:

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = a = \text{konst.} \Rightarrow x^2 y'^2 = a^2 (1 + y'^2) \Rightarrow y'^2 (x^2 - a^2) = a^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

gir standardintegralet

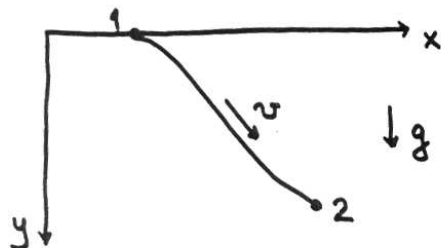
$$y = a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = a \cdot \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} + b,$$

alternativt

$$x = a \cdot \cosh \frac{y - b}{a}.$$

Betingelsene $y_1 = y(x_1)$ og $y_2 = y(x_2)$ fastlegger integrasjonskonstantene a og b .

Eksempel: Brachistochroneproblemet



Vi skal finne den kurven mellom de to punktene 1 og 2 som er slik at tilbakelagt tid for en partikkel som sklir langs banen akselerert av tyngdefeltet blir minimal. Vi antar her null utgangshastighet, dvs. partikkelen begynner i ro fra punkt 1. Minimal tid vil si at

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v}$$

skal ha et minimum. Energibevarelse gir at total energi hele tiden er null (idet vi velger null potensiell energi i 1):

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \implies v = \sqrt{2gy}$$

Integralet blir

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_1^2 f(y, y', x) dx \quad \text{med } f(y, y', x) = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

De deriverte

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}},$$

gir oss Euler-Lagrange-ligningen

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

Vi skriver ut andre ledd:

$$\frac{y''}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2}{2y^{3/2}\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2 y''}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Vi tar så med første ledd og setter $y^{-1/2}(1+y'^2)^{-1/2}$ utenfor:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} \left[\frac{1+y'^2}{2y} + y'' - \frac{y'^2}{2y} - \frac{y'^2 y''}{1+y'^2} \right] &= 0 \\ \implies \frac{1}{2y} + \frac{y''(1+y'^2) - y'^2 y''}{1+y'^2} &= 0 \\ \implies \frac{1}{2y} + \frac{y''}{1+y'^2} &= 0 && | \cdot y' \\ \implies \frac{y'}{2y} + \frac{y' y''}{1+y'^2} &= 0 \\ \implies \frac{1}{2}(\ln y)' + \frac{1}{2} [\ln(1+y'^2)]' &= 0 \\ \implies \left\{ \ln[y(1+y'^2)] \right\}' &= 0 \\ \implies \ln[y(1+y'^2)] &= \text{konst.} \\ \implies y(1+y'^2) &= \text{konst.} \equiv 2k \end{aligned}$$

Vi gjør så en ansatz om at vi kan bruke følgende parameterfremstilling:

$$x = k(\theta - \sin \theta); \quad y = k(1 - \cos \theta)$$

Brachistochroneproblemet fortsetter...

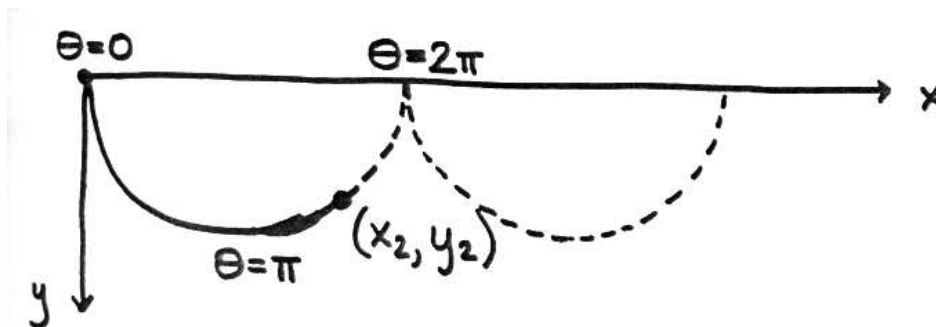
fortsettelse...

Parametriseringen gir $y'(\theta)$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{k \sin \theta d\theta}{k(1 - \cos \theta)d\theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \\ \Rightarrow 1 + y'^2 &= \frac{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} = \frac{1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{(1 - \cos^2 \theta)^2} = \frac{2}{1 - \cos \theta} \\ \Rightarrow y(1 + y'^2) &= k(1 - \cos \theta) \frac{2}{1 - \cos \theta} = 2k, \end{aligned}$$

så vi ser at parametriseringen stemmer!

Hvis partikkelen begynner i origo med null utgangshastighet ser banen (som gitt ved parametriseringen) slik ut:



2.4 Hamiltons prinsipp for ikke-holonome systemer

Vi har til nå forutsatt holonome føringer som kan uttrykkes $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$. Vi kunne da med j holonome føringer, innføre $n = 3N - j$ generaliserte koordinater q_k som alle er **uavhengige**. Hamiltons prinsipp,

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0,$$

som ledet frem til

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k = 0, \quad (2.5)$$

og som med uavhengige δq_k gav oss Lagranges ligninger, $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ der $k = 1, 2, \dots, n$.

For **ikke-holonome** systemer er ikke alle δq_k uavhengige, så vi kan ikke uten videre bruke Hamiltons prinsipp. Vi skal imidlertid se at vi kan formulere en utgave av prinsippet for visse ikke-holonome systemer.

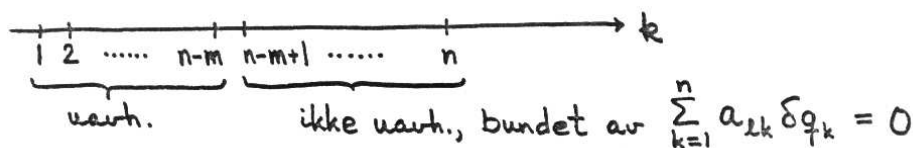
La oss anta at vårt system beskrevet av n koordinater (vi antar at alle holonome føringer allerede er innbakt i disse) har m ikke-holonome føringer. Vi ser kun på systemer der våre ikke-holonome føringer kan skrives

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} dq_k + a_{lt} dt = 0; \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

eventuelt

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} \dot{q}_k + a_{lt} = 0; \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (2.6)$$

Deler vi (2.6) med dt , ser vi umiddelbart at dette er det samme som at de ikke-holonome føringene må kunne skrives som en sum av første ordens ledd av hastigheter. Koeffisientene a_{lk} og a_{lt} kan generelt avhenge av q

Figur 6: $n - m$ uavhengige og m ikke-uavhengige koordinater

og t . Vi kan nå *ikke* konstruere varierte baner med forskyvninger som oppfyller føringsbetingelsene (2.6) (dette bevises ikke her). Vi *kan* imidlertid konstruere en variert bane fra den virkelige banen ved virtuelle forskyvninger δq_k , som må oppfylle

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} \delta q_k = 0$$

(husk: δt er ikke involvert; forskyvning ved fast t). Bruker nå “Lagranges metode med ubestemte koeffisienter”. Vi har m ligninger som hver ganges med en koeffisient λ_l :

$$\lambda_l \sum_{k=1}^n a_{lk} \delta q_k = 0; \quad \lambda_l = \lambda_l(q, t) \text{ generelt}$$

som medfører

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n \lambda_l a_{lk} \delta q_k = 0. \quad (2.7)$$

Vi antar videre at Hamiltons prinsipp også gjelder for ikke-holonome systemer. Da kan vi kombinere (2.5) og (2.7) over og får:

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0.$$

Her er ikke alle δq_k uavhengige, så vi kan ikke sette (...) = 0 for alle k slik vi gjorde det tidligere (se figur 6). Men vi har koeffisientene λ_l til vår disposisjon! Vi velger dem slik at

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0; \quad k = n - m + 1, \dots, n, \quad (2.8)$$

og står da igjen med

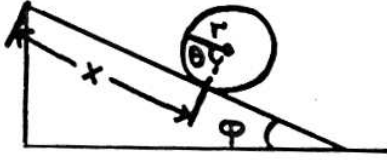
$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0. \quad (2.9)$$

Her er alle δq_k uavhengige, så vi kan sette (...) = 0 for $k = 1, 2, \dots, n - m$. Dermed:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Vi har $n + m$ ukjente: q_1, \dots, q_n og $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Men vi har også $n + m$ ligninger: n Lagrangeligninger (2.9) og m føringsbetingelser (2.6). Vi har redusert problemet vårt til et (generelt ikke-lineært) ligningssett som bestandig kan løses numerisk (i prinsippet også analytisk).

Eksempel: Ring som ruller på et skråplan



Vi har i dette tilfellet to generaliserte koordinater, x og θ . Videre har vi en føringsbetingelse, den såkalte rullebetingelsen: $r d\theta = dx$. Vi antar at ringen starter i ro på toppen ved $x = 0$. Konstruerer Lagrangefunksjonen:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = Mg(l - x) \sin \varphi$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2 - Mg(l - x) \sin \varphi$$

Én føringsbetingelse gir én føringsligning $\sum_{k=1}^2 a_k \dot{q}_k + a_t = a_x \dot{x} + a_\theta \dot{\theta} + a_t = 0$. Sammenligning med $r d\theta = dx$, altså

$$\dot{x} - r \dot{\theta} = 0,$$

gir $a_x = 1$, $a_\theta = -r$ og $a_t = 0$. Fra Lagranges ligninger, $\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda a_k = 0$, får vi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} = Mg \sin \varphi, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M \ddot{x}, \quad \lambda a_x = \lambda \\ \Rightarrow Mg \sin \varphi - M \ddot{x} + \lambda = 0 \end{aligned} \right\} q_1 = x$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M r^2 \ddot{\theta}, \quad \lambda a_\theta = -r \lambda \\ \Rightarrow -M r \ddot{\theta} - \lambda = 0 \end{aligned} \right\} q_2 = \theta$$

Vi har tre ukjente (variable), x, θ og λ , og tre ligninger til å finne dem (to Lagrangeligninger pluss føringsbetingelsen). Vi tar $\frac{d}{dt}$ på begge sider av føringsligningen $r \dot{\theta} = \dot{x}$, setter inn i Lagrangeligningen for θ og får

$$M \ddot{x} - \lambda,$$

som innsatt i Lagrangeligningen over x gir

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} g \sin \varphi; \quad \lambda = -\frac{1}{2} M g \sin \varphi; \quad \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{r} = \frac{g}{2r} \sin \varphi.$$

Vi legger merke til:

- Ved friksjonsløs glidning ned skråplanet er selvsagt akselerasjonen \ddot{x} lik $g \sin \varphi$, så \ddot{x} er altså halvparten så stor ved rulling som ved glidning (en del av den potensielle energien går over til rotasjonsenergi).
- Ettersom $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} g \sin \varphi$, fås at $\int_0^{v_0} v dv = \frac{1}{2} v_0^2 = \frac{1}{2} g \sin \varphi \int_0^l dx = \frac{1}{2} g l \sin \varphi$, altså

$$v_0 = \sqrt{g l \sin \varphi}$$

ved bunnen av planet.

- Vi kan skrive $-\lambda = M r \ddot{\theta}$, og innser at $-\lambda = \frac{1}{2} M g \sin \varphi$ er føringskraften som gjør at ringen begynner å rotere.
- Fortegnet på λ er her vilkårlig; i *Goldstein* er valgt $a_\theta = r$ og $a_x = -1$, som gir $\lambda = \frac{1}{2} M g \sin \varphi$. Men fysikken er selvsagt den samme!
- Merk at vi her har brukt metoden på et eksempel med *holonome* føringer; metoden kan være hensiktsmessig også da!

2.5 Fordeler med variasjonsprinsipp

- Prinsippet er mest nyttig når man kan finne en Lagrangefunksjon L uttrykt ved uavhengige koordinater, altså for holonome systemer.
- Metoden involverer kun T og V , som er fysiske størrelser uavhengig av koordinatvalg. Hele formuleringen er dermed automatisk invariant med hensyn på valg av koordinater.
- Fra før hadde vi at L er ubestemt med hensyn på addisjon av $\frac{dF}{dt}$ der $F = F(q, t)$. Med Hamiltons prinsipp som basis er dette innlysende:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \delta F(t_2) - \delta F(t_1) = 0,$$

fordi vi ikke har noen variasjon i endepunktene.

- Kan anvende metoden i mange grener av fysikken. Eks:

$$L = \frac{1}{2} \sum_j L_j \dot{q}_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{jk, k \neq j} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - \sum_j \frac{q_j^2}{2C_j} + \sum_j E_j(t) q_j$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_j R_j \dot{q}_j^2 \quad (\text{dissipasjonsfunksjonen})$$

Lagranges ligninger blir:

$$L_j \ddot{q}_j + \sum_{k \neq j} M_{jk} \ddot{q}_k + R_j \dot{q}_j + \frac{q_j}{C_j} = E_j(t),$$

som kan beskrive

1. system av elektriske kretser koblet via gjensidige induktanser M_{jk} ($q \hat{=}$ elektrisk ladning),
2. system av masser og fjærer som beveger seg i viskøst medium ($q \hat{=}$ posisjoner).

2.6 Bevarelsessetninger og symmetriegenskaper

For et system med n frihetsgrader vil bevegelsesligningene være n diff.ligninger som er av 2. orden i tiden. Løsningen innebærer dermed to integrasjoner pr. ligning, dvs. vi får $2n$ integrasjonskonstanter som kan bestemmes fra initialbetingelsene, som for eksempel kan være startverdier for $q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$.

Vi er ofte *ikke* interessert i en fullstendig løsning for $q_j(t)$ for alle j . Noen ganger holder det eller er til og med viktigere å kunne beskrive bevegelsen mer generelt i sin natur. To sentrale begreper er da bevaringslover og symmetriegenskaper.

Anta et system av punktmasser i et potensial V som kun er posisjonsavhengig. Da

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = m_i \dot{x}_i = p_{ix}.$$

Med generaliserte koordinater q_i definerer vi den generaliserte, eventuelt **kanoniske**, eventuelt **konjugerte** impulsen som

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.10)$$

Hvis potensialet er hastighetsavhengig, vil kanonisk impuls være forskjellig fra mekanisk impuls.

Eksempel: Partikler i elektromagnetisk felt

Vi fant Lagrangefunksjonen for partikkel i elektromagnetisk felt på side 12:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_i q_i \varphi(\vec{r}_i) + \sum_i q_i \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Gir

$$p_{ix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + q_i A_x \neq m_i \dot{x}_i$$

Vi sier at vi har en **syklisk** koordinat q_i dersom L ikke inneholder q_i . Dermed er $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ og Lagranges ligninger i q_i blir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i = 0.$$

Altså $p_i = \text{konst.}$ når q_i er syklisk, eller

$$\text{Kanonisk impuls tilhørende syklisk koordinat er bevart.} \quad (2.11)$$

Eksempel: x -uavhengig EM-felt

Anta et elektromagnetisk felt der φ og \vec{A} er uavhengige av x . Da er også L uavhengig av x , dvs. x er en syklisk koordinat.

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x = \text{konst.},$$

mens mekanisk impuls $m\dot{x}$ generelt ikke er bevart.

Vi skal nå se nærmere på bevaringslover ifm. translasjon og rotasjon samt bevaring av energi.

2.6.1 Translasjon

Vi ser på en generell koordinat q_j som er slik at dq_j betyr translasjon av hele systemet i en retning \vec{n} (figur 7). Da har vi

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{dq_j \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_i(q_j + dq_j) - \vec{r}_i(q_j)}{dq_j} = \frac{dq_j \vec{n}}{dq_j} = \vec{n} \quad (\text{for alle } i)$$

Anta at systemet er konservativt, altså $V = V(q)$. Lagrange for holonomt system (ligning 1.20):

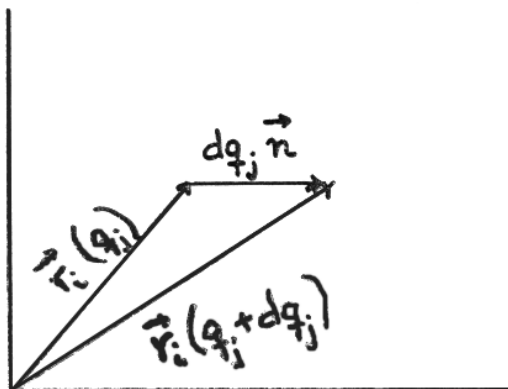
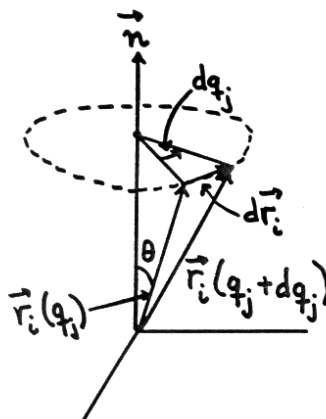
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

Hastigheter, og dermed kinetisk energi T er upåvirket av å flytte origo, så $\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$. Dermed (ved å bruke ligning 1.17):

$$\underline{\dot{p}}_j = Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{F}. \quad (2.12)$$

Med andre ord: den generaliserte kraftkomponenten Q_j er komponenten av den totale kraften \vec{F} langs \vec{n} . Med $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2$ får vi

$$\underline{p}_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{P}, \quad (2.13)$$

Figur 7: En liten translasjon dq_j av hele systemetFigur 8: En liten rotasjon dq_j av hele systemet

så p_j er komponenten av total lineær impuls \vec{P} langs \vec{n} . Dermed konkluderer vi med at $\dot{p}_j = Q_j$ er bevegelsesligningene for total lineær impuls.

Dersom nå q_j er syklisk, vil $\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j = 0$, dvs. $\dot{p}_j = 0$. Dette er bevaringsloven for lineær impuls som vi fant tidligere; når ytre kraft er null, er total impuls bevart.

2.6.2 Rotasjon

Vi ser videre på en generell koordinat q_j som er slik at dq_j medfører en rotasjon av hele systemet omkring en akse \vec{n} .

Med de samme argumentene som vi brukte ovenfor, får vi helt analogt (se figur 8)

$$\dot{p}_j = Q_j \quad \text{med} \quad Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Vi ser av figuren at $|d\vec{r}_i| = r_i \sin \theta dq_j$, så $|\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}| = r_i \sin \theta$ med retning $\perp \vec{r}_i$ og $\vec{n} \implies$

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \vec{n} \times \vec{r}_i.$$

Vi får som i translasjonstilfellet

$$\underline{Q}_j = \sum_i \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F} \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i) = \sum_i \vec{n} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_i \vec{n} \cdot \vec{N}_i = \vec{n} \cdot \vec{N}. \quad (2.14)$$

$$\underline{p}_j = \sum_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i) = \sum_i \vec{n} \cdot (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \vec{n} \cdot \sum_i \vec{L}_i = \vec{n} \cdot \vec{L} \quad (2.15)$$

Q_j er altså komponenten av dreiemomentet \vec{N} langs \vec{n} og p_j er komponenten av dreieimpulsen \vec{L} langs \vec{n} . Hvis q_j er syklisk, er igjen $\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j = \vec{n} \cdot \vec{N} = 0$, og $p_j = \vec{n} \cdot \vec{L}$ er bevart.

Generelt:

- Hvis systemet er invariant overfor translasjon langs en akse \vec{n} , er \vec{P} konstant langs translasjonsaksen \vec{n} .
- Hvis systemet er invariant overfor rotasjon om en akse \vec{n} , er \vec{L} konstant omkring rotasjonsaksen \vec{n} . (Kulesymmetrisk system $\implies \vec{L} = \text{konst.}$)

2.6.3 Bevarelse av energi

Anta at vi har $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ og $V = V(q_i)$. Den absolutt tidsderiverte, $\frac{dL}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] + \frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned}$$

der vi har brukt Lagranges ligninger, $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Dette gir

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Energifunksjonen (som vi skal komme nærmere inn på i kapittel 3), er

$$H(q, \dot{q}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L,$$

gir

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.16)$$

La oss nå anta at $L = L(q_i, \dot{q}_i)$, dvs. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. Vi ser at dette medfører at $dH/dt = 0$, og at energifunksjonen er bevart. Det gjenstår å finne sammenhengen mellom funksjonen H og total energi.

At Lagrangefunksjonen ikke er eksplisitt tidsavhengig, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, medfører

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0.$$

For en homogen funksjon av n -te grad gjelder Eulers teorem:

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f. \quad (2.17)$$

Kinetisk energi T er en homogen funksjon av andre grad:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i m_i \dot{q}_i = 2T.$$

(Da systemet er konservativt, er $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$.) Dermed

$$H = 2T - V = 2T - (T - V) = T + V = \text{total energi.}$$

Oppsummert:

$$\text{Hvis } \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \text{ er den totale energien bevart.} \quad (2.18)$$

3 Hamiltons ligninger

Vi har til nå beskjeftiget oss med Lagranges formulering av mekanikken. En alternativ formalisme ble introdusert av Hamilton, og istedet for Lagranges funksjon og ligninger, betrakter vi her Hamiltons funksjon og Hamiltons ligninger. Det er verd å merke seg

- Lagranges ligninger er ekvivalente med Hamiltons ligninger; det er derfor ingen ny fysikk i dette kapitlet, bare en ny metode.
- Hamiltons metode er ikke bedre enn Lagrangeformalismen med tanke på direkte løsning av mekanikkproblemer.
- Hamiltons prosedyre er mer velegnet på andre områder av fysikken, f.eks. innen kvantemekanikk og statistisk mekanikk.
- Vi antar i dette kapitlet holonome systemer og monogeniske krefter, dvs. $V = V(q)$, evt. $U = U(q, \dot{q})$ slik at $Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}$ (jf. det elektromagnetiske felt, kapittel 1.5.1)

3.1 Legendretransformasjoner og Hamiltons bevegelsesligninger

3.1.1 Hamilton vs. Lagrange

La oss raskt rekapitulere hvordan vi angrep problemer med Lagranges metode. For et system med n frihetsgrader fikk vi n 2.ordens diff.ligninger

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Fullstendig løsning krever $2n$ initialbetingelser, f.eks. verdier for $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ ved en tid t_1 , evt. verdier for q_1, \dots, q_n ved to tider t_1 og t_2 . Systemets *tilstand* spesifiseres ved et punkt i det n -dimensjonale **konfigurasjonsrommet** med akser q_i .

I Hamiltonformuleringen har vi 1. ordens ligninger, så vi får kun én integrasjonskonstant pr. ligning som skal spesifiseres. Fysikken er imidlertid den samme uansett formulering, så vi trenger fremdeles $2n$ initialbetingelser, altså må vi ha $2n$ diff.ligninger. Systemets tilstand spesifiseres ved et punkt i det $2n$ -dimensjonale **faserommet** med akser q_i og p_i , der

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q_j, \dot{q}_j, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

q, p kalles de **kanoniske variable**.

3.1.2 Generelt om Legendretransformasjoner

Matematisk innebærer overgangen fra Lagrange- til Hamiltonformulering at vi endrer variable i våre funksjoner fra (q, \dot{q}, t) til (q, p, t) med $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$. Til dette trenger vi en **Legendretransformasjon**.

Vi skal først se generelt på Legendretransformasjoner. Anta at vi har en funksjon $f(x, y)$ slik at

$$df = u dx + v dy; \quad u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Vi ønsker å forandre basis fra (x, y) til (u, v) slik at differensialer uttrykkes ved du og dv . Definerer funksjonen

$$\begin{aligned} g &= f - ux \\ \implies dg &= df - u dx - x du = u dx + v dy - u dx - x du \\ &= v dy - x du, \end{aligned}$$

som er vår ønskede form! x og v er nå funksjoner av u og y :

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Legendrepolynomer brukes mye i termodynamikken.

Eksempel fra termodynamikken

Entalpien H er funksjon av entropien S og trykket p :

$$\frac{\partial H}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = V \implies dH = TdS + Vdp$$

H uttrykt ved S og p er nyttig for isentropiske og isobariske prosesser. Dersom en ønsker å beskrive isoterme og isobariske prosesser, trenger en heller en funksjon av T og p . Legendretransformasjonen gjør vi med funksjonen

$$G = H - TS$$

så

$$\begin{aligned} dG &= dH - TdS - SdT = TdS + Vdp - TdS - SdT \\ &= Vdp - SdT, \end{aligned}$$

slik at

$$\frac{\partial G}{\partial p} = V; \quad -\frac{\partial G}{\partial T} = S.$$

G er Gibbs fri energi.

3.1.3 Fra Lagrange- til Hamiltonformalisme

Den "naturlige" Legendretransformasjonen for endring av variable fra (q, \dot{q}, t) til (q, p, t) er (jf. eksempelet over):

$$H = H(q, p, t) = p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)$$

Vi differensierer

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Fra definisjonen av H får vi

$$dH = \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Ettersom $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, forsvinner de to leddene med $d\dot{q}_i$. Videre har vi fra Lagranges ligninger at

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i.$$

Dermed:

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

og vi kan skrive ned Hamiltons ligninger:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{3.1}$$

I tillegg har vi at

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{3.2}$$

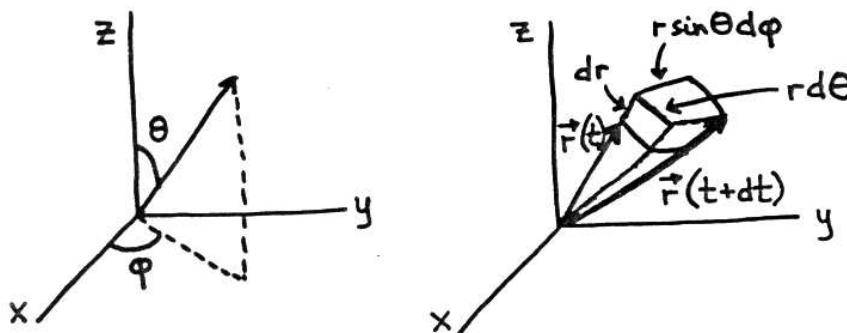
Den vanlige prosedyren i Hamiltonformalismen går som følger:

1. Konstruer $L(q, \dot{q}, t)$
2. Definér kanoniske impulser $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.
3. Konstruer $H = p\dot{q} - L$; her er H en funksjon av q, \dot{q}, p og t :
4. Benytt $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ til å finne \dot{q}_i som funksjon av (q, p, t) .
5. Eliminer deretter \dot{q}_i fra H slik at $H = H(q, p, t)$.

Deretter kan H benyttes til å løse de kanoniske bevegelsesligningene.

Eksempel: Partikkel i sentralt kraftfelt

Vi bruker polarkoordinater her; $q_i = (r, \theta, \phi)$. Sentralsymmetri, $V = V(r)$.



$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

Lagrangefunksjonen er $L = T - V$. Bruker $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ til å eliminere \dot{q}_i fra H :

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}; \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}.$$

Definerer

$$\begin{aligned} H &= p_i \dot{q}_i - T + V = m\dot{r}^2 + mr^2 \dot{\theta}^2 + mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}mr^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + V(r) \\ &= T + V = \frac{1}{2}m \frac{p_r^2}{m^2} + \frac{1}{2}mr^2 \sin^2 \theta \frac{p_\phi^2}{m^2 r^4 \sin^4 \theta} + \frac{1}{2}mr^2 \frac{p_\theta^2}{m^2 r^4} + V(r) \\ &= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r) \\ &= H(p, q) \end{aligned}$$

Altså: Vi har vist at H =total energi $T + V$, og vi har greid å uttrykke H som funksjon av de kanoniske variable, $(q, p) = (r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi)$.

Eksempel: Partikkel i elektromagnetisk felt

Det elektromagnetiske felt er et ikke-konservativt system; $L = T - U$ har et hastighetsavhengig potensial $U = q\varphi - q\vec{A} \cdot \vec{v}$ (vi behandlet dette systemet i Lagrangeformalismen i avsnitt 1.5.1). Vi husker at Lagrangeligningene $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i}$ er oppfylt med dette potensialet U .

$$L = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + q\vec{A} \cdot \vec{v} = L(x_i, \dot{x}_i, t).$$

Anta kartesiske koordinater (og vi bruker i det følgende summekonvensjon):

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i + qA_i\dot{x}_i - q\varphi \\ \implies p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i \\ \implies H &= p_i\dot{x}_i - L = (m\dot{x}_i + qA_i)\dot{x}_i - \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i - qA_i\dot{x}_i + q\varphi \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i + q\varphi \\ &= \text{mekanisk energi} + \text{potensiell energi.} \end{aligned}$$

Vi eliminerer \dot{x}_i ved å uttrykke p_i ved \dot{x}_i : $\dot{x}_i = \frac{1}{m}(p_i - qA_i)$. Innsatt:

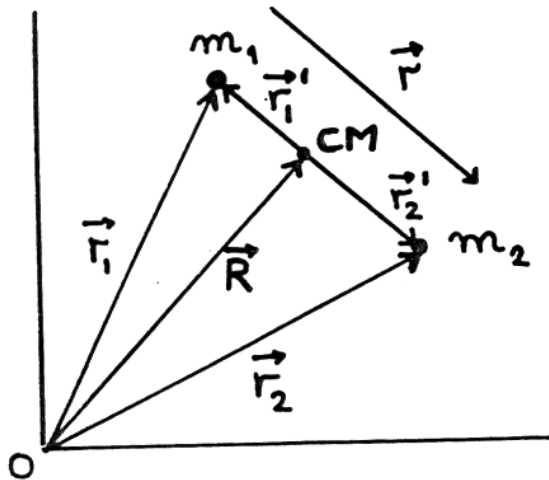
$$\begin{aligned} H(x_i, p_i, t) &= \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)(p_i - qA_i) + q\varphi \\ &= \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\varphi, \end{aligned}$$

der avhengigheten av \dot{x}_i og t ligger i \vec{A} og φ . Hvis nå \vec{A} og φ er uavhengige av t , blir $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, og dermed

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

4 Tolegemeproblemet; sentrale krefter

Vi skal i dette kapittelet betrakte systemer av to legemer.



Figur 9: To legemer.

4.1 Reduksjon til ekvivalent ettlegemeprobem

To legemer har tilsammen 6 frihetsgrader, og beskrives av seks generaliserte koordinater. La de to legemene ha posisjoner \vec{r}_1 og \vec{r}_2 . Vi vet imidlertid at vi kan benytte to vilkårlige (lineært uavhengige) lineærkombinasjoner av disse to vektorene som basisvektorer for å beskrive systemets dynamikk, så istedet for å bruke posisjonene til enkeltpartiklene, definerer vi oss to nye, uavhengige posisjonsvektorer som bedre beskriver *systemet* av partikler; massesenterets posisjon, \vec{R} , og den relative posisjonsvektor, \vec{r} , definert slik:

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (4.1)$$

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (4.2)$$

Vi skal se at dette er et mer hensiktsmessig valg. La oss anta konservativt system og sentrale krefter, dvs.

$$V = V(r), \quad r = |\vec{r}|.$$

Lagrangefunksjonen, som vanlig:

$$L = T(\dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}) - V(r);$$

vi finner den kinetiske energien (slik vi gjorde på side 7):

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_2')^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2'^2 + \dot{\vec{R}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} (m_i \vec{r}_i')}_{=0} \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + T', \end{aligned}$$

med

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2}m_1 \left(-\frac{m_2}{m_1+m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1m_2\dot{r}^2 \frac{m_2+m_1}{(m_1+m_2)^2} = \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \dot{r}^2 \end{aligned}$$

Vi innfører nå den **reduserte masse**:

$$\mu \equiv \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}, \quad (4.3)$$

eventuelt

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (4.4)$$

Dessuten skriver vi den totale massen

$$M \equiv m_1 + m_2$$

Dermed

$$T = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2. \quad (4.5)$$

og Lagrangefunksjonen

$$L = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - V(r) = L(r, \dot{r}, \dot{R}).$$

\vec{R} inngår ikke i Lagrangefunksjonen og er dermed en syklisk koordinat, som medfører at $p_R = \partial L / \partial \dot{R} = M\dot{R} = \text{konst.}$, og dermed også $\dot{R} = \text{konst.}$ Vi kan rett og slett droppe leddet $\frac{1}{2}M\dot{R}^2$ i Lagrangefunksjonen, og vi har redusert problemet til et ekvivalent ettlegemeprobblem med samme formalisme som for én partikkel med masse μ og posisjon \vec{r} :

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - V(r). \quad (4.6)$$

4.2 Bevegelsesligningene

Med reduksjonen ovenfor i bakhodet, er den naturlige fortsettelsen å formulere bevegelsesligningene for en partikkel i et sentralt kraftfelt $\vec{F} = -\nabla V(r)$. Etersom systemet er rotasjonssymmetrisk, må total dreieimpuls være bevart:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{konst.}, \text{ både i størrelse og retning.}$$

Dette kan bare være oppfylt dersom \vec{r} hele tiden ligger i et plan normalt på \vec{L} (slik sentralbevegelse skjer derfor alltid i et plan). Det virker nå naturlig å benytte polarkoordinater slik at polaraksen er parallell med \vec{L} , som gir oss polarvinkelen

$$\varphi = \frac{\pi}{2} = \text{konst.},$$

og vi står igjen med to frie koordinater, r og θ , der θ er asimutvinkelen i planet. Vi lar partikkelens masse være m og formulerer Lagrangefunksjonen

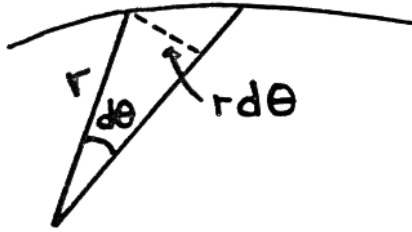
$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r} + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) = L(r, \dot{r}, \dot{\theta}).$$

θ er som vi ser en syklisk koordinat, så

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{konst.} \equiv l,$$

der l er dreieimpulsens størrelse. Den ene bevegelsesligningen blir dermed

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$



Figur 10: Keplers andre lov: radien sveiper over like store arealer i løpet av like store tidsrom.

Vi kan nå bevisе **Keplers 2. lov**, som sier at radien sveiper over like store arealer i like store tidsrom. Av figur 4.2 ser vi

$$dA = \frac{1}{2}r \cdot r d\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2m}p_{\theta} = \text{konst.}$$

Kepler formulerte loven for planetbevegelse i potensial $V \sim r^{-1}$, men resultatet er som vi ser gyldig for generell sentralbevegelse.

Vi vender tilbake til bevegelsesligningene og finner den andre av bevegelsesligningene, for koordinaten r :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(m\vec{r})}_{= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}} - \underbrace{mr\dot{\theta}^2}_{= \frac{\partial L}{\partial r}} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

Kraft i \vec{r} -retning: $f(r) \equiv -\frac{\partial V}{\partial r}$, så

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r).$$

Vi eliminerer $\dot{\theta}$ ved hjelp av konstanten $l = mr^2\dot{\theta}$, dvs.

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}, \quad (4.7)$$

og får en 2. ordens diff.ligning bare i r :

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r).$$

Vi arbeider med et konservativt system, og da har vi sett at total mekanisk energi, E , er en bevegelseskonstant:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r). \quad (4.8)$$

Vi har to variable, r og θ , og i utgangspunktet to 2. ordens diff.ligninger, det vil si at vi må foreta fire integrasjoner for å finne $r(t)$ og $\theta(t)$. Vi har imidlertid allerede gjort to integrasjoner der integrasjonskonstantene ble fastslått ved hjelp av l og E . Det gjenstår da å gjøre to integrasjoner for å løse de to ligningene av 1. orden. La oss starte med (4.8), omskrevet ved hjelp av (4.7):

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V = E,$$

dvs.

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)} \text{ og dermed}$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V - l^2/2mr^2)}}$$

Vi ser at vi har valgt positivt fortegn foran kvadratroten i uttrykket for \dot{r} . La $r(t=0) = r_0$ =minimum radius. Dermed er $dr > 0$ når $dt > 0$, og valget av positiv løsning er ok. Løst for t får vi:

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V - l^2/2mr^2)}} = t(r; E, l, r_0), \quad (4.9)$$

som (i hvert fall i prinsippet) kan inverteres slik at vi finner $r(t)$. Om vi antar kjent $r(t)$ finner vi $\theta(t)$ av $mr^2\dot{\theta} = l$:

$$d\theta = \frac{ldt}{mr^2}$$

så

$$\theta(t) = l \int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0; \quad \theta_0 \equiv \theta(t=0). \quad (4.10)$$

Vi ser at vi har fått fire integrasjonskonstanter: E, l, r_0 og θ_0 . I klassisk mekanikk kunne vi like godt ha valgt fire andre størrelser, f.eks. $r_0, \theta_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0$ for å bestemme systemet entydig. I kvantemekanikk, derimot, er initialverdier av r, θ , samtidig med $\dot{r}, \dot{\theta}$ uten mening (da operatorene som representerer disse størrelsene i kvantemekanikk ikke kommuterer, kan de ikke ha skarp verdi samtidig, jf. Heisenbergs uskarphetsprinsipp som er grundig behandlet i enhver tekstbok i kvantemekanikk). Det er derfor fornuftig å velge E og l dersom en ønsker å diskutere overgangen fra klassisk mekanikk til kvantemekanikk.

4.3 Ekvivalent éndimensjonalt problem

I de fleste tilfeller er det ikke mulig å løse integralene for t og θ analytisk. Vi kan imidlertid oppnå en del innsikt uten å finne den fullstendige løsningen ved å betrakte en éndimensjonal analogi.

Vi hadde følgende bevegelsesligninger for systemet:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}.$$

Innsatt for $\dot{\theta}$ får vi

$$m\ddot{r} = f(r) + \frac{l^2}{mr^3} \equiv f'(r),$$

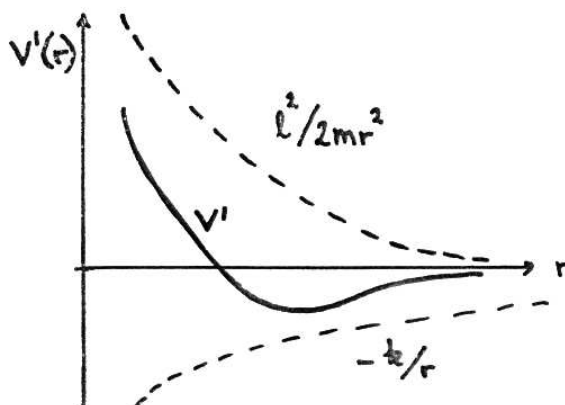
som vi kjenner igjen som Newtons andre lov for et éndimensjonalt problem der en masse m påvirkes av en kraft $f' = f + \frac{l^2}{mr^3}$. Vi kikker på tilleggsleddet:

$$\frac{l^2}{mr^3} = \frac{(mr^2\dot{\theta})^2}{mr^3} = mr\dot{\theta}^2 = \frac{mv_\theta^2}{r},$$

som vi kjenner igjen som sentrifugalkraften. Alternativt kan vi betrakte energien:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r),$$

Figur 11: Sentrifugalbarriæren med $-k/r$ -potensial.

som er det samme som vi får for et éndimensjonalt problem med potensiell energi

$$V'(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}. \quad (4.11)$$

Kraften avledet av $V'(r)$ er

$$f' = -\frac{\partial V'}{\partial r} = f + \frac{l^2}{2mr^3}, \quad (4.12)$$

som vi fikk ovenfor.

Eksempel: Attraktiv r^{-2} -kraft

Betrakt potensial $V(r) = -k/r$, dvs. $f(r) = -k/r^2$. Som vi så over får vi da:

$$V' = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2},$$

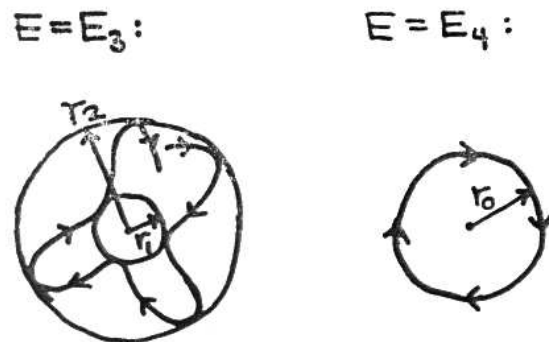
der det siste leddet kalles sentrifugalbarrieren. Total mekanisk energi

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V'(r) \geq V'(r)$$

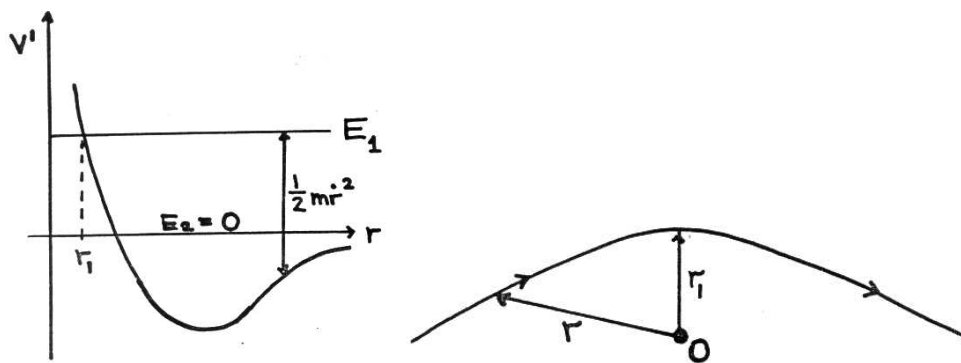
La oss plote $V'(r)$ (figur 11). Vi legger merke til grensene

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} V'(r) &= +\infty \\ \lim_{r \rightarrow \infty} V'(r) &= 0 \end{aligned}$$

Hvis total energi er $E_1 > 0$ kan partikkelen ikke komme nærmere origo enn r_1 (som vist på figurene), ettersom vi må ha $E \geq V'$. Vi ser videre at det ikke er noen øvre grense for r for positive energier; vi sier at bevegelsen **ikke er bundet**. Partikkelen har et **vendepunkt** i $r = r_1$. Skisse av partikkelens bane ved ubundet bevegelse (hyperbel):

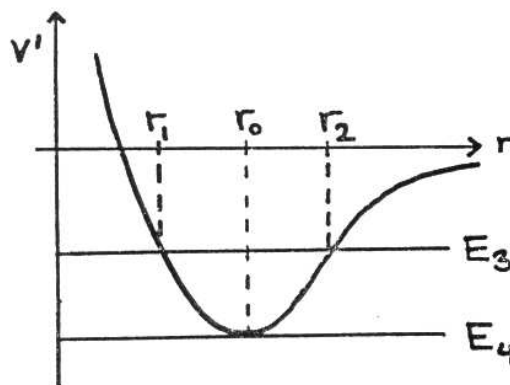


Figur 12: Partikkelbane, bundet sentralbevegelse. Vendepunkter for $r = r_1$ og $r = r_2$.



Når $E = E_2 = 0$ får vi kvalitativt samme bevegelse (parabel).

Hva blir situasjonen så for $E < 0$? Bevegelsen må nå bli **bundet**, dvs. $r_1 \leq r \leq r_2$ med to vendepunkter, henholdsvis r_1 og r_2 .



Når energien er mindre enn 0, men større enn E_0 , kan vi få ganske kompliserte baner som vist i figur 12. Bevegelsen trenger ikke å være en lukket kurve.

Er energien akkurat $E = E_4$, blir $r_1 = r_2 = r_0$, og banen må bli en sirkel med \dot{r} (partikkelen har ikke nok energi til å bevege seg i r -retning). Minimumspunktet for V' er gitt ved

$$f' = -\frac{\partial V'}{\partial r} = 0 \quad \text{dvs.}$$

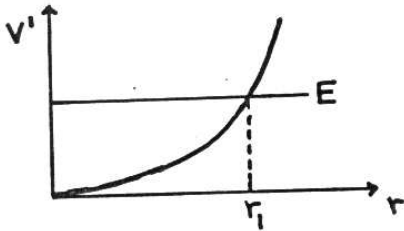
$$f = -mr\dot{\theta}^2.$$

Det vil si at ytre kraft her akkurat balanseres av sentrifugalkraften.

Eksempel: Harmonisk oscilator

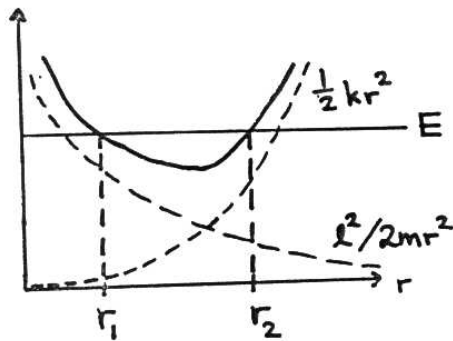
Harmonisk oscilator-potensialet er: $f(r) = -kr$, $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$

$l = 0$:



Ingen dreieimpuls, $\vec{r} \parallel \vec{v}$, så bevegelsen skjer langs en rett linje gjennom bunnpunktet. $V' = V$, så vi får en bundet harmonisk bevegelse med $r \leq r_1$.

$l \neq 0$:



$$V' = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{l^2}{2mr^2}$$

Vi får en bundet bevegelse med $r_1 \leq r \leq r_2$.

Ligningen $\vec{f} = -k\vec{r}$ er på komponentform:

$$f_x = -kx, \quad f_y = -ky,$$

så vi har altså to harmoniske oscilatorer som danner en vinkel på 90° med hverandre. Vi ser videre at oscilatorene har samme frekvens, dvs. banen er en *ellipse*.

Eksempler på slike systemer kan være

- Sfærisk pendel
- Lissajoufigurer på oscilloskopet

4.4 Virialteoremet

Virialteoremet er et generelt teorem som er gyldig for mange ulike fysiske systemer. Som resultat er det av *statisk* natur, idet det har å gjøre med tidsmiddelet av fysiske størrelser.

Vi antar et system av massepunkter i posisjoner \vec{r}_i påvirket av krefter \vec{F}_i (som inkluderer eventuelle

føringskrefter). Newtons andre lov lyder som vanlig $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$. Vi lager oss funksjonen

$$G = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i, \quad \text{som gir}$$

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i + \sum_i \dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}_i$$

Omformer den tidsderiverte:

$$1. \text{ ledd: } \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot m_i \vec{r}_i = \sum_i m_i v_i^2 = 2T$$

$$2. \text{ ledd: } \sum_i \dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

Dermed:

$$\frac{dG}{dt} = 2T + \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

Vi midler denne ligningen over et tidsintervall τ :

$$\overline{\frac{dG}{dt}} \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = 2\overline{T} + \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i},$$

det vil si

$$2\overline{T} + \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)].$$

Dersom vi ser på en periodisk bevegelse der perioden er τ , er det åpenbart at høyre side av denne ligningen må være null. For generell ikke-periodisk bevegelse krever vi at \vec{r}_i og \vec{p}_i må være endelige, og altså er også G endelig. Av dette følger at

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)] = 0,$$

så i begge tilfeller får vi **virialteoremet**:

$$\boxed{\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i}} \quad (4.13)$$

Eksempel: Ideell gass

Vi betrakter N atomer i et volum V . Ekvipartisjonsprinsippet (kjent fra statistisk mekanikk) gir oss da at den indre energi

$$U = \bar{T} = \frac{3}{2}NkT,$$

der $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ er Boltzmanns konstant. Veggkraften i boksen er gitt ved

$$d\vec{F}_i = -p\vec{n}dA,$$

der p her betegner trykket. Vi antar at gassen er ideell, dvs. at interatomære vekselvirkninger kan neglisjeres. Vi beregner middelverdien

$$\frac{1}{2} \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = -\frac{1}{2}p \int \vec{n} \cdot \vec{r} dA = -\frac{1}{2}p \int \nabla \cdot \vec{r} dV = \frac{3}{2}pV,$$

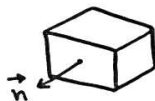
der vi har brukt at

$$\int \nabla \cdot \vec{r} dV = \sum_{i=1}^3 \int \frac{\partial r_i}{\partial x_i} dx_i = 3V.$$

Innsatt i virialteoremet får vi

$$pV = NkT,$$

som vi kjenner igjen som Boyles lov eller Ideell gasslov.



Eksempel: $\vec{F}_i = -\nabla_i V$

Dersom alle krefter kan skrives som en gradient til et potensial V , slik at $\vec{F}_i = -\nabla_i V$, tar virialteoremet formen

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_i \nabla_i V \cdot \vec{r}_i}.$$

La oss for enkelhets skyld betrakte én partikkel i et sentralfelt:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial V}{\partial r} r}.$$

Anta videre at potensialet kan skrives som en potens i r , altså

$$V = ar^{n+1} \iff f \sim r^n$$

(husk her at også mange potensialer av en annen matematisk form også lar seg Taylorutvikle i potenser av r , så resultatet vi får lar seg også anvende i analyse av mer generelle potensialer). Vi får:

$$\frac{\partial V}{\partial r} r = (n+1)V$$

og dermed

$$\bar{T} = \frac{n+1}{2} \bar{V}. \quad (4.14)$$

To viktige eksempler på potensialer på denne formen er Keplerpotensialet $n = -2$ og harmonisk oscillator, $n = 1$. Vi får

$$\begin{aligned} \bar{T} &= -\frac{1}{2} \bar{V} \quad \text{for } n = -2 \\ \bar{T} &= \bar{V} \quad \text{for } n = 1. \end{aligned}$$

4.5 Keplerproblemet

La oss gå tilbake til problemet med sentrale krefter på formen $f(r) = -k/r^2$, dvs. potensial $V(r) = -k/r$. Vi ønsker å bestemme banen til en partikkel som beveger seg i dette potensialet, det vil si å finne sammenhengen mellom r og θ .

Vi hadde

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}$$

for generell $V(r)$. Denne skriver vi på formen

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}}.$$

Vi innfører $d\theta$ ved å bruke $\dot{\theta} = l/mr^2$, altså $ldt = mr^2 d\theta$:

$$d\theta = \frac{ldr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}},$$

med løsning for θ

$$\theta(r) = \int_{r_0}^r \frac{ldr'}{mr'^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr'^2} \right)}} + \theta_0.$$

Vi setter nå inn for potensialet, $V = -k/r$, og substituerer: $u \equiv 1/r$; $du = -dr/r^2$:

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}}.$$

Konstanten θ_0 er bestemt av initialbetingelsene. La oss sette $\theta_0 = 0$, det vil si at vinkelen θ regnes i forhold til **perihel**, det vil si det punktet hvor partikkelen er nærmest origo.

Integralet i uttrykket for θ er et standardintegral med analytisk løsning:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos \left[-\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{q}} \right],$$

der $q = \beta^2 - 4\alpha\gamma$. Sammenligning med integralet vi skal løse tilsier at vi må velge konstantene slik

$$\alpha = \frac{2mE}{l^2}, \quad \beta = \frac{2mk}{l^2}, \quad \gamma = -1, \quad q = \left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2El^2}{mk^2}\right)$$

så

$$-\frac{\beta + 2\gamma u}{\sqrt{q}} = -\frac{1 + \frac{2\gamma u}{\beta}}{\sqrt{1 - \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}}} = \frac{\frac{l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}$$

gir

$$\theta = -\arccos \left(\frac{\frac{l^2}{mkr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}} \right).$$

Vi innfører **eksentrisiteten** ϵ :

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}, \quad (4.15)$$

og videre “baneparameter”, p :

$$p = \frac{l^2}{mk}.$$

Dermed:

$$\theta = -\arccos \left(\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \right) \quad (4.16)$$

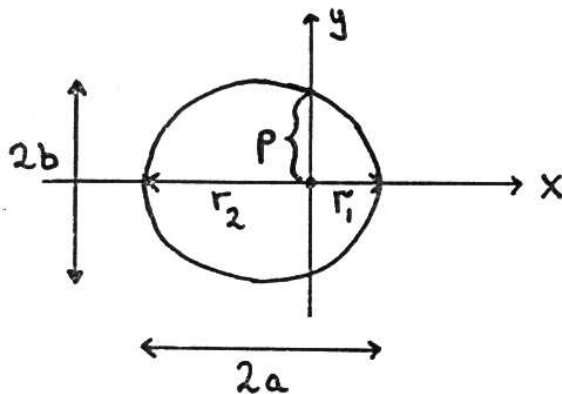
Dette kan vi løse med hensyn på r (bruker at $\cos(x) = \cos(-x)$):

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \implies \frac{p}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta \\ r &= \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dette er et kjeglesnitt med brennpunkt i origo. Vi ser at $\theta = 0$ tilsvarer $r = r_0 = p/(1 + \epsilon)$, altså perihelen. Vi kan nå klassifisere ulike typer baner:

- $\epsilon > 1$: hyperbel ($E > 0$)
- $\epsilon = 1$: parabel ($E = 0$)
- $\epsilon < 1$: ellipse ($E < 0$)
- $\epsilon = 0$: sirkel ($E = -mk^2/2l^2$)

La oss se litt nærmere på ellipsen. Store halvakse benevner vi med a og lille halvakse med b . For bundet bevegelse har vi da $r_1 \leq r \leq r_2$.



Av figuren ser vi at

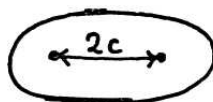
$$2a = r_1 + r_2 = \frac{p}{1 + \epsilon} + \frac{p}{1 - \epsilon} = \frac{2p}{1 - \epsilon^2},$$

dvs. (husk: $E < 0$)

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} = \frac{\frac{l^2}{mk}}{1 - (1 + \frac{2El^2}{mk^2})} = -\frac{k}{2E} = \frac{k}{2|E|}$$

Hvis $2c$ er avstanden mellom brennpunktene gjelder

$$\epsilon = \frac{c}{a}$$



(4.18)

Videre har vi for en ellipse at $a^2 = b^2 + c^2$. Dermed:

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - a^2\epsilon^2 = \frac{p^2}{(1 - \epsilon^2)^2}(1 - \epsilon^2) = \frac{p^2}{1 - \epsilon^2} = -\frac{(\frac{l^2}{mk})^2}{\frac{2El^2}{mk^2}} = -\frac{l^2}{2mE},$$

så

$$b = \frac{l}{\sqrt{2m|E|}} \quad (4.19)$$

Merk: b avhenger av både E og l , men a avhenger kun av E .

4.5.1 Omløpstid T

Vi har vist at "arealhastigheten" er konstant i sentralbevegelse (side 36):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{l}{2m}.$$

Vi integrerer over én periode:

$$\int_0^T \frac{dA}{dt} dt = A = \frac{l}{2m}T.$$

For en ellipse kjenner vi arealet gitt ved $A = \pi ab$, så

$$T = \frac{2\pi m}{l}ab.$$

Med resultatene ovenfor; $b = l/\sqrt{2m|E|}$ og $a = k/2|E|$:

$$\frac{b}{l} = \frac{1}{\sqrt{2m|E|}} = \frac{1}{\sqrt{2m\frac{k}{2a}}} = \sqrt{\frac{a}{mk}},$$

og omløpstiden blir

$$T = 2\pi m a \sqrt{\frac{a}{mk}} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}},$$

som er Keplers 3. lov:

$$T^2 \propto a^3 \quad (4.20)$$

4.5.2 Tidsutviklingen

Vi fant på side 37:

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V - l^2/2mr^2)}}.$$

Nå er $V = -k/r$. For å finne et hensiktsmessig uttrykk, bruker vi uttrykkene for a og b samt at $a^2 - b^2 = a^2\epsilon^2$ som vi fant ovenfor. Vi får da (betrakter først det ubestemte integralet):

$$t = \int \frac{rdr}{\sqrt{-\frac{2|E|r^2}{m} - \frac{2kr}{m} - \frac{l^2}{m^2}}} = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{rdr}{\sqrt{-r^2 + \frac{k}{|E|r} - \frac{l^2}{2m|E|}}},$$

så

$$t = \sqrt{\frac{ma}{k}} \int \frac{rdr}{\sqrt{-r^2 + 2ar - b^2}} \quad (4.21)$$

Uttrykket under rottegnet kan omskrives:

$$-r^2 + 2ar - a^2 + a^2 - b^2 = -(r - a)^2 + a^2\epsilon^2.$$

Gjør nå substitusjonen

$$\begin{aligned} a - r &\equiv a\epsilon \cos \xi, \\ dr &= a\epsilon \sin \xi d\xi \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{ma}{k}} \int \frac{(a - a\epsilon \cos \xi) a\epsilon \sin \xi d\xi}{\sqrt{a^2\epsilon^2 - a^2\epsilon^2 \cos^2 \xi}} \\ &= \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int (1 - \epsilon \cos \xi) d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (\xi - \epsilon \sin \xi) + \text{konst.} \end{aligned}$$

Vi velger initialpunktet slik at konst.= 0. Da får vi følgende parameterfremstilling av $r(t)$:

$$r = a(1 - \epsilon \cos \xi), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (\xi - \epsilon \sin \xi). \quad (4.22)$$

Vi ser at $\xi = 0$ tilsvarer $t = 0$, og at partikkelen da er i posisjonen $a(1 - \epsilon)$, det vil si i perihel.

4.6 Spredning i sentralt kraftfelt

Vi skal i dette kapitlet beskrive et system der partikler blir spredt av et sentralt kraftfelt. Problemet vi betrakter her er ikke-relativistisk og med neglisjerbare kvanteeffekter, men formalismen vi utvikler her er den samme som vi møter igjen innenfor f.eks. atom- og partikkelfysikk der vi ikke kan neglisjere disse korreksjonene.

Anta at vi har en uniform strøm av partikler (elektroner, α -partikler, planeter ...) på vei mot et kraftsentrum. Anta videre at partiklene har lik masse og energi. Potensialet $V(r)$ vi betrakter er slik at kraften $f(r) = -\partial V/\partial r \rightarrow 0$ når $r \rightarrow \infty$. Generelt kan vi ha både tiltrekkende og frastøtende $V(r)$.

Vi beskriver den innkommende partikkelstrømmen ved **intensiteten** I , definert som

$$I \equiv \# \text{ partikler gjennom en enhet tverrsnittsareal normalt på strømmen pr. tidsenhet} \quad (4.23)$$

Partiklenes baner avbøyes fra en rettlinjet bevegelse når de passerer kraftsenteret. Etter passering avtar etterhvert kreftene som virker på partiklene og banene blir til slutt rette linjer igjen. Vi definerer nok en hensiktsmessig størrelse: det **differensielle spredningstverrsnitt**:

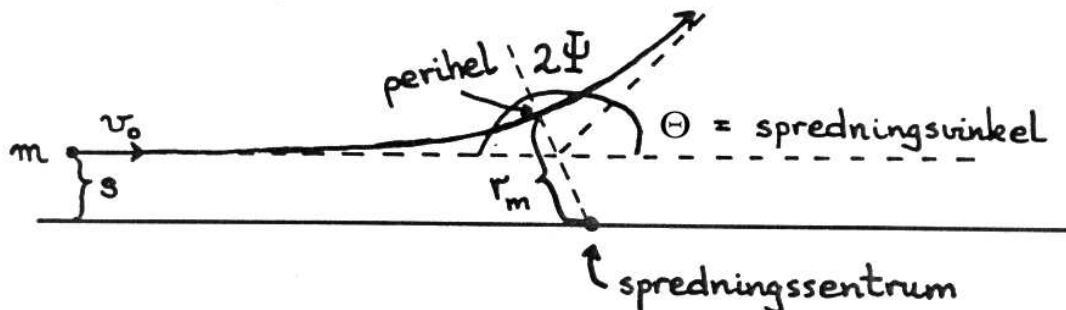
$$\sigma(\Omega)d\Omega \equiv \frac{\# \text{ part. spredt inn i romvinkel } d\Omega \text{ pr. tidsenhet}}{\text{innfallende intensitet}}. \quad (4.24)$$

Dimensjonen til $\sigma(\Omega)$ er: $[\sigma(\Omega)] = \frac{s^{-1}}{m^{-2}s^{-1}} = m^2$. Etersom kreftene vi betrakter er sentrale, har vi symmetri om aksene som angir den innkommende retningen. Dermed er systemet uavhengig av asimutalvinkelen φ (vi sier at systemet er invariant under rotasjoner om polaraksen) og vi kan betrakte romvinklelementer som infinitesimalt tynne "ringer":

$$d\Omega = 2\pi \sin \Theta \cdot d\Theta,$$

der Θ er spredningsvinkelen.

Vi ser på tilfellet med frastøtende potensial.



Vi har brukt Θ til å benevne spredningsvinkelen og kaller koordinaten som betegner vinkelen mellom partikkelens posisjonsvektor og polaraksen til enhver tid for θ (merk forskjellen!). Det er hensiktsmessig å innføre **støtparameteren** s (se figuren over). Vi uttrykker dreieimpulsen "lenge før" støtet:

$$l = |\vec{r} \times \vec{p}| \stackrel{r \rightarrow \infty}{=} mv_0 s = m \sqrt{\frac{2E}{m}} s = s \sqrt{2mE}.$$

Med sentrale krefter fant vi at dreieimpulsen er bevart (både θ og φ er sykliske koordinater i systemet jf. kapitlet om Lagrangeformalisme). Anta at ulike verdier av s gir ulike spredningsretninger. Ved fiksert E og s er spredningsvinkelen Θ dermed entydig bestemt (jf. kvantemekanikken, der θ kan måles med en viss sannsynlighet. Støtparameteren s kan ikke være skarpt definert i en kvantemekanisk beskrivelse). Antatt et entydig forhold mellom Θ og s skriver vi:

$$\# \text{ partikler inn mellom } s \text{ og } s + ds = \# \text{ partikler ut mellom } \Theta \text{ og } \Theta + d\Theta$$

$$|I dA| = |I \sigma(\Omega) d\Omega|$$

$$I \cdot 2\pi s |ds| = 2\pi \sigma(\Theta) I \sin \Theta |d\Theta|;$$

ettersom vi ofte har $ds/d\Theta < 0$, må vi sette $|ds|$ og $|d\Theta|$. Vi får

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin \Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right| \quad (4.25)$$

Sammenhengen mellom s og Θ kan finnes ved å gå tilbake til uttrykket vi hadde på side 43:

$$\theta(r) = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} + \theta_0.$$

Vi definerer oss vinkelen Ψ som er hensiktsmessig i regningen:



Av figuren ser vi at

$$\Theta + 2\Psi = \pi.$$

La $r_0 = \infty$ tilsvare $\theta_0 = \pi$ og $r = r_m$ tilsvare $\theta = \pi - \Psi$. Da har vi

$$\begin{aligned} \pi - \Psi &= \int_{\infty}^{r_m} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} + \pi \\ \Psi &= \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}}. \end{aligned}$$

Hadde at $l = s\sqrt{2mE}$, så $2mE/l^2 = 1/s^2$. Videre er $2mV/l^2 = V/E s^2$, så

$$\Psi = \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{1}{s^2} - \frac{V}{E s^2} - \frac{1}{r^2}}} = \int_{r_m}^{\infty} \frac{s dr'}{r'^2 \sqrt{1 - \frac{V}{E} - \frac{s^2}{r^2}}}.$$

Substitusjon: $u \equiv 1/r$, $du = -dr/r^2$, $u_m = 1/r_m$:

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_0^{u_m} \frac{s du}{\sqrt{1 - V/E - s^2 u^2}} \\ \Theta(z) &= \pi - 2 \int_0^{u_m} \frac{s du}{\sqrt{1 - V/E - s^2 u^2}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Vi kjenner her u_m . Den er gitt ved $1 - V/E - s^2 u_m^2 = 0$ siden $dr = r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} \sqrt{1 - V/E - s^2 u^2}} d\theta$, og i perihel er $d\theta/dr = 0$.

Som regel må $\Theta(s)$ beregnes med numeriske metoder, men vi skal se på et viktig eksempel der banen kan beregnes analytisk. Da kan vi også nokså enkelt beregne $s(\Theta)$ og $\sigma(\Theta)$.

4.6.1 Repulsiv spredning av ladde partikler i Coulombfeltet

Vi skal se på et viktig eksempel på spredning i sentralt kraftfelt, nemlig den frastøtende kraften på en ladning i Coulombfeltet fra en annen partikkel. Dette er en litt forenklet utgave av det systemet Rutherford betraktet i sitt berømte eksperiment der han skjøt α -partikler (ladning $2e$) mot en gullfolie der kjernene (med ladningen $79e$) er mye tyngre enn de innkommende α -partiklene (Du har sikkert lært at systemer i atommålestokk må angripes kvantemekanisk, men vi skal se at i akkurat dette tilfellet gir vår klassiske behandling korrekt svar!).

Vi betrakter positivt ladde partikler med ladning henholdsvis Ze og $Z'e$:



Vi antar vider at $M \gg m$, slik at massesenteret med god tilnærming er identisk med posisjonen til M . Vi antar at massesenteret ligger i ro i vårt referansesystem (lab.systemet). Coulombkraften og -potensialet er

$$V(r) = \frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$f(r) = \frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Vi ser at potensialet er det samme som det vi behandlet i avsnittet om Keplerproblemet; $V = -k/r$ med $k = -ZZ'/4\pi\epsilon_0$. Vi har at $E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2}mv_0^2 > 0$, så banen blir en hyperbel med eksentrisitet

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m} \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{ZZ'e^2} \right)^2} > 1.$$

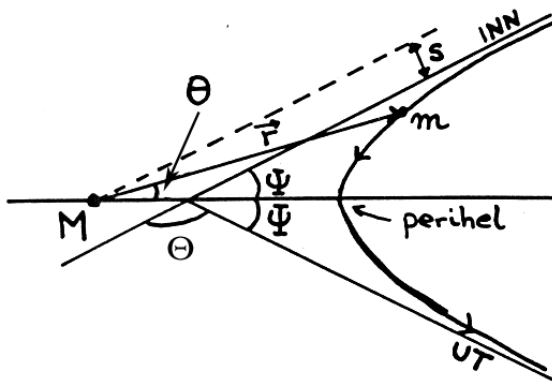
Da $l^2 = s^2 \cdot 2mE$, blir $2El^2/m = 4E^2s^2$. På side 44 skrev vi kjeglesnittet som

$$\frac{p}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta,$$

som er gyldig både for hyperbel, parabel og ellipse, da $p = l^2/mk$ for alle disse banetyperne. Her er $k < 0$, dvs. $p < 0$. Vi kan da skrive:

$$\frac{|p|}{r} = \epsilon \cos \theta - 1, \quad (\cos \theta \geq 1/\epsilon)$$

$$|p| = \frac{l^2}{m|k|} = \frac{l^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{m \cdot ZZ'e^2}$$



Banen,

$$r = \frac{|p|}{\epsilon \cos \theta - 1}$$

har asymptotene

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow \theta \rightarrow (\pm)\Psi \Rightarrow \epsilon \cos \Psi - 1 = 0 \Rightarrow \cos \Psi = 1/\epsilon.$$

Spredningsvinkelen (se figuren) har vi: $\Theta = \pi - 2\Psi$, dermed

$$\cos \Psi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2} \right) = \sin \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\epsilon},$$

så

$$\begin{aligned}
\cot^2 \frac{\Theta}{2} &= \frac{\cos^2 \frac{\Theta}{2}}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} = \frac{1 - \sin^2 \frac{\Theta}{2}}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} = \frac{1 - 1/\epsilon^2}{1/\epsilon^2} = \epsilon^2 - 1 = \left(2Es \frac{4\pi\epsilon_0}{ZZ'e^2}\right)^2 \\
&\Downarrow \\
\cot \frac{\Theta}{2} &= 4\pi\epsilon_0 \frac{2Es}{ZZ'e^2} \\
&\Downarrow \\
s &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZZ'e^2}{2E} \cot \frac{\Theta}{2} = s(\Theta, E) \\
&\Downarrow \\
\left| \frac{ds}{d\Theta} \right| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZZ'e^2}{2E} \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}}
\end{aligned}$$

Vi trekke ut kvadratrotten slik vi har gjort over da $0 \leq \Theta \leq \pi$ medfører at $\cot \frac{\Theta}{2} \geq 0$. Ved ligning (4.25):

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin \Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right| = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZZ'e^2}{2E} \right)^2 \frac{\cot \frac{\Theta}{2}}{2 \sin \Theta \sin^2 \frac{\Theta}{2}}.$$

Vi bruker at $\cot \frac{\Theta}{2} = \cos \frac{\Theta}{2} / \sin \frac{\Theta}{2}$ og at $\sin \Theta = 2 \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2}$ og får:

$$\sigma(\Theta) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{ZZ'e^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} \quad (4.27)$$

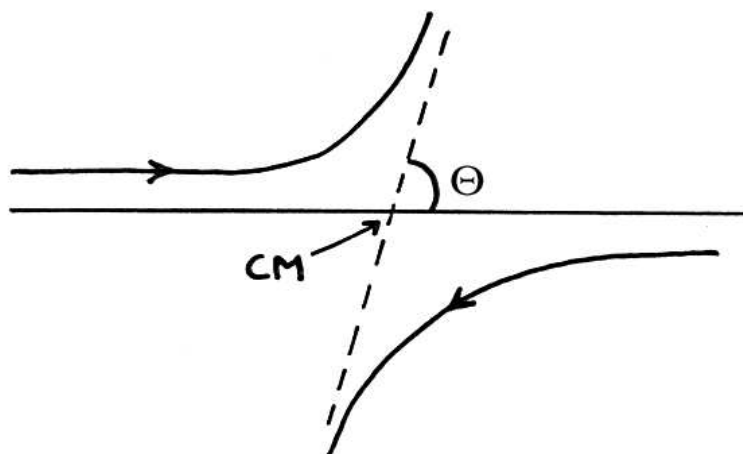
Overraskende nok gir ikke-relativistisk kvantemekanikk nøyaktig samme svar! (Men merk at en i kvantemekanikken snakker om en *vinkelfordeling*, mens vi her har tatt utgangspunkt i et entydig forhold mellom støtparameter og spredningsvinkel. En skarp støtparameter gir ikke mening kvantemekanisk.)

Det **totale spredningstverrsnittet** fås ved integrasjon over hele romvinkelrommet:

$$\sigma = \int \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\Theta) \sin \Theta d\Theta.$$

Med et Coulombpotensial vil $\sigma(\Theta) \sim \sin^{-4}(\Theta/2)$, og integralet over divergerer. Dette skyldes at Coulombkraften har lang rekkevidde, partikkelbanen blir avbøyd selv om støtparameteren s er aldri så stor, og vi får bidrag til σ for alle s ! I realistiske systemer vil ladninger som regel være skjermet av andre ladninger slik at systemet ser nøytralt ut fra tilstrekkelig stor avstand. Da får Coulombvekselvirkningen endelig rekkevidde, og spredningstverrsnittet blir endelig. I kvantemekanikken vil en finne at spredningstverrsnittet er endelig dersom $V(r) \rightarrow 0$ forttere enn $1/r^2$ når $r \rightarrow \infty$. Potensialet omkring en skjermet ladning beskrives av det såkalte Yukawa-potensialet, som avtar eksponensielt.

En kommentar til beregningene over: Vi antok at $M \gg m$ og at massesenteret lå tilnærmet i ro sett fra lab.systemet. Rutherford's formel gjelder alltid i CM-systemet der Θ er vinkelen mellom inn- og utgående partikkel.



I lab.systemet er vinkelen mellom inn- og utgående partikkel generelt forskjellig fra Θ .

5 Stive legemers kinematikk

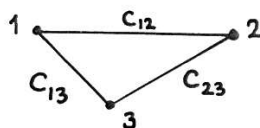
Vi skal i dette kapitlet betrakte bevegelsene til såkalte stive legemer. Svært mange mekaniske systemer vil inneholde legemer som er (tilnærmet) stive, og det er også slike legemer Einstein omtaler i sin spesielle relativitetsteori (som vi kommer tilbake til).

Vi definerer et **stivt legeme** som et system av punktmasser underlagt holonome føringer som uttrykker at avstanden mellom to vilkårlig valgte partikler er konstant. **Kinematikken** omhandler bevegelsens natur og karakter.

5.1 Uavhengige koordinater

Et stivt legeme med N partikler har i utgangspunktet $3N$ frihetsgrader. Antallet frihetsgrader blir imidlertid kraftig redusert av føringene $r_{ij} = c_{ij} = \text{konstant}$. Antallet føringer er $1 + 2 + \dots + N = \frac{1}{2}N(N - 1)$, men ikke alle disse er uavhengige.

For å spesifisere posisjonen til et vilkårlig punkt i legemet, må vi kjenne posisjonen til 3 punkter i legemet (som ikke ligger langs én og samme linje). Alle punkter i legemet er derfor entydig bestemt dersom vi kjenner 3 spesifiserte punkter, pluss føringene $r_{ij} = c_{ij}$. De tre punktene er imidlertid bundet seg imellom av tre føringer, så antall frihetsgrader for legemet reduseres fra 9 til 6:



Figur 13: Legemets posisjon er bestemt dersom vi kjenner tre punkter og føringene de er underlagt

- 3 koordinater for å spesifisere punkt 1
- 2 koordinater for å spesifisere punkt 2 (som må ligge på en kuleflate med radius $r_{12} = c_{12}$ sentrert i punkt 1).
- 1 koordinat for å spesifisere punkt 3 (som må ligge på en sirkel omkring akse mellom 1 og 2 slik at $r_{13} = c_{13}$ og $r_{23} = c_{23}$ (se fig. 13).

La x, y, z være akser i et fast, “eksternt” koordinatsystem og x', y', z' aksene som ligger fast i det stive legemet (se fig. 14).

Foruten 3 koordinater til å spesifisere origo i (x', y', z') -systemet relativt til (x, y, z) -systemet, trengs *retningene* til x', y' og z' i forhold til x, y, z . Det er hensiktsmessig å bruke “retningscosinusene” $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ for å spesifisere retningen til x' :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \cos(\vec{i}', \vec{i}) = \vec{i}' \cdot \vec{i} \\ \alpha_2 &= \cos(\vec{i}', \vec{j}) = \vec{i}' \cdot \vec{j} \\ \alpha_3 &= \cos(\vec{i}', \vec{k}) = \vec{i}' \cdot \vec{k}\end{aligned}$$

og tilsvarende oppskrift med β for \vec{j}' og γ for \vec{k}' . Ettersom

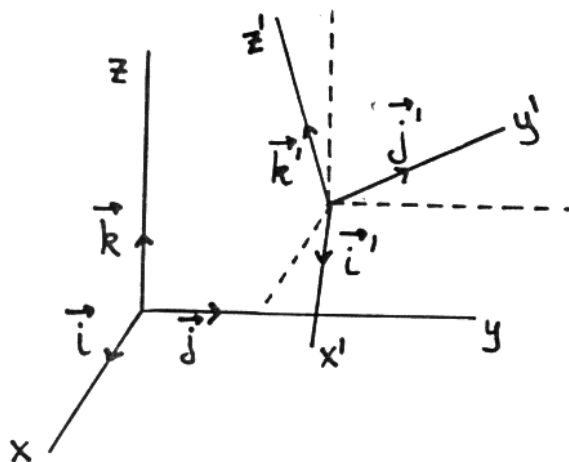
$$\vec{i}' = (\vec{i}' \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{i}' \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{i}' \cdot \vec{k})\vec{k},$$

har vi altså:

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k} \\ \vec{j}' &= \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k} \\ \vec{k}' &= \gamma_1 \vec{i} + \gamma_2 \vec{j} + \gamma_3 \vec{k}\end{aligned} \tag{5.1}$$

Vi kan selvsagt invertere denne prosessen, dvs. uttrykke \vec{i}, \vec{j} og \vec{k} ved sine komponenter langs \vec{i}', \vec{j}' og \vec{k}' :

$$\vec{i} = (\vec{i} \cdot \vec{i}')\vec{i}' + (\vec{i} \cdot \vec{j}')\vec{j}' + (\vec{i} \cdot \vec{k}')\vec{k}' = \alpha_1 \vec{i}' + \beta_1 \vec{j}' + \gamma_1 \vec{k}'$$



Figur 14: Legemets posisjon er gitt av tre punkter når vi kjenner føringene

osv.

Retningscosinusene gir sammenhengen mellom vilkårlige vektorer i de to systemene (x, y, z) og (x', y', z') . (NB: Anta nå felles origo i de to systemene!). For eksempel har en posisjonsvektor \vec{r} x' -komponent gitt ved

$$x' = \vec{r} \cdot \vec{i}' = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot \vec{i}' = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,$$

og en vilkårlig vektor \vec{G} har y' -komponent

$$G_{y'} = \vec{G} \cdot \vec{j}' = (G_x\vec{i} + G_y\vec{j} + G_z\vec{k}) \cdot \vec{j}' = \beta_1 G_x + \beta_2 G_y + \beta_3 G_z.$$

Vi har 9 retningscosinuser, men har sett at vi bare trenger 3 koordinater for å bestemme legemets orientering entydig. Reduksjonen kan vi gjøre ved hjelp av ortogonalitetsbetingelser:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i}' &= (\alpha_1\vec{i}' + \beta_1\vec{j}' + \gamma_1\vec{k}')^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j}' &= (\alpha_1\vec{i}' + \beta_1\vec{j}' + \gamma_1\vec{k}') \cdot (\alpha_2\vec{i}' + \beta_2\vec{j}' + \gamma_2\vec{k}') = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0, \end{aligned}$$

etc. På kompakt form:

$$\alpha_l \alpha_m + \beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m = \delta_{lm} \quad (5.2)$$

Vi kan altså *ikke* bruke retningskosinuserne som generaliserte koordinater i f.eks. en Lagrangeformulering, ettersom de ikke er uavhengige (vi skal se at vi kan formulere et sett av tre uavhengige funksjoner av retningskosinuser, jf. Eulervinklener). De er likevel nyttige størrelser for å beskrive sammenhengen mellom kartesiske koordinatsystemer, [...].

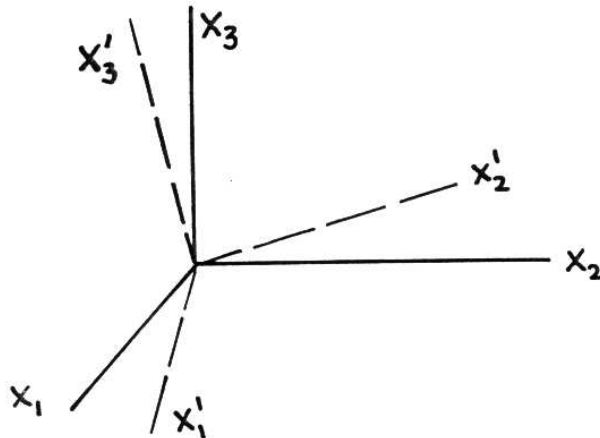
5.2 Ortogonale transformasjoner

Vi innfører nå en mer hensiktsmessig notasjon ved å la $x, y, z \rightarrow x_1, x_2, x_3$. Transformasjonene blir da:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\ x'_2 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \\ x'_3 &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 \end{aligned}$$

Dette er en **lineær transformasjon** som generelt kan skrives:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}$$



Figur 15: Ortogonal Transformasjon

der a_{ij} er konstante koeffisienter (dvs. uavhengige av x, x'). Med summekonvensjon:

$$x'_i = a_{ij}x_j, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (5.3)$$

Lengden av \vec{r} må være upåvirket av transformasjonen (som svarer til en rotasjon), dvs

$$x'_i x'_i = x_i x_i \Rightarrow a_{ij} a_{ik} x_j x_k = x_i x_i$$

som gir

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad (5.4)$$

Om vi setter inn α, β, γ i (5.4), ser vi umiddelbart at dette er akkurat de 6 betingelsene fra ligning (5.2). Vi definerer transformasjonsmatrisen,

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

med matriseelementer a_{ij} .

Eksempel: To dimensjoner

Transformasjonsmatrise:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Ortogonalitetsbetingelser, 3 stk.:

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$$

Med 4 matriseelementer og 3 orthogonalitetsbetingelser, har vi 1 uavhengig størrelse som vi betrakter som rotasjonsvinkelen φ . For φ har vi (se figur):

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi \\ x'_2 &= -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \end{aligned}$$

dvs.

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \varphi, & a_{12} &= \sin \varphi \\ a_{21} &= -\sin \varphi, & a_{22} &= \cos \varphi \end{aligned}$$

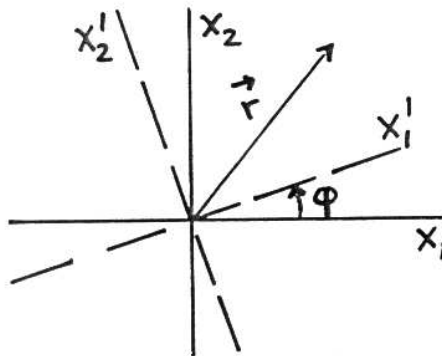
gir:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Vi sjekker for orthogonalitet:

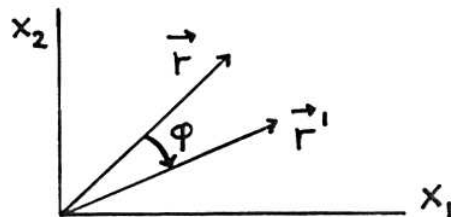
$$\begin{aligned} a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} &= 1 \implies \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \\ a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} &= 1 \implies \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 1 \implies \cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi = 0 \end{aligned}$$

OK!



Transformasjonsligningen $\vec{r}'' = \mathbb{A}\vec{r}'$ kan betraktes på to måter:

1. **Passiv betraktningssmåte:** \mathbb{A} er en operator som roterer *koordinatsystemet* (mot klokka i eksempelet på forrige side), mens vektoren \vec{r}' er i ro. Vi finner dermed komponentene av \vec{r}' i det roterte koordinatsystemet.
2. **Aktiv betraktningssmåte:** \mathbb{A} oppfattes som en operator som roterer *vektoren* \vec{r}' mens koordinatsystemet ligger fast. Vi finner dermed en ny vektor \vec{r}'' i det uendrede koordinatsystemet (vi må rotere vektoren med klokka for å få samme ligninger $\vec{r}'' = \mathbb{A}\vec{r}'$ som ovenfor - fig. 16).



Figur 16:

5.3 Formelle egenskaper til transformasjonsmatrisen

Vi ser på to suksessive transformasjoner:

$$\vec{r} \xrightarrow{\mathbb{B}} \vec{r}' \xrightarrow{\mathbb{A}} \vec{r}''$$

Med summekonvensjon skriver vi dette som

$$\begin{aligned} x'_k &= b_{kj}x_j \\ x''_i &= a_{ik}x'_k \\ &\Downarrow \\ x''_i &= a_{ik}b_{kj}x_j \equiv c_{ij}x_j; \quad c_{ij} = a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

Vi ser herav at to ortogonale transformasjoner \mathbb{A} og \mathbb{B} etter hverandre er ekvivalent med én transformasjon \mathbb{C} slik at $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$. Det kan vises at også \mathbb{C} er en ortogonal transformasjon. Generelt er

$$\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A},$$

så transformasjonen er **ikke-kommutativ**. Videre er

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C}),$$

så transformasjonen er **assosiativ**.

Så langt har vi jobbet med kvadratiske matriser. Vi innfører nå søylematriser:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}.$$

Matrisen $\mathbb{A}\mathbf{x}$ blir dermed en søylematrise med elementer $(\mathbb{A}\mathbf{x})_i = a_{ij}x_j = x'_i = (x')_i$, dvs:

$$\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x}.$$

Legg merke til at vi her ikke har gjort annet enn å skrive vektoren \vec{r}' som en søylematrise \mathbf{x} der antall elementer tilsvarende dimensjonaliteten til rommet vi betrakter.

Den inverse transformasjonen skriver vi som \mathbb{A}^{-1} , med matriseelementer a_{ij}^{-1} (NB: a_{ij}^{-1} er (i, j) -elementet av \mathbb{A}^{-1} , ikke “ $1/a_{ij}$ ”). Transformasjonen \mathbb{A}^{-1} skal bringe \mathbf{x} tilbake til \mathbf{x}' :

$$\begin{aligned} x_i &= a_{ij}^{-1} x'_j \\ \Rightarrow x'_k &= a_{ki} x_i = a_{ki} a_{ij}^{-1} x'_j \\ \Rightarrow \underbrace{a_{ki} a_{ij}^{-1}}_{(\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})_{kj}} &= \underbrace{\delta_{kj}}_{\mathbb{I}_{kj}} \end{aligned}$$

altså:

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I},$$

der \mathbb{I} er enhetsmatrisen, her i 3×3 -utgaven:

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Av $x_i = a_{ij}^{-1} x'_j = a_{ij}^{-1} a_{jk} x_k$ fås $a_{ij}^{-1} a_{jk} = \delta_{ik}$, dvs. $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}$, dvs

$\mathbb{A} \text{ og } \mathbb{A}^{-1} \text{ kommuterer!}$

(5.5)

Vi ser nå på dobbeltsummen $a_{kl} a_{ki} a_{ij}^{-1}$. Ved å bruke ortogonalitetsbetingelsene $a_{kl} a_{ki} = \delta_{il}$ blir dette lik a_{lj}^{-1} . Alternativt kan vi bruke at $a_{ki} a_{ij}^{-1} = \delta_{kj}$ og dermed blir dobbeltsummen lik a_{jl} . Altså: $a_{lj}^{-1} = a_{jl}$. Men $a_{jl} = \tilde{a}_{lj}$, altså (l, j) -elementet av den **transponerte matrisen** $\tilde{\mathbb{A}}$. Dette betyr at

$\mathbb{A}^{-1} = \tilde{\mathbb{A}} \text{ og } \tilde{\mathbb{A}}\mathbb{A} = \mathbb{I} \text{ for ortogonale matriser.}$

(5.6)

Med summekonvensjon skriver vi $\tilde{\mathbb{A}}\mathbb{A} = \mathbb{I} \Rightarrow \tilde{a}_{ij} a_{jk} = \delta_{ik}$ og $\mathbb{A}\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{I} \Rightarrow a_{ij} \tilde{a}_{jk} = \delta_{ik}$, så:

$$\begin{aligned} a_{ji} a_{jk} &= \delta_{ik} && \text{sum over første indeks} \\ a_{ij} a_{kj} &= \delta_{ik} && \text{sum over andre indeks} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Vi betrakter endelig determinanten $|\mathbb{A}|$ til den (forutsatt kvadratiske) matrisen \mathbb{A} . Fra matematikken i 1. klasse husker vi at

$$|\mathbb{A}\mathbb{B}| = |\mathbb{A}| \cdot |\mathbb{B}|.$$

Ettersom $\tilde{\mathbb{A}}\mathbb{A} = \mathbb{I}$, blir $|\tilde{\mathbb{A}}| \cdot |\mathbb{A}| = 1$, og da determinanten ikke avhenger av ombytte rader \leftrightarrow kolonner, får vi $|\tilde{\mathbb{A}}| = |\mathbb{A}|$, og dermed

$$|\mathbb{A}|^2 = 1 \text{ for alle ortogonale matriser.} \quad (5.8)$$

Dette medfører at $|\mathbb{A}| = e^{i\theta}$, med $0 \leq \theta \leq 2\pi$. $|\mathbb{A}|$ er reell, så $|\mathbb{A}| = \pm 1$.

5.4 Eulervinklene

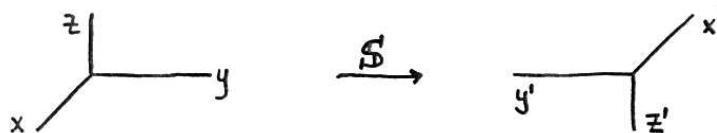
Vi fant i avsnitt 5.2 at de 9 a_{ij} ikke er brukbare som generaliserte koordinater ettersom et rent roterende legeme med ett fast punkt kun har 3 frihetsgrader, og de 9 koordinatene dermed ikke kan være uavhengige. Med 6 ortogonalitetsbetingelser reduserte vi antallet uavhengige størrelser til 3.

I tillegg har vi alltid én ekstra betingelse: transformasjonen må være fysisk mulig. Matematisk vil det si at den må kunne fremgå kontinuerlig fra enhetsmatrisen (som svarer til null rotasjon), noe som medfører at vi må ha $|\mathbb{A}| = |\mathbb{I}| = +1$. Vi kan *ikke* ha $|\mathbb{A}| = -1$ dersom transformasjonen skal være fysisk realiserbar.

For eksempel innebærer matrisen

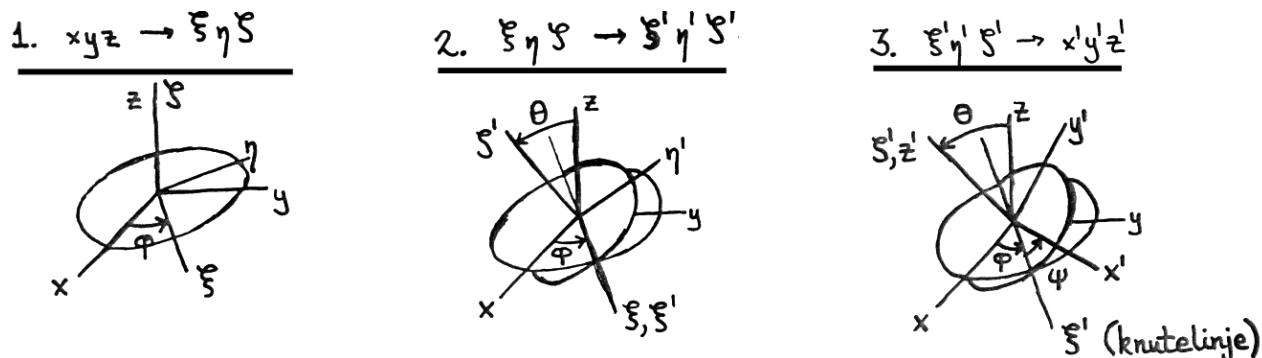
$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

en refleksjon av koordinataksene: $\mathbf{x}' = \mathbb{S}\mathbf{x} \Rightarrow x' = -x, y' = -y, z' = -z$. Denne transformasjonen må utelates, da $|\mathbb{S}| = -1$, og det er jo rimelig, ettersom \mathbb{S} gjør et "høyrehåndssystem" om til et "venstrehåndssystem" (se figur 17).



Figur 17:

Vi må finne 3 uavhengige parametre for å spesifisere orienteringen til det stive legemet. Disse må være slik at den tilhørende ortogonale transformasjonen \mathbb{A} har $|\mathbb{A}| = +1$. Det mest vanlige valget er de såkalte **Eulervinklene**, som er tre suksessive rotasjonsvinkler (se fig 18):



Figur 18: Eulervinklene

1. $xyz \rightarrow \xi\eta\zeta$ ved rotasjon ϕ i positiv dreieretning omkring z -aksen. $\mathbf{x}'' = \mathbb{D}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

2. $\xi\eta\zeta \rightarrow \xi'\eta'\zeta'$ ved rotasjon θ i positiv dreieretning omkring ξ -aksen. $\mathbf{x}''' = \mathbb{C}\mathbf{x}''$, $\mathbf{x}''' = \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix}$.

3. $\xi'\eta'\zeta' \rightarrow x'y'z'$ ved rotasjon ψ i positiv dreieretning om ζ' -aksen. $\mathbf{x}' = \mathbb{B}\mathbf{x}'''$, $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$.

\mathbb{D} beskriver rotasjon omkring z -aksen:

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.9}$$

\mathbb{C} beskriver rotasjon omkring ξ -aksen (knutelinjen):

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

\mathbb{B} beskriver rotasjon omkring z' -aksen:

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

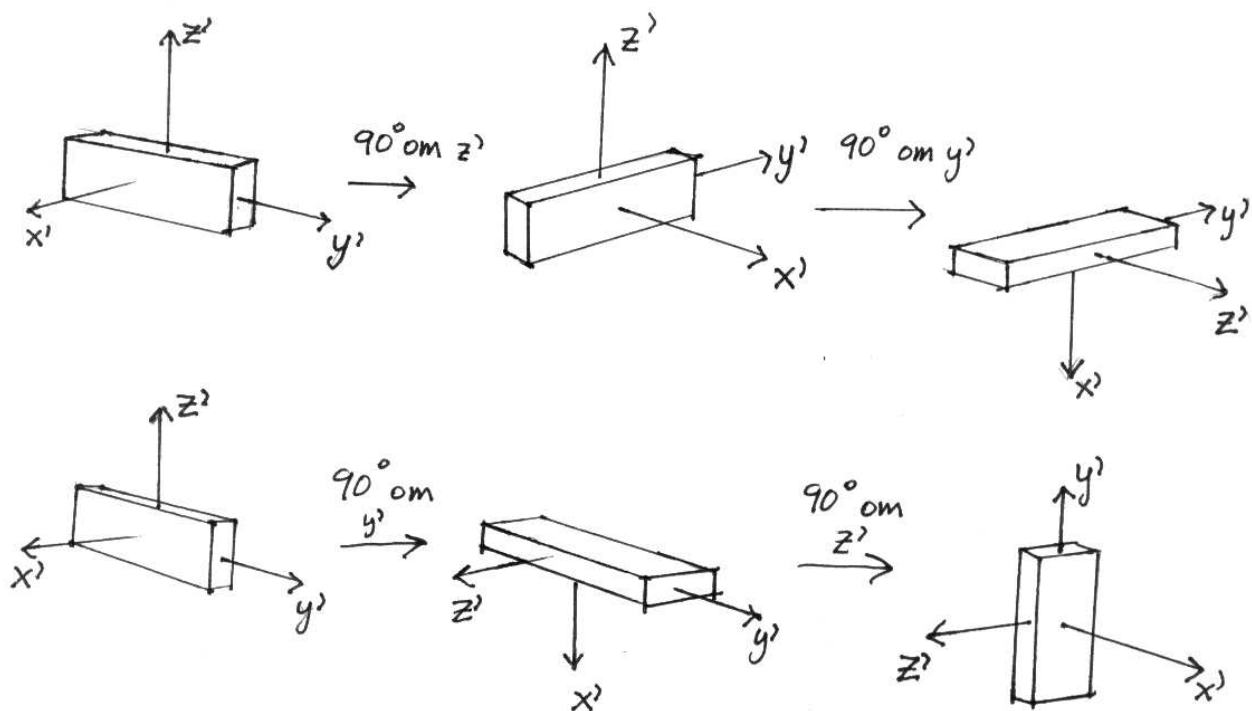
og vi får produktet $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{D}$:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi - \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Den inverse transformasjonen $\mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{x}'$ er gitt ved $\mathbb{A}^{-1} = \tilde{\mathbb{A}}$ som fås ved å la rader og kolonner bytte plass i \mathbb{A} jf. (5.6).

5.5 Infinitesimale transformasjoner

To påfølgende rotasjoner kan beskrives med et produkt av to matriser, $\mathbb{A}\mathbb{B}$. Vi vet at matrisemultiplikasjon generelt ikke er kommutativ, dvs. $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$. Dette ser vi best ved et eksempel som vist i figur 19.



Figur 19: Endelige rotasjoner kommuterer generelt ikke.

Så langt har vi sett på endelige transformasjoner. Vi skal se at i motsetning til de fleste endelige transformasjoner, er **infinitesimale transformasjoner** kommutative. Betrakt, på tensorform, den infinitesimale transformasjonen

$$x'_i = x_i + e_{ij}x_j = (\delta_{ij} + e_{ij})x_j, \quad e_{ij} \ll 1.$$

På matriseform:

$$\mathbf{x}' = (\mathbb{I} + \mathbb{E})\mathbf{x}.$$

Vi ser så på to suksessive infinitesimale transformasjoner:

$$\begin{aligned} (\mathbb{I} + \mathbb{E}_1)(\mathbb{I} + \mathbb{E}_2) &= \mathbb{I} + \mathbb{E}_1\mathbb{I} + \mathbb{I}\mathbb{E}_2 + \dots \\ &= \mathbb{I} + \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2, \end{aligned}$$

ettersom ledd av 2. orden i infinitesimale størrelser alltid kan neglisjeres (at \mathbb{E} er en “infinitesimal” transformasjon betyr her nettopp at e_{ij} er så små at ledd $\mathcal{O}(e_{ij}^2)$ kan neglisjeres uten korreksjoner). Ettersom $\mathbb{I} + \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 = \mathbb{I} + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_1$, har vi at

$$(\mathbb{I} + \mathbb{E}_1)(\mathbb{I} + \mathbb{E}_2) = (\mathbb{I} + \mathbb{E}_2)(\mathbb{I} + \mathbb{E}_1), \quad (5.13)$$

dvs.

Infinitesimale transformasjoner er kommutative

(5.14)

Vi ser umiddelbart at den inverse transformasjonen må være

$$\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I} - \mathbb{E},$$

fordi $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = (\mathbb{I} + \mathbb{E})(\mathbb{I} - \mathbb{E}) = \mathbb{I}$, der vi igjen neglisjerer ledd $\mathcal{O}(e^2)$. Vi vet fra før at transformasjonsmatrisen skal være ortogonal, dvs.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{A}} \equiv \mathbb{I} + \tilde{\mathbb{E}} = \mathbb{A}^{-1} &\Rightarrow \tilde{\mathbb{E}} = -\mathbb{E} \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$\tilde{e}_{ij} \equiv e_{ji} = -e_{ij}, \quad (5.15)$$

dvs. at \mathbb{E} er antisymmetrisk. En generell infinitesimal antisymmetrisk matrise har dermed kun tre uavhengige elementer og kan skrives på formen

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

og dermed:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' - \mathbf{x} &\equiv d\mathbf{x} = \mathbb{E}\mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

På komponentform (med summekonvensjon):

$$dx_i = \epsilon_{ijk} x_j d\Omega_k$$

eventuelt

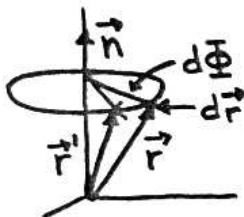
$d\vec{r} = \vec{r} \times d\vec{\Omega}.$

(5.17)

Merk at størrelsen $d\vec{\Omega}$ er en differensiell vektor (*ikke* differensialet av en endelig vektor). Vi sammenligner med bevegelsesligningene for rotasjon vi fant i kapittel 2.6.2, og ser at vi kan tolke $d\vec{\Omega}$ fysisk som en liten endring i rotasjonsvinkel ved å skrive

$$d\vec{\Omega} = \vec{n}d\Phi,$$

der $d\Phi$ er en liten vinkel (se fig. 20).



Figur 20:

5.6 Tidsendring av en vektor

La oss nå bruke resultatet fra forrige avsnitt til å se på tidsendring av en vektor. Betrakt et legeme som roterer med vinkelhastighet $\vec{\omega} = \frac{d\Omega}{dt}$ sett fra et system utenfor legemet. På grunn av rotasjon av legemets koordinatsystem i det eksterne systemet, vil endringen av en vilkårlig vektor \vec{G} ($= \vec{r}, \vec{v}, \vec{L}$ etc.) oppleves forskjellig i dette eksterne systemet og i et system som ligger fast i legemet: $(d\vec{G})_{\text{body}} \neq (d\vec{G})_{\text{space}}$

Betrakt en vektor \vec{G} fiksert i legemet, dvs. $(d\vec{G})_{\text{body}} = 0$. Da blir

$$(d\vec{G})_{\text{space}} = (d\vec{G})_{\text{rot.}} = d\vec{\Omega} \times \vec{G}.$$

Den naturlige generaliseringen er

$$(d\vec{G})_{\text{space}} = (d\vec{G})_{\text{body}} + d\vec{\Omega} \times \vec{G}.$$

Tidsendringen er da relatert ved

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{\text{space}} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times \vec{G}, \quad (5.18)$$

der $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$ er instantan vinkelhastighet. Da \vec{G} er en generell vektor, kan vi skrive operatorrelasjonen:

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{space}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times} \quad (5.19)$$

For eksempel: $\vec{G} = \vec{r} \implies \vec{v}_{\text{space}} = \vec{v}_{\text{body}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Mer formell utledning av $\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{space}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times$:

Betrakt komponent G_i av \vec{G} langs x_i -aksen i rommet:

$$G_i = a_{ij}^{-1} G'_j = \tilde{a}_{ij} G'_j = a_{ji} G'_j.$$

I løpet av dt endrer både G'_j og a_{ji} seg. Differensiering gir:

$$dG_i = a_{ji} dG'_j + da_{ji} G'_j$$

Anta at ved tidspunkt $t = 0$ er (x, y, z) sammenfallende med (x', y', z') . Det medfører at vektorkomponentene av \vec{G} er like, $G_j = G'_j$, mens differensialene er ulike: $a_{ji} dG'_j = dG'_i$. Transformasjons matrisen \mathbb{A} er lik \mathbb{I} ved $t = 0$, men endres til $\tilde{\mathbb{I}} + \mathbb{E}$ i løpet av dt . Dermed:

$$da_{ji} = (\tilde{\mathbb{E}})_{ij} = -(\mathbb{E})_{ij},$$

ettersom \mathbb{E} er antisymmetrisk, som vi viste tidligere. Vi uttrykker nå e_{ij} ved hjelp av Levi-Civita-tensoren:

$$-e_{ij} = -\epsilon_{ijk} d\Omega_k = \epsilon_{ikj} d\Omega_k.$$

Vi kan lett sjekke at dette stemmer ved å sammenligne med matrisen i (5.16). Uttrykket for dG_i kan vi nå skrive på formen:

$$\begin{aligned} dG_i &= dG'_i + \epsilon_{ikj} d\Omega_k G_j \\ &= dG'_i + \left(d\vec{\Omega} \times \vec{G} \right)_i, \end{aligned}$$

som gir

$$d\vec{G} = d\vec{G}' + d\vec{\Omega} \times \vec{G},$$

som er det samme som vi fant tidligere.

5.6.1 Komponentene $\vec{\omega}$ langs legemets akser

Vi ønsker videre å finne komponentene av $\vec{\omega}$ langs legemets akser x', y' , og z' . Rotasjonen som svarer til $\vec{\omega}$ kan oppfattes som 3 suksessive rotasjoner med vinkelhastigheter henholdsvis $\omega_\phi = \dot{\phi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$ og $\omega_\psi = \dot{\psi}$. Vi bruker nå teorien fra tidligere for å finne komponentene:

- $\vec{\omega}_\phi$ svarer til rotasjon om z -aksen, dvs. $\vec{\omega}_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$, og:

$$\vec{\omega}'_\phi = \mathbb{A}\vec{\omega}_\phi.$$

Vi fant \mathbb{A} i (5.12), og ved å sette inn i denne får vi

$$(\omega_\phi)_{x'} = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \quad (\omega_\phi)_{y'} = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \quad (\omega_\phi)_{z'} = \dot{\phi} \cos \theta.$$

- $\vec{\omega}_\theta$ tilsvarer rotasjon om ξ -aksen, dvs. $\vec{\omega}_\theta = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, og transformasjonen blir

$$\vec{\omega}'_\theta = \mathbb{B}\vec{\omega}_\theta.$$

Med \mathbb{B} fra avsnitt om Eulervinklene, får vi:

$$(\omega_\theta)_{x'} = \dot{\theta} \cos \psi, \quad (\omega_\theta)_{y'} = -\dot{\theta} \sin \psi, \quad (\omega_\theta)_{z'} = 0$$

- Da $\vec{\omega}_\psi$ tilsvarer rotasjon om ζ' , og dermed omkring z' , er ingen transformasjon nødvendig:

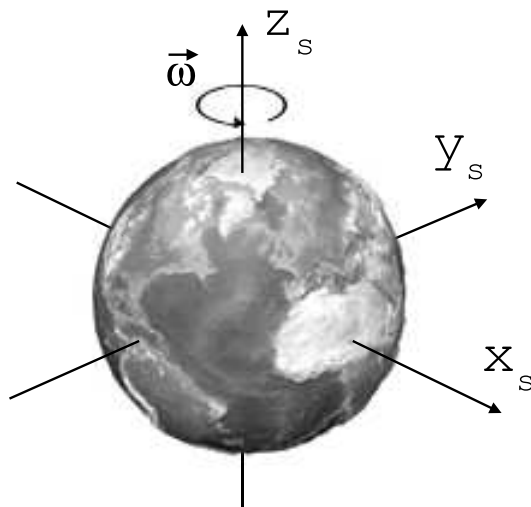
$$\vec{\omega}'_\psi = \vec{\omega}_\psi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}.$$

Legges alle de tre sammen, får vi:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_{y'} &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_{z'} &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \tag{5.20}$$

5.7 Corioliskraften

Vi går tilbake til $\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{space}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times$. La “space”-systemet være et (tilnærmet) inertialsystem fiksert f.eks. i forhold til våre nærmeste stjerner, og la dette systemet kjennetegnes med indeks s . “Body”-systemet har akser som roterer med jorda, som vi antar er et stivt legeme, og kjennetegnes ved indeks r (for “relativ”). Se fig (21). Vi antar at vi kan neglisjere tidsavhengigheten til $\vec{\omega}$.



Figur 21: Jordens rotasjon i to forskjellige koordinatsystemer. $\vec{\omega}$ er antatt konstant.

Vi anvender $(\frac{d}{dt})_{\text{space}} = (\frac{d}{dt})_{\text{body}} + \vec{\omega} \times$ på \vec{r} :

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

og setter deretter inn \vec{v}_s :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\vec{v}_s\right)_s &= \left(\frac{d}{dt}\vec{v}_s\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_s \\ &= \left[\frac{d}{dt}\vec{v}_r + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})\right]_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \end{aligned}$$

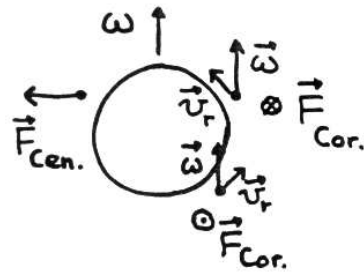
Ettersom $\left[\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})\right]_r = \vec{\omega} \times \vec{v}_r$, får vi:

$$\vec{a}_s = \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (5.21)$$

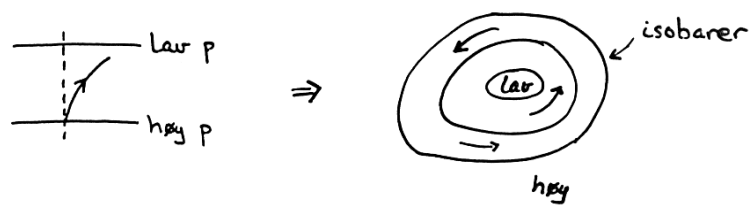
Vi har antatt at “space”-systemet er et inertialsystem, som medfører at Newtons lover gjelder. $\vec{F} = m\vec{a}_s$ kan nå skrives slik:

$$\vec{F}_{\text{eff}} = m\vec{a}_r; \quad \vec{F}_{\text{eff}} \equiv \vec{F} + \underbrace{2m\vec{v}_r \times \vec{\omega}}_{\text{Corioliskraften}} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{Sentrifugalkraften}} \quad (5.22)$$

Figur (22) viser at vi Corioliskraften gir et avvik mot høyre på nordlige halvkule og mot venstre på sørlige halvkule. Jordens vinkelhastighet er $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$. Som i den formelle utledningen av operatorrelasjonen for tidsendring av vektor, legger vi også her rommets akser sammenfallende med jordens i et gitt tidspunkt, og vi finner at $r\omega^2 = 3,38 \text{cm/s}^2$ er maksimale sentripetalakselerasjon. Figur (23) viser hvordan \vec{F}_{Cor} påvirker vindsystemer:



Figur 22:



Figur 23:

6 Bevegelsesligninger for stive legemer

I Kapittel 5 lærte vi at vi trenger 6 uavhengige koordinater for å beskrive et stivt legeme, der et hensiktsmessig valg kunne være tre romlige koordinater og tre vinkler (ofte Eulervinklene). Vi så videre på ortogonale transformasjoner. Alt dette kan kategoriseres som verktøy for å beskrive legemers bevegelse. I dette kapittelet skal vi konsentrere oss om dynamikk, bevegelsesligninger og anvendelser av verktøyene.

6.1 Dreieimpuls og kinetisk energi

Vi betrakter rotasjon av et stivt legeme. Vinkelhastigheten $\vec{\omega}$ om et vilkårlig punkt er den samme for alle punktmasser i legemet: $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$ (opplagt? Formlet bevis kan finnes i *Goldstein* s. 190). Vi kan derfor si at $\vec{\omega}$ gjelder for legemet som helhet. Origo kan velges hvor som helst, men et naturlig valg vil være tyngdepunktet (noteres ved indeks CM - "centre of mass"). Vi antar videre rotasjon om et fast punkt, f.eks. CM.

Total dreieimpuls om det faste punktet:

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i).$$

Ved ren rotasjonsbevegelse har vi $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, så

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]$$

Se nå på en komponent av \vec{L} , for eksempel L_x :

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i [\omega_x r_i^2 - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)] \\ &= \sum_i m_i [\omega_x (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i]. \end{aligned}$$

Vi får naturligvis tilsvarende uttrykk for L_y og L_z , og ser at komponentene av \vec{L} er lineært relatert til komponentene av $\vec{\omega}$. Dette kan vi skrive på formen (med summekonvensjon):

$$L_j = I_{jk} \omega_k, \quad (6.1)$$

der I_{jk} er treghetstensoren eller -matrisen. Av uttrykket for L_x over kan vi slutte at:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) \\ I_{xy} &= - \sum_i m_i x_i y_i \end{aligned}$$

etc. Med kontinuerlig fordelt masse får vi overgang fra $m_i \rightarrow \rho(\vec{r})$ og $\sum_i \rightarrow \int_V dV$, så:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_V \rho(\vec{r}) (r^2 - x^2) dV \\ I_{xy} &= - \int_V \rho(\vec{r}) xy dV. \end{aligned}$$

Om vi lar $x, y, z \rightarrow x_1, x_2, x_3$, kan vi skrive generelt:

$$I_{jk} = \int_V \rho(\vec{r}) (r^2 \delta_{jk} - x_j x_k) dV \quad (6.2)$$

En vanlig notasjon for tensorer gir ligning (6.1) på formen:

$$\vec{L} = \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega} \quad (6.3)$$

Kinetisk energi for bevegelsen omkring det faste punktet er

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}, \end{aligned}$$

der vi har brukt at $\vec{v}_i (= \vec{v}_{i,\text{space}}) = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, da $\vec{v}_{i,\text{body}} = 0$. Med $\vec{L} = \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}$:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega} \quad (6.4)$$

Kan også skrives med summekonvensjon som

$$T = \frac{1}{2} \omega_j I_{jk} \omega_k = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k.$$

Med \vec{n} som rotasjonsakse (dvs. $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$), får vi

$$T = \frac{1}{2} n_j \omega I_{jk} n_k \omega = \frac{1}{2} (n_j I_{jk} n_k) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

der vi har definert treghetsmomentet omkring rotasjonsaksen:

$$I \equiv n_j I_{jk} n_k = \vec{n} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{n}$$

Av (6.2) ser vi at $I_{jk} = I_{kj}$, dvs. \overleftrightarrow{I} er en symmetrisk matrise. Videre er alle I_{jk} reelle, og dermed er \overleftrightarrow{I} **hermitesk** (selvadjungert). For hermitesk operator gjelder at:

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger \equiv (\tilde{\mathbb{A}})^*.$$

Da kan vi alltid *diagonalisere* \overleftrightarrow{I} , dvs. finne et koordinatsystem der \overleftrightarrow{I} er diagonal:

$$\overleftrightarrow{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix},$$

der elementene I_1, I_2 og I_3 kalles hovedtreghetsmomentene. Hovedaksene kaller vi x_1, x_2, x_3 , med dreieimpulskomponenter:

$$L_1 = I_1 \omega_1, \quad L_2 = I_2 \omega_2, \quad L_3 = I_3 \omega_3,$$

og kinetisk energi

$$T = \frac{1}{2} \sum_j I_j \omega_j^2$$

For eksempel har en symmetrisk snurrebass $I_1 = I_2 \neq I_3$, og en sfærisk snurrebass $I_1 = I_2 = I_3 = I \Rightarrow \vec{L} = I \vec{\omega}$.

6.2 Eulerligningene

Vi skal finne bevegelsesligninger for rotasjon av et stivt legeme omkring et fast punkt. Fra kapittel 1:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{\text{space}} = \vec{N},$$

som gjelder i inertialsystemer (dvs. i det faste systemet som ikke roterer). Fra kapittel 5 har vi (ligning 5.19):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \right)_{\text{space}} &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times \\ \Rightarrow \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{\text{space}} &= \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times \vec{L}, \end{aligned}$$

altså sett fra det roterende koordinatsystemet (dropper heretter indeksene “space” og “body”):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N}, \quad (6.5)$$

som er **Eulerligningene** på vektorform når ett punkt er fiksert.

Eksempel: Eulerligningene for snurrende legeme

Anta at legemets akser ligger langs hovedaksene. Da:

$$L_1 = I_1\omega_1, \quad L_2 = I_2\omega_2, \quad L_3 = I_3\omega_3.$$

i -komponenten av Eulerligningen er

$$\dot{L}_i + \epsilon_{ijk}\omega_j L_k = N_i,$$

så på komponentfor får vi:

$$I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = N_1$$

$$I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = N_2$$

$$I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = N_3$$

6.3 Fri rotasjon av stivt legeme; presesjon

Vi skal betrakte et stivt legeme som roterer fritt og beskrive dets presesjon om rotasjonsaksen. Anta at det ikke virker noe ytre dreiemoment, $\vec{N} = 0$. Eulers ligninger gir da at

$$I_1\dot{\omega}_1 = \omega_2\omega_3(I_2 - I_3)$$

$$I_2\dot{\omega}_2 = \omega_3\omega_1(I_3 - I_1)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = \omega_1\omega_2(I_1 - I_2)$$

Vi må ha to bevegelseskonstanter: kinetisk energi og total dreieimpuls (jf. bevaringslovene vi fant i avsnitt 2.6). Anta symmetrisk legeme; $I_1 = I_2$. Eulerligningene:

$$I_1\dot{\omega}_1 = \omega_2\omega_3(I_1 - I_3)$$

$$I_1\dot{\omega}_2 = -\omega_3\omega_1(I_1 - I_3)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0.$$

Av siste ligning ser vi at ω_3 er konstant, bestemt ved initialbetingelser. De to første vinkelfrekvensene,

$$\dot{\omega}_1 = -\Omega\omega_2, \quad \dot{\omega}_2 = \Omega\omega_1,$$

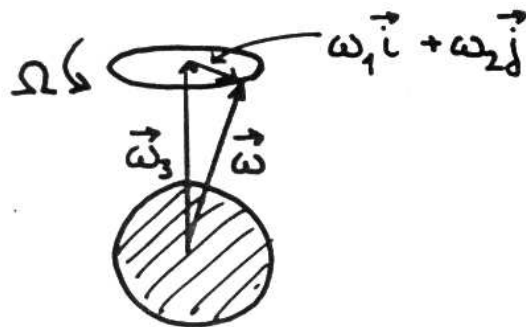
der Ω er en vinkelfrekvens,

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3.$$

Vi eliminerer ω_2 ved å kombinere de to vinkelfrekvensligningene:

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_1 + \Omega^2\omega_1 &= 0 \\ \implies \omega_1(t) &= A \cos \Omega t, \quad \omega_2(t) = A \sin \Omega t. \end{aligned}$$

Vi ser av dette at vektoren $\omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{j}$ har konstant størrelse og roterer (presesserer) omkring legemets z -akse med vinkelfrekvens Ω , så ettersom ω_3 er en konstant, er $\vec{\omega}$ av konstant lengde og presesserer om rotasjonsaksen. Presesjonen er relativt til legemets akser, som selv roterer med en høyere vinkelfrekvens $\vec{\omega}$.



Kinetisk energi

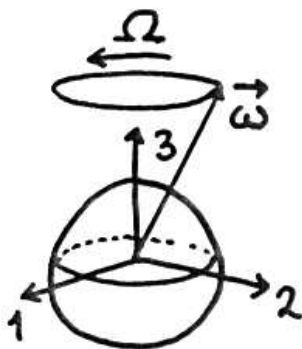
$$T = \frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}I_1A^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 = \text{konst.}$$

$$L^2 = I_1^2A^2 + I_3^2\omega_3^2 = \text{konst.}$$

A og ω_3 kan altså uttrykkes ved T og L .

Vi ser at dersom $I_1 \simeq I_3$, blir $\Omega \ll \omega$

Eksempel: Jordas rotasjon



Jordkloden er litt flatttrykt ved polene, så om vi lar z -aksen være polaraksen, skriver vi $I_3 > I_1 = I_2$.

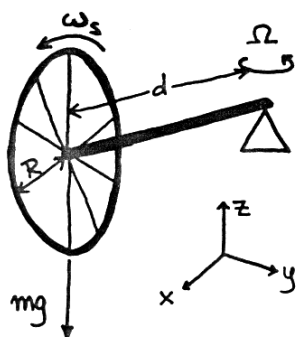
$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3 \simeq \frac{1}{300}\omega_3.$$

Vi vet av egen erfaring at

$$\frac{2\pi}{\omega_3} = 1 \text{ døgn.}$$

Dette gir en presesjonsperiode på $\frac{2\pi}{\Omega} \simeq \frac{2\pi}{\omega_3} \cdot 300 = 300$ døgn. Den målte perioden er 440 døgn (kalles "Chandler wobble"). Avviket antas å skyldes at jorda ikke er et perfekt stivt legeme.

Eksempel: Gyroskopeffekten



Betrakt et hjul orientert vertikalt, i yz -planet. Enden på akslingen hviler fritt på et støttepunkt. Når hjulet roterer hurtig, med vinkelfrekvens ω_s , vil det presessere i horisontalplanet med vinkelfrekvens Ω . Vi har

$$\vec{\omega}_s = \omega_s \hat{x}; \quad \vec{I} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}, \quad I_x = \int dm(r^2 - x^2) = mR^2$$

det vil si

$$\vec{L}_s = \vec{I} \vec{\omega}_s = I_x \omega_s \hat{x} = mR^2 \omega_s \hat{x}.$$

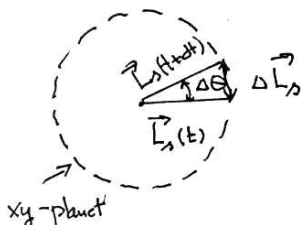
Vi har for enkelhets skyld antatt masseløse eiker i hjulet. Lar nå koordinatsystemet xyz ligge fast i forhold til hjulets aksling (som også har masse $\ll m$). Tyngdekraften fører til et moment omkring støttepunktet:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = d \cdot \hat{x} \times mg(-\hat{z}) = mgd \cdot \hat{y}.$$

Kraftmomentet fører til at \vec{L}_s endrer seg (i lab.systemet):

$$d\vec{L}_s = \vec{N} dt.$$

Vi ser nå nærmere på $d\vec{L}_s$, som er parallel med \vec{N} , dvs. parallell med \hat{y} og dermed normal på \vec{L}_s (med andre ord: \vec{L}_s roterer i horisontalplanet).

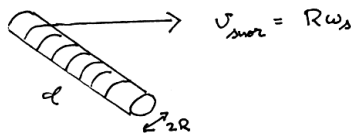


$$|\Delta \vec{L}_s| = |\vec{L}_s| \Delta\theta \\ \Rightarrow \left| \frac{d\vec{L}_s}{dt} \right| = |\vec{L}_s| \frac{d\theta}{dt} = mR^2 \omega_s \Omega$$

Vi kan nå bestemme presesjonshastigheten Ω :

$$\left| \frac{d\vec{L}_s}{dt} \right| = |\vec{N}| \Rightarrow mR^2 \omega_s \Omega = mgd \Rightarrow \Omega = \frac{gd}{R^2 \omega_s},$$

uavhengig av m . Ω øker når ω_s avtar. Vi kunne gjøre et enkelt eksperiment ved å lage oss et lekegyroskop. Anta en ring med radius $R = 2,2\text{cm}$, lengde $d = 3,2\text{cm}$. For å oppnå en presesjon $\Omega = 2\text{s}^{-1}$ må vi som følge av beregningene over ha $\omega_s \simeq 700\text{s}^{-1}$.



Snorens hastighet, $v_{\text{snor}} = R\omega_s = 15\text{m/s}$, som, viser det seg, gir rimelig samsvar mellom teori og eksperiment. Friksjon vil gjøre at ω_s avtar, slik at Ω øker.

Sett fra det roterende koordinatsystem: y -komponenten av bevegelsesligningen $\frac{d\vec{L}_y}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{N}$ gir

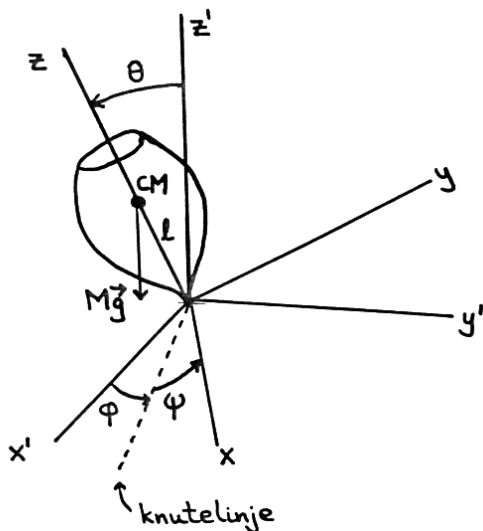
$$\underbrace{\frac{d\vec{L}_y}{dt}}_{=0} + \Omega L_s - \underbrace{\omega_s L_z}_{=0} = N_y$$

Dermed

$$\Omega = \frac{N_y}{L_s} = \frac{gd}{R^2 \omega_s}$$

som før!

Eksempel: Symmetrisk snurrebass med ett punkt fiksert



Dette gir oss at

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2, \quad \omega_3^2 = (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{I_1}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

Potensiell energi:

$$V = -m_i \vec{r}_i \cdot \vec{g} = -M \vec{R} \cdot \vec{g} = Mgl \cos \theta$$

Vi setter dermed opp Lagrangefunksjoenen

$$L = T - V = \frac{I_1}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgl \cos \theta$$

L er uavhengig av ϕ og ψ , som dermed er sykliske koordinater, og de tilhørende generaliserte impulsene p_ϕ, p_ψ er tidskonstanter. Dette kan vi også se fysisk: $\vec{N} = \vec{R} \times M\vec{g}$ har retning langs knutelinjen, mens z og z' begge står normalt på knutelinjen. Dermed har \vec{N} ingen komponent langs z og z' , dvs ingen endring i dreieimpulsen omkring disse aksene. De gjenværende generaliserte impulsene er

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = I_3 \omega_3 = I_1 a = \text{tidskonst.}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = I_1 b = \text{tidskonst.}$$

Konstantene a og b er definert i det ovenstående. I tillegg har vi energibevarelse ettersom systemet vårt er konservativt:

$$E = V + T = \frac{I_1}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + Mgl \cos \theta = \text{tidskonst.}$$

Ligningene for p_ϕ og p_ψ løses nå mhp. $I_3 \dot{\psi}$ og kombineres. Vi får

$$I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_1 a \cos \theta = I_1 b$$

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

Vi betrakter en symmetrisk snurrebass som spinner rundt en hovedakse. Denne påvirkes av tyngdens akselerasjon \vec{g} . Vi antar at ett punkt på symmetriaksen er fiksert. Koordinatsystemet $x'y'z'$ ligger fast i rommet slik at $\vec{g} = -g\hat{z}'$, mens xyz ligger fast i snurrebassen slik at \hat{z} er symmetriakse. Symmetrisk snurrebass vil si at

$$I_1 = I_2 \neq I_3, \quad (x_1 x_2 x_3) = (xyz).$$

Kinetisk energi er

$$T = \frac{1}{2} I_j \omega_j^2 = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2.$$

Vi bruker Eulervinklene ϕ, θ, ψ som (generaliserte) uavhengige koordinater. Fra s. 62 har vi at

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

$$\omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

Eksempel fortsetter..

som gir

$$\dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos \theta \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}.$$

Kinetisk energi målt i det roterende systemet blir

$$E' \equiv E - \frac{I_3}{2} \omega_3^2 = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I_1 (b - a \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta$$

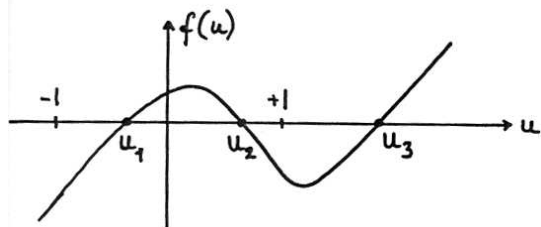
Uttrykket er ekvivalent med et éndimensjonalt problem i variabelen θ med effektivt potensial

$$V'(\theta) = Mgl \cos \theta + \frac{I_1 (b - a \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta}.$$

Vi substituerer $u = \cos \theta$ og innfører nye konstanter $\alpha = 2E'/I_1$ og $\beta = 2Mgl/I_1$. Ligningen for E' kan da omskrives (bruker at $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$):

$$\begin{aligned} E' &= \frac{I_1}{2} \frac{\dot{u}}{\sin^2 \theta} + \frac{I_1 (b - au)^2}{2 \sin^2 \theta} + Mglu \\ \implies E'(1 - u^2) &= \frac{I_1}{2} \dot{u}^2 + \frac{I_1 (b - au)^2}{2} + Mglu(1 - u^2) \\ \implies \alpha(1 - u^2) &= \dot{u}^2 + (b - au)^2 + \beta u(1 - u^2) \\ \implies \dot{u}^2 &= (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2 \\ &= \beta u^3 - (\alpha + a^2)u^2 + (2ab - \beta)u + \alpha - b^2 \equiv f(u) \end{aligned}$$

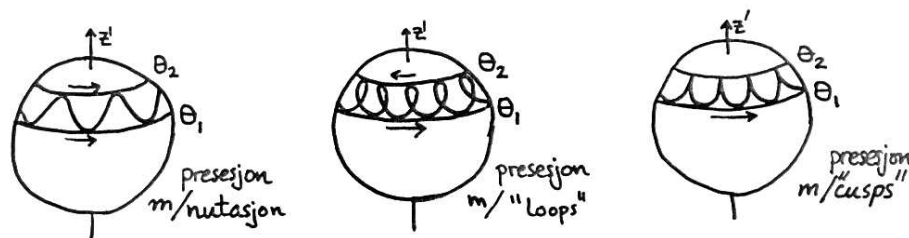
Røtter av høyre side gir $\dot{u} = 0$, dvs. $\dot{\theta} = -\dot{u}/\sin \theta = 0$, dvs. ved hvilke vinkler θ skifter fortegn. Vi har



$$\begin{aligned} f(\pm 1) &= -(b \mp a)^2 < 0 \text{ og} \\ \lim_{u \rightarrow \pm\infty} f(u) &= \pm\infty \end{aligned}$$

som vil si at det må finnes en rot $u_3 > 1$ som er ufysisk ($|u| = |\cos \theta| \leq 1$ når θ er reell)!

Fysisk akseptable verdier må forutsette at $f(u) = \dot{u}^2 \geq 0$, dvs. u mellom u_1 og u_2 (som begge har absoluttverdi mindre enn 1), dvs. θ antar kun slike verdier at $\cos \theta \in \langle u_1, u_2 \rangle$. Bevegelsen kan illustreres ved linjen som z -aksen tegner på overflaten av en enhetskule med sentrum i det faste punktet:



Hva skal til for å få en regulær preseksjon? θ er da konstant, dvs. $\theta(t) = \theta(t=0) \equiv \theta_0$. Videre $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$, så $f(u)$ må ha en dobbel rot i $u_0 = \cos \theta_0$. Vi får to ligninger, $f(u_0) = 0$ og $df(u_0)/du = 0$.

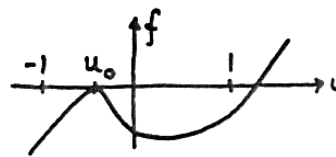
Eksempel fortsetter..

Førstnevnte gir

$$\alpha - \beta u_0 = \frac{(b - au_0)^2}{1 - u_0^2}$$

og $df(u_0)/du = 0$ gir

$$\frac{\beta}{2} = \frac{a(b - au_0)}{1 - u_0^2} - u_0 \frac{\alpha - \beta u_0}{1 - u_0^2}.$$



Vi kombinerer de to og får

$$\frac{\beta}{2} = \frac{a(b - au_0)}{1 - u_0^2} - u_0 \left(\frac{b - au_0}{1 - u_0^2} \right)^2.$$

Fra før har vi at

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0} = \frac{b - au_0}{1 - u_0^2},$$

så

$$\frac{\beta}{2} = a\dot{\phi} - \dot{\phi}^2 \cos \theta_0.$$

Innsatt $\beta = Mgl/I_1$ og $a = I_3\omega_3/I_1 = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta_0)/I_1$ får vi

$$\begin{aligned} Mgl &= \dot{\phi}(I_3\omega_3 - I_1\dot{\phi} \cos \theta_0) \\ \implies \dot{\phi} &= \frac{I_3\omega_3 \pm \sqrt{I_3^2\omega_3^2 - 4MglI_1 \cos \theta_0}}{2I_1 \cos \theta_0}. \end{aligned}$$

Vi krever $\dot{\phi}$ reell, så uttrykket under rottegnet må være positivt:

$$I_3^2\omega_3^2 > 4MglI_1 \cos \theta_0.$$

Herav kan vi konkludere:

- for $\theta_0 > \pi/2$, dvs. $\cos \theta_0 < 0$ er regulær presesjon mulig for vilkårlig ω_3 .
- for $\theta_0 > \pi/2$, dvs. $\cos \theta_0 < 0$ er regulær presesjon mulig kun dersom $\omega_3 > \frac{2}{I_3} \sqrt{MglI_1 \cos \theta_0}$.

De to røttene til $\dot{\phi}$ betegnes gjerne “langsom” og “rask” presesjon.

La oss gå tilbake til $Mgl = \dot{\phi}(I_3\omega_3 - I_1\dot{\phi} \cos \theta_0)$. Ved meget langsom presesjon er $I_1\dot{\phi} \cos \theta_0 \ll I_3\omega_3$, dvs.

$$\dot{\phi} \approx \frac{Mgl}{I_3\omega_3}.$$

Ved *rask* presesjon er situasjonen omvendt, $Mgl \ll$ leddene på høyre side. I dette tilfellet får vi roten

$$\dot{\phi} \approx \frac{I_3\omega_3}{I_1 \cos \theta_0}.$$

• • •

Når $f(u = 1) = 0$, er $\theta = 0$ en “vendevinkel”. Vi skal se litt på dette. Anta $\theta = 0$ ved $t = 0$. Da er $p_\phi = p_\psi$, og dermed $a = b$ (i henhold til vår definisjon av disse størrelsene).

Eksempel fortsetter..

Vi får nå for E' .

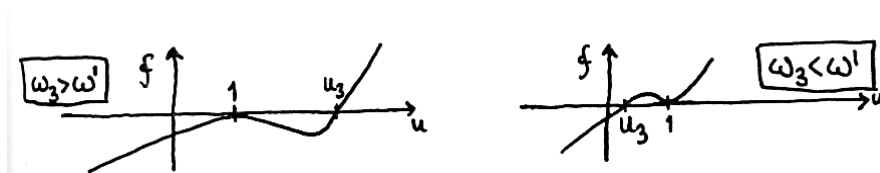
$$E' = E - \frac{I_3}{2} \omega_3^2 = \frac{I_1}{2} \underbrace{\dot{\theta}^2}_{=0} + \frac{I_1 a}{2} \underbrace{\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}}_{=0} + Mgl = Mgl$$

$$\implies \alpha \equiv \frac{2E'}{I_1} = \frac{2Mgl}{I_1} = \beta,$$

$$\implies \dot{u}^2 = (1 - u^2)\beta(1 - u) - a^2(1 - u)^2 = (1 - u)^2 [\beta(1 + u) - a^2],$$

dvs. $u = 1$ er en dobbel rot og vi får $u_3 = a^2/\beta - 1$.

- $\frac{a^2}{\beta} > 2$ (rask presesjon) $\implies u_3 > 1 \implies$ kun mulig med $u = 1$, dvs. $\theta = 0$.
- $\frac{a^2}{\beta} < 2 \implies u_3 < 1 \implies$ nutasjon mellom $\theta = 0$ og $\theta = \theta_3$.



I grensetilfellet $a^2/\beta = 2$ får vi at

$$\frac{I_3^2 \omega'^2}{2MglI_1} = 2$$

$$\implies \omega' = \frac{2}{I_3} \sqrt{MglI_1}$$

Vi kan konkludere med at en snurrebass slett ikke er noe trivielt leketøy!

7 Små oscillasjoner

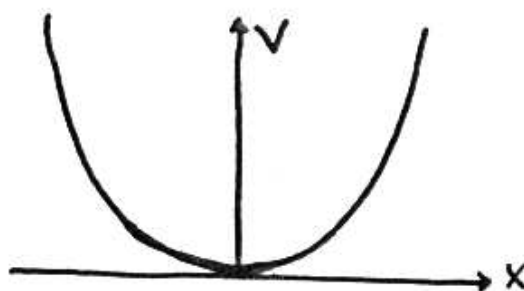
Studiet av små svingninger er en av grunnsteinene i fysikken, og har mange anvendelser innen mange forskjellige felter, for eksempel

- vibrasjoner i molekyler
- gittervibrasjoner i faste stoffer (fononer)
- vibrasjoner i mekaniske systemer
- svingninger i koblede elektriske kretser
- akustikk

Viktigheten av å kunne behandle oscillerende systemer kommer til uttrykk ikke minst i kvantemekanikken, der en kvantisert teori for vibrasjoner har spilt en vesentlig rolle i den senere forståelsen av teknologisk viktige og rent kvantemekaniske fenomener superledning og vakuumfluktuasjoner i det elektromagnetiske feltet.

7.1 Kort rekapitulering

Vi skal se på en klassisk beskrivelse av oscillerende systemer, og begynner med en rask rekapitulering av den éndimensjonale harmoniske oscillatoren.



Potensialet, $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, og Newtons andre lov gir

$$F = m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx \quad (\text{Hookes lov}),$$

og

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

med løsning

$$x(t) = \Re\{Ae^{-i\omega_0 t}\}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

altså en harmonisk svingning med vinkelfrekvens $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Med dempning (friksjon): $F_f = -\lambda\dot{x}$ gir

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0,$$

med løsningen

$$\begin{aligned} x(t) &= \Re\{Ae^{-i(\omega_0 - i\lambda/m)t}\} \\ &= e^{-\lambda t/m} \Re\{Ae^{-i\omega_0 t}\}, \end{aligned}$$

altså en eksponensielt dempet, harmonisk svingning.

7.2 System av koblede oscillatorer

Vi skal i resten av dette kapitlet betrakte et mer generelt problem, nemlig et system av koblede, lineære harmoniske oscillatorer. At oscillatorene er lineære betyr matematisk at fjærkraften er proporsjonal med utsvinget fra likevekt. For en pendel er dette eksempelvis det samme som at utsvingene er tilstrekkelig små til at $\sin \theta \approx \theta$ dersom θ er utsvingsvinkelen. Vi begrenser oss med andre ord til å se på små oscillasjoner.

Vi antar at vi har et *konservativt system*, dvs. at V bare er avhengig av posisjoner. Vi antar videre for enkelhets skyld at alle føring er tidsuavhengige.

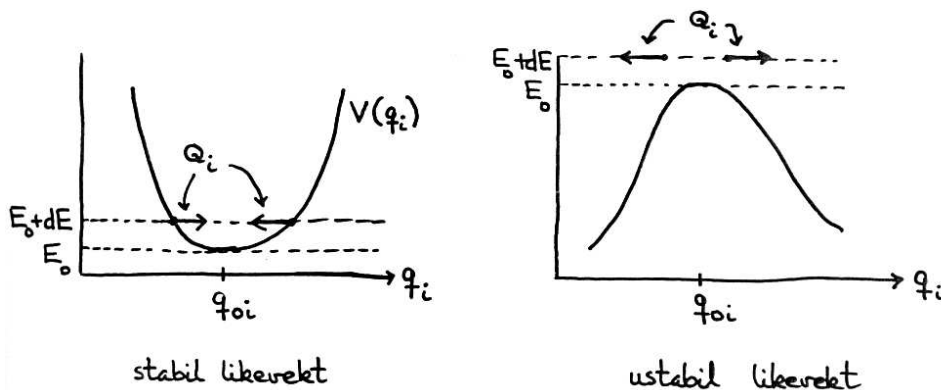
Utgangspunktet er som vanlig et system med N partikler og $3N$ frihetsgrader. Med k føring reduseres antall frihetsgrader til $3N - k$. Vi antar at vi har transformert til et generalisert koordinatsystem med n uavhengige koordinater, (q_1, \dots, q_n) .

Vi sier at systemet er i *likevekt* når alle generaliserte krefter forsvinner:

$$Q_i = - \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 = 0.$$

Et likevektspunkt er med andre ord et ekstremalpunkt for V . Vi betegner koordinatene i likevektspunktet (q_{01}, \dots, q_{0n}) .

Vi sier at vi har en **stabil likevekt** dersom en liten forstyrrelse fra likevekt medfører en liten bundet bevegelse omkring likevektsposisjonen.



Figur 24: Stabil og ustabil likevekt.

Vi sier at vi har en **ustabil likevekt** hvis en liten forstyrrelse fra likevekt gir en ubundet bevegelse. Vi skal kun se på små utsving fra en stabil likevekt:

$$q_i = q_{0i} + \eta_i, \quad \text{der } \eta_i \text{ er utsving fra likevekt.}$$

Vi velger η_i som våre nye generaliserte koordinater. Taylorutvikling av V omkring q_{01} (med summekonvensjon som før):

$$V(q_1, q_2, \dots, q_n) = V(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 \eta_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \eta_i \eta_j + \dots$$

Vi har brukt den forhåpentligvis selvforklarende notasjonen at index 0 svarer til verdien tatt i likevektspunktet $(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n})$. Likevektsbetingelsen er i seg selv at $\left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 = 0$, så alle ledd som er lineære i η_i faller bort. Nullnivået for V kan vi velge som vi vil, f.eks. slik at $V(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}) = 0$, og vi står igjen med, til annen orden i η_i (som vi jo har antatt er et *lite* utsving):

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \eta_i \eta_j \equiv \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j. \quad (7.1)$$

Ettersom partiellderivasjon kommuterer, ser vi at $V_{ij} = V_{ji}$.

Den kinetiske energien kan skrives som en homogen, kvadratisk funksjon av hastighetene:

$$T = m_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j = \frac{1}{2}m_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j, \quad (7.2)$$

der koeffisientene m_{ij} generelt kan være funksjoner av q_k slik V_{ij} var det i tilfellet over:

$$m_{ij}(q_1, \dots, q_n) = m_{ij}(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right)_0 \eta_k + \dots$$

(jf. eksempel 1b på side 14, der vi hadde

$$T(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 \\ \implies m_{11} = m, \quad m_{22} = mr^2, \quad m_{12} = m_{21} = 0.$$

)

Uttrykket for T , $\frac{1}{2}m_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, er allerede kvadratisk i $\dot{\eta}$, derfor beholder vi konstantleddet i m_{ij} kun til ledende orden og skriver

$$T = \frac{1}{2}T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j; \quad T_{ij} \equiv m_{ij}(q_{01}, \dots, q_{0n})$$

Vi antar symmetri, $T_{ij} = T_{ji}$ (som regel er T_{ij} også diagonal, slik at $T_{ij} = T_i\delta_{ij}$).

Vi kan nå skrive opp Lagrangefunksjonen:

$$L(\eta, \dot{\eta}) = T - V = \frac{1}{2}(T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j - V_{ij}\eta_i\eta_j)$$

Bevegelsesligningene (dvs. Lagranges ligninger):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

La oss se på bevegelsesligningen for én bestemt i (og må da naturligvis kalle summeindekser for noe annet, eksempelvis j og k : $L = \frac{1}{2}(T_{jk}\dot{\eta}_j\dot{\eta}_k - V_{jk}\eta_j\eta_k)$):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = \frac{1}{2}T_{jk} \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}_i} (\dot{\eta}_j\dot{\eta}_k) = \frac{1}{2}T_{jk} (\delta_{ik}\dot{\eta}_j + \dot{\eta}_k\delta_{ij}) \\ = \frac{1}{2}T_{ij}\dot{\eta}_j + \frac{1}{2}T_{ik}\dot{\eta}_k$$

Vi står fritt til å kalle summasjonsindekser for hva vi måtte lyste (så lenge en styrer unna de indekser som allerede finnes innenfor samme ledd, naturligvis), og døper om indeks k i siste ledd til å hete j . Når vi bruker symmetrien $T_{ij} = T_{ji}$, ser vi at de to leddene er like, altså

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = T_{ij}\dot{\eta}_j$$

Den tidsderiverte blir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = T_{ij} \frac{d}{dt} \dot{\eta}_j = T_{ij}\ddot{\eta}_j$$

På akkurat samme måte finner vi at

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_i} = -V_{ij}\eta_j,$$

og ligningene blir

$$T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.3)$$

altså et sett av n koblede, lineære, homogene 2.ordens diff.ligninger. Vi merker oss

- Løsningen beskriver systemets løsning nær likevekt
- Vi får $2n$ integrasjonskonstanter (fordi ligningen er av 2. orden), som kan bestemmes for eksempel ved initialinformasjon om η_i og $\dot{\eta}_i$.
- Ligningene har samme *form* som ligningen for en éndimensjonal harmonisk oscillator.

7.2.1 Svingemoder

Det virker rimelig å gjøre følgende ansats:

$$\eta_i(t) = A_i e^{-i\omega t} \quad (7.4)$$

der A_i er komplekse amplituder og ω er en (foreløbig) ukjent størrelse av dimensjon s^{-1} . Det er underforstått at det er $\Re\{\eta_i\}$ som representerer den virkelige bevegelsen. Vi setter dette inn i bevegelsesligningene:

$$V_{ij}A_j - \omega^2 T_{ij}A_j = 0$$

som gir n homogene ligninger for A_i . Løsningsbetingelsen for et ligningssett på formen $\mathbb{A}\mathbf{x} = 0$, er at determinanten til \mathbb{A} er null, altså i vårt tilfelle at

$$\det(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) = \begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \dots & V_{1n} - \omega^2 T_{1n} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & \dots & & \vdots \\ \dots & & \ddots & \vdots \\ V_{n1} - \omega^2 T_{n1} & \dots & & V_{nn} - \omega^2 T_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (7.5)$$

. Dette kalles ofte systemets **karakteristiske ligning**.

Dette er generelt en n te grads ligning for ω^2 , som generelt har n forskjellige røtter, ω_α^2 , med $\alpha = 1, 2, \dots, n$. ω_α kalles systemets **egenfrekvenser**. Av fysiske grunner krever vi at $\omega_\alpha^2 \geq 0$ og at ω_α er reell. Dersom ω_α har en imaginærdel, $\omega_\alpha = \omega' + i\omega''$, har vi nemlig at $e^{-i\omega_\alpha t} = e^{-i\omega' t} e^{\omega'' t}$, dvs. eksponensiell økning ($\omega'' > 0$) eller dempning ($\omega'' < 0$) av utsvingene. Dette er ikke forenlig med energibevarelse (en kunne naturligvis tenke seg at svingningene var dempet, men vi har valgt å se på et hastighetsuavhengig potensial, og da kan dette ikke være tilfelle. Vi husker fra kapittel 2.6.3 at en Lagrangefunksjon som ikke var eksplisitt tidsavhengig medførte at total mekanisk energi var bevart).

7.2.2 Amplituder

Anta nå at vi har bestemt egenfrekvensene ω_α (ligning 7.5 lar seg ofte bare, men ganske enkelt, løse numerisk). Neste spørsmål er hvordan de karakteristiske egensvingningene ser ut, altså hvilke deler av systemet som svinger og hvor mye de svinger i **svingemode** α .

Vi da bestemme amplitudene $A_{i\alpha}$, som vi definerer som utslaget langs den generelle koordinaten q_i i svingemode α . Disse bestemmes av bevegelsesligningene (Lagranges ligninger) ovenfor, med en modeindeks α i tillegg i forhold til uttrykket i forrige avsnitt,

$$(V_{ij} - \omega_\alpha^2 T_{ij}) A_{j\alpha} = 0. \quad (7.6)$$

Merk at vi her betrakter én enkelt svingemode, og dermed ikke betrakter α som en indeks på linje med i og j over, ei heller summerer over α som en indeks (vi ser også at α kun inngår én gang i ett ledd og strengt tatt tre ganger i det andre, idet ω_α er kvadrert. God skikk og bruk innen bruk av summekonvensjon sier at en summasjonsindeks skal gå igjen to ganger, hverken mer eller mindre.). Når ω_α er kjente, er dette n ligninger (én for hver i , som er eneste frie indeks i ligningen over. Det summeres over j), som bestemmer $n - 1$ av komponentene i modens "amplitudevektor"

$$\vec{A}_\alpha = \begin{pmatrix} A_{1\alpha} \\ A_{2\alpha} \\ \vdots \\ A_{n\alpha} \end{pmatrix}$$

Hvorfor er ikke n ligninger nok til å bestemme alle n komponentene? Svaret er at ligningssettet (7.6) er homogent, og vi kan multiplisere alle $A_{j\alpha}$ med en og samme vilkårlige (komplekse) konstant som ikke vil være bestemt av ligningene. Ettersom $A_{j\alpha}$ generelt er kompleks, betyr dette at det er to ubestemte størrelser; absoluttverdi og fase for $A_{j\alpha}$, ialt $2n$ størrelser, det samme som antall nødvendige initialbetingelser dersom en vil bestemme en fullstendig løsning (som vi argumenterte for ovenfor).

7.2.3 Minorer til systemdeterminanten

Vi skal se på et annet verktøy for å bestemme systemets amplituder. La oss nå anta at alle egenfrekvensene ω_α er forskjellige. Da gjelder følgende

$$A_{i\alpha} \propto \Delta_{i\alpha}, \quad (7.7)$$

der $\Delta_{i\alpha}$ er et tall vi lar være proporsjonalt med **minoren** (evt. kofaktoren) til determinanten $|\mathbb{V} - \omega_\alpha \mathbb{T}|$, som er definert som determinanten til undermatrisen som fremkommer ved å fjerne rad i og kolonne α fra $\mathbb{V} - \omega_\alpha \mathbb{T}$. Fortegnet til $\Delta_{i\alpha}$ er gitt ved $(-1)^{i\alpha}$. Grunnen til at vi lar $\Delta_{i\alpha}$ være *proporsjonal med* og ikke lik minoren (i, α) til systemet, er at vi ønsker å kunne normere $\Delta_{i\alpha}$ slik vi vil. Motivasjonen for dette blir åpenbar etterhvert.

Vi skal ikke gi noe fullstendig bevis for at $A_{i\alpha} \propto \Delta_{i\alpha} \propto \text{kofaktor}_{i\alpha}$ her, men bare se på tilfellet $n = 3$, ligningen der $\alpha = 1$ og $i = 1$. Bevegelsesligningene gav

$$\begin{aligned} (V_{1j} - \omega_1^2 T_{1j}) A_{j1} &= 0 \\ (V_{11} - \omega_1^2 T_{11}) A_{11} + (V_{12} - \omega_1^2 T_{12}) A_{21} + (V_{13} - \omega_1^2 T_{13}) A_{31} &= 0 \end{aligned}$$

Dette uttrykket sammenligner vi med ligningen $|\mathbb{V} - \omega_\alpha^2 \mathbb{T}| = 0$ når vi setter $\alpha = 0$ og utvikler etter første kolonne:

$$(V_{11} - \omega_1^2 T_{11}) \Delta_{11} + (V_{21} - \omega_1^2 T_{21}) \Delta_{21} + (V_{31} - \omega_1^2 T_{31}) \Delta_{31} = 0$$

\mathbb{V} og \mathbb{T} er begge symmetriske, og vi ser at de to ligningene er like på en ubestemt (kompleks) konstant nær, altså

$$A_{i\alpha} = C_\alpha \Delta_{i\alpha}.$$

Denne motivasjonen lar seg ganske greit generalisere til et bevis for vilkårlig antall koordinater, men det gjør vi ikke her.

Vi hadde at $\eta_i = A_i e^{-i\omega t}$. Vi har nå funnet at systemet kan oscillere med et diskret sett av egenfrekvenser ω_α . Utsvinget langs den generaliserte koordinaten q_i er da

$$\eta_{i\alpha} = A_{i\alpha} e^{-i\omega_\alpha t} = C_\alpha \Delta_{i\alpha} e^{-i\omega_\alpha t}.$$

Differensialligningene vi begynte med var lineære og homogene av orden 2, så superposisjonsprinsippet (som kjent fra matematikken) gjelder og gir oss den mest generelle løsningen

$$\Re\{\eta_i(t)\} = \Re\left\{\sum_{\alpha=1}^n \eta_{i\alpha}(t)\right\} = \Re\left\{\sum_{\alpha=1}^n C_\alpha \Delta_{i\alpha} e^{-i\omega_\alpha t}\right\}. \quad (7.8)$$

Den dyktige student greier naturligvis å skille mellom indeks i og den imaginære enheten $i = \sqrt{-1}$ i ligningene over.

Vi ser at tidsvariasjonen av η_i er en superposisjon av n harmoniske svinginger med vilkårlige faser og amplituder (husk dog: små utsving), men fikserte frekvenser.

7.2.4 Normalkoordinater

Vi skriver den ovenforstående løsningen på en ny form

$$\Re\{\eta_i\} = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_{i\alpha} \Theta_\alpha(t), \quad (7.9)$$

med et nytt sett uavhengige koordinater

$$\Theta_\alpha(t) \equiv \Re\{C_\alpha e^{-i\omega_\alpha t}\}. \quad (7.10)$$

Vi skal se at dette tilsynelatende umotiverte kunstgrepet er hensiktsmessig fordi bevegelsesligningene for Θ_α *ikke* er koblede (slik ligningene for $\eta_{i\alpha}$ er det). Koordinatene Θ_α kaller vi **normalkoordinater**, og vi sier at systemet oscillerer i **normalmode** α .

Vi skal i resten av avsnittet vise at bevegelsesligningene for Θ_α ikke er koblede. La oss sette inn $\Re\{\eta_i\} = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_{i\alpha} \Theta_\alpha(t)$ i uttrykkene for kinetisk energi T og potensiell energi V (siden sist vi så disse uttrykkene har vi tillatt η_i og $\dot{\eta}_i$ å være komplekse, og må passe på å kun bruke realdelen i uttrykkene for T og V):

$$T = \frac{1}{2} T_{ij} \Re\{\dot{\eta}_i\} \Re\{\dot{\eta}_j\} = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} T_{ij} \Delta_{i\alpha} \dot{\Theta}_\alpha \Delta_{j\beta} \dot{\Theta}_\beta$$

$$V = \frac{1}{2} V_{ij} \Re\{\eta_i\} \Re\{\eta_j\} = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} V_{ij} \Delta_{i\alpha} \Theta_\alpha \Delta_{j\beta} \Theta_\beta.$$

Merk at det summeres over i, j, α og β her (naturligvis, for T og V har ingen indekser).

Betrakt igjen ligningene (7.6) som gjaldt for én enkelt mode α , der vi uttrykker amplitudene ved hjelp av minorene $\Delta_{i\alpha}$:

$$V_{ij} A_{j\alpha} = \omega_\alpha^2 T_{ij} A_{j\alpha}$$

$$V_{ij} C_\alpha \Delta_{j\alpha} = \omega_\alpha T_{ij} C_\alpha \Delta_{j\alpha}$$

$$V_{ij} \Delta_{j\alpha} = \omega_\alpha^2 T_{ij} \Delta_{j\alpha}$$

En liten kommentar til summekonvensjonen: Vi har valgt å summere eksplisitt over modene α og β der det er aktuelt, men la i og j være underlagt Einsteins summekonvensjon., men en kunne godt ha betraktet α og β som indekser på linje med i, j og latt også dem summere implisitt. Imidlertid vil en se at med notasjonen vi har brukt her kan dette så hendige verktøy være et tveegget sverd om en ikke passer på; en kan lett la seg forvirre av at ligningene som gjelder for hver enkelt mode α tilsynelatende inneholder gjentatte indekser som *ikke* summeres. En nyttig ting å sjekke når en benytter summekonvensjon er at alle ledd alltid har samme frie indekser. I øverste linje av overstående utregning, for eksempel, ville en summasjon av α på høyre side (der α kan se ut som en repetert indeks) gjøre at venstre side av ligningen hadde en fri indeks α , mens den var summert bort på høyre side.

Vi setter inn uttrykket for $V_{ij} \Delta_{j\beta}$ i uttrykkene for V og T over:

$$V = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} V_{ij} \Delta_{j\beta} \Delta_{i\alpha} \Theta_\alpha \Theta_\beta = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} \omega_\beta^2 T_{ij} \Delta_{j\beta} \Delta_{i\alpha} \Theta_\alpha \Theta_\beta$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} \omega_\beta^2 T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\beta} \Theta_\alpha \Theta_\beta,$$

mens T altså var

$$T = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} T_{ij} \Delta_{ij} \Delta_{j\beta} \dot{\Theta}_\alpha \dot{\Theta}_\beta$$

Vi vil kikke på faktoren $\sum_{i,j} T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\beta}$ som opptrer i både T og V . Vi går enda en gang tilbake til ligning (7.6),

$$(V_{ij} - \omega_\alpha^2 T_{ij}) A_{j\alpha} = 0.$$

Bruker igjen at $A_{j\alpha} = C_\alpha \Delta_{j\alpha}$ og skriver opp ligningen for α og β :

$$V_{ij} \Delta_{j\alpha} = \omega_\alpha^2 T_{ij} \Delta_{j\alpha}$$

$$V_{ij} \Delta_{j\beta} = \omega_\beta^2 T_{ij} \Delta_{j\beta}$$

Vi opererer på øvre ligning med $\sum_i \Delta_{i\beta}$ og på nedre ligning med $\sum_i \Delta_{i\alpha}$, og får

$$V_{ij} \Delta_{j\alpha} \Delta_{i\beta} = \omega_\alpha^2 T_{ij} \Delta_{j\alpha} \Delta_{i\beta}$$

$$V_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\beta} = \omega_\beta^2 T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\beta}$$

I øverste ligning døper vi om summasjonsindekser slik at $j \leftrightarrow i$ og bruker at V_{ij} og T_{ij} er symmetriske ved ombytte av indekser. Omskrevet blir den øvre ligningen altså

$$V_{ij}\Delta_{i\alpha}\Delta_{j\beta} = \omega_\alpha^2 T_{ij}\Delta_{i\alpha}\Delta_{j\beta},$$

som vi trekker fra den nedre ligningen og får en sammenslått ligning:

$$(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2)T_{ij}\Delta_{i\alpha}\Delta_{j\beta} = 0. \quad (7.11)$$

Dermed er det umiddelbart opplagt at dersom $\omega_\alpha \neq \omega_\beta$ (vi har antatt at alle ω_α er forskjellige, så dette er det samme som at $\alpha \neq \beta$) så må

$$T_{ij}\Delta_{i\alpha}\Delta_{j\beta} = 0.$$

I tilfellet $\alpha = \beta$ er $(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2) = 0$, mens vi må kreve at

$$T_{ij}\Delta_{i\alpha}\Delta_{j\alpha} \neq 0,$$

for ellers står vi bare igjen med den trivielle løsningen der alle amplituder er null.

Vi skal nå benytte at vi nøyde oss med å sette $\Delta_{i\alpha} \propto$ kofaktor $_{i\alpha}$, med en vilkårlig (kompleks) proporsjonalitetskonstant. Dette gir oss nemlig muligheten til å normere settet av $\Delta_{i\alpha}$ slik vi vil. Vi velger normering slik at

$$\sum_{i,j} T_{ij}\Delta_{i\alpha}\Delta_{j\alpha} = 1,$$

og kan dermed sette

$$\sum_{i,j} T_{ij}\Delta_{i\alpha}\Delta_{j\alpha} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Dette var ganske mye regning og mange triks, men vi er nå istand til å forenkle uttrykkene for T og V :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \underbrace{\sum_{i,j} T_{ij}\Delta_{i\alpha}\Delta_{j\beta}}_{=\delta_{\alpha\beta}} \dot{\Theta}_\alpha \dot{\Theta}_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \dot{\Theta}_\alpha^2$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \underbrace{\sum_{i,j} T_{ij}\Delta_{i\alpha}\Delta_{j\beta} \omega_\beta^2 \Theta_\alpha \Theta_\beta}_{=\delta_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2.$$

Vi kan nå skrive ned Lagrangefunksjonen med normalkoordinatene som uavhengige variable:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2) \quad (7.12)$$

Lagrangeligningene som vanlig

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \Theta_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

mellomregning...

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_\alpha} = \dot{\Theta}_\alpha, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_\alpha} = \ddot{\Theta}_\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \Theta_\alpha} = -\omega_\alpha^2 \Theta_\alpha,$$

og omsider

$$\boxed{\ddot{\Theta}_\alpha - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0}, \quad (7.13)$$

som var det vi skulle vise!

Kommentarer:

- Det er ingen kobling mellom ligningene for ulike normale moder, som derfor kan sies å være *ortogonale*.
- Vi ser at definisjonen på side 78, $\Theta_\alpha(t) \equiv \Re \{ C_\alpha e^{-i\omega_\alpha t} \}$, er konsistent med bevegelsesligningene for Θ_α .
- Vi trenger $2n$ initialbetingelser for å bestemme en fullstendig løsning, dvs. for å fastlegge amplitudene $|C_\alpha|$ og fasene φ_α i integrasjonskonstantene $C_\alpha = |C_\alpha| \cdot e^{i\varphi_\alpha}$.
- Med to eller flere sammenfallende ω_α (dvs. **degenerasjon**) blir fremgangsmåten noe modifisert.

Eksempel: Oscillerende partikkel i rommet

Vi betrakter en partikkel som oscillerer i rommet, påvirket av et potensial $V = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2)$. Den kinetiske energien er $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, så

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (m\dot{x}_i^2 - k_i x_i^2),$$

og bevegelsesligningene blir (merk: *ikke* summekonvensjon her; tre ligninger, ikke én)

$$m\ddot{x}_i + k_i x_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ansats: $x_i = A_i e^{-i\omega t}$ gir ligningene på formen

$$(-m\omega^2 + k_i)A_i = 0 \quad (\text{fortsatt ikke summekonvensjon her})$$

Dette ligningssettet har løsning hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} k_1 - m\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 - m\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0, \\ & \Rightarrow (k_1 - m\omega^2)(k_2 - m\omega^2)(k_3 - m\omega^2) = 0, \\ & \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}} \end{aligned}$$

Ved sammenligning med formalismen på foregående sider, ser vi

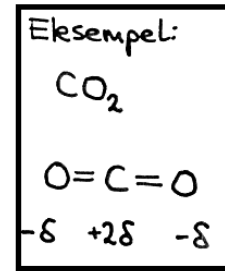
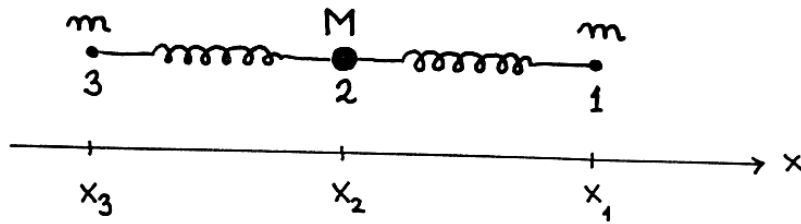
$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} & \mathbb{T} &= \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \\ \mathbb{V} - \omega_\alpha^2 \mathbb{T} &= \begin{pmatrix} k_1 - m\omega_\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 - m\omega_\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 - m\omega_\alpha^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De kartesiske koordinatene x_i er i dette eksempelet normalkoordinater med bevegelsesligninger $\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = 0$, der $\omega_i^2 = k_i/m$.

Dersom vi hadde hatt sentralfelt, $V = V(r)$, hadde vi fått $k_1 = k_2 = k_3 = k$, dvs. $V = \frac{1}{2}kr^2$. I dette tilfellet blir alle de tre røttene degenererte; $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{k/m}$.

7.3 Fri vibrasjoner av lineært symmetrisk treatomig molekyl

Vi betrakter et lineært, symmetrisk og treatomig molekyl, for eksempel CO_2 :



La likevektstilstandene være slik at

$$x_{01} - x_{02} = x_{02} - x_{03} = b.$$

Utsving fra likevekt, η_i :

$$\eta_i = x_i - x_{0i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Vi antar kun nærmeste nabo-vekselvirkning, samt harmonisk potensial:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k[(x_1 - x_2) - b]^2 + \frac{1}{2}k[(x_2 - x_3) - b]^2 \\ &= \frac{1}{2}k(\eta_1 - \eta_2)^2 + \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_3)^2. \end{aligned}$$

Kinetisk energi:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2. \end{aligned}$$

Lagrangefunksjonen blir således

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2}k(\eta_1 - \eta_2)^2 - \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_3)^2.$$

Det er mulig å forenkle dette ytterligere ved å benytte at bevegelsen av CM er upåvirket av vibrasjoner i molekylet (vi husker hvordan vi skilte mellom interne og eksterne krefter i kapittel 1.1). Vi antar at CM er i ro i origo:

$$\begin{aligned} m(x_1 + x_3) + Mx_2 &= 0 \\ m(\eta_1 + \eta_3) + M\eta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Vi definerer nå nye, uavhengige koordinater:

$$Q_a = \eta_1 + \eta_3 \quad Q_s = \eta_1 - \eta_3,$$

som gir

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(Q_a + Q_s), \quad \eta_3 = \frac{1}{2}(Q_a - Q_s),$$

og fra ligningen for CM:

$$\eta_2 = -\frac{m}{M}(\eta_1 - \eta_3) = -\frac{m}{M}Q_s.$$

Vi setter de nye koordinatene inn i L :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m \cdot \frac{1}{4}(\dot{Q}_a + \dot{Q}_s)^2 + \frac{1}{2}m \cdot \frac{1}{4}(\dot{Q}_a - \dot{Q}_s)^2 + \frac{1}{2}M \cdot \frac{m^2}{M^2}\dot{Q}_a^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}k \left[\frac{1}{2}(Q_a + Q_s) + \frac{m}{M}Q_a \right]^2 - \frac{1}{2}k \left[-\frac{1}{2}(Q_a - Q_s) - \frac{m}{M}Q_a \right]^2 \\ &= \frac{m}{4} \left(1 + \frac{2m}{M} \right) \dot{Q}_a^2 + \frac{m}{4}\dot{Q}_s^2 - \frac{1}{2}k \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{M} \right) Q_a + \frac{1}{2}Q_s \right]^2 + \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{M} \right) Q_a - \frac{1}{2}Q_s \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Ser at leddene $\sim Q_a \cdot Q_s$ kansellerer hverandre. Innfører molekylets totale masse $\mu = M + 2m$. Dermed blir $1 + 2m/m = \mu/M$. Vi får nå

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{4} \frac{\mu}{M} \dot{Q}_a^2 + \frac{m}{4} \dot{Q}_s^2 - \frac{1}{2} k \left[2 \left(\frac{\mu}{2M} \right)^2 Q_a^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 Q_s^2 \right] \\ &= \frac{m}{4} \left[\dot{Q}_s^2 - \frac{k}{m} Q_s^2 + \frac{\mu}{M} \dot{Q}_a^2 - \frac{k}{m} \frac{\mu^2}{M^2} Q_a^2 \right]. \end{aligned}$$

Med andre ord: Q_a og Q_s er normalkoordinater. Vi får L på “standardform” ved å innføre

$$\Theta_s = \sqrt{\frac{m}{2}} Q_s, \quad \Theta_a = \sqrt{\frac{m\mu}{2M}} Q_a,$$

som gir

$$L = \frac{1}{2} \left[\dot{\Theta}_s^2 - \frac{k}{m} \Theta_s^2 + \dot{\Theta}_a^2 - \frac{k\mu}{mM} \Theta_a^2 \right].$$

Vi kjenner igjen dette som samme form som det vi hadde på side 80, og vi kan umiddelbart skrive ned systemets egenfrekvenser:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k\mu}{mM}}.$$

La oss gå tilbake til $V(\eta_i)$ og $T(\dot{\eta}_i)$ og bestemme egenfrekvensene ved å løse den sekulære ligningen

$$|\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}| = 0.$$

Her er elementene V_{ij} og T_{ij} i henholdsvis \mathbb{V} og \mathbb{T} bestemt ved

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 V_{ij} \eta_i \eta_j.$$

Sammenligning med uttrykkene for V og T på side 82 gir

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}, \quad \mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix},$$

og ligningen $|\mathbb{T} - \omega^2 \mathbb{V}|$ gir

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

8 Spesiell relativitetsteori

8.1 Innledning

Anta:

- L = typisk lineær utstrekning av systemet
- $\lambda = h/p$ = de Broglie-bølgelengde for et legeme i systemet med impuls p (h = Plancks konstant)
- v = typisk hastighet til legeme i systemet
- c = lyshastigheten i vakuum

Vi skal her se nærmere på systemer med $\lambda \ll L$ og $v/c \sim 1$, som beskrives med **Einsteins spesielle relativitetsteori** (Generell relativitetsteori omhandler gravitasjon og akselererte referansesystemer. Også denne ble utviklet av Einstein!).

Skal her *ikke* gå særlig inn på

- tidligere eksperimenter (Michelson-Morley etc.)
- filosofiske betraktninger
- tilsynelatende paradokser

Målet er imidlertid

- å benytte formalisme og begrepsapparat fra klassisk mekanikk til å beskrive den spesielle relativitetsteorien.

Kort rekapitulering...

Et **inertialsystem** er et referansesystem der Newtons lover gjelder ($\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$).

Galileitransformasjonen: Anta to inertialsystemer, S og S' , der S' beveger seg med hastighet \vec{v} relativt til S . Et legemes koordinater \vec{r} og \vec{r}' og tidspunkter t og t' observert i henholdsvis S og S' er da relatert ved

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad \text{og} \quad t = t'$$

Problemet var at Galileitransformasjonen forutsier *forskjellig* lyshastighet i S og S' , $c' = c - v$ ($c' = dr'/dt = dr/dt - v = c - v$), mens eksperimentelt er lyshastigheten den samme i S og S' , dvs $c = c'$, uavhengig av relativ hastighet v (Michelson-Morley, Kennedy-Thorndike, Alväger et al.).

Dette ledet Einstein til sine to grunnleggende postulater:

1. Fysikkens lover er de samme i alle inertialsystemer (“relativitetsprinsippet”; også tilfredsstilt i Newtonmekanikk)
2. Lyshastigheten i vakuum har samme konstante verdi i alle inertialsystemer og er uavhengig av lyskildens bevegelse (skiller relativitetsteori fra andre teorier).

8.2 Lorentztransformasjonen

Betrakt to inertialsystemer S og S' . S' beveger seg med en hastighet \vec{v} relativt til S . Antar felles origo ved $t = t' = 0$, dessuten at \vec{v} er parallell med z -aksen. **Lorentztransformasjonen** er da gitt ved:

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= \gamma(z - vt), \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vz}{c^2}\right), \end{aligned}$$

der vi har definert:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Invers transformasjon fås ved å la $v \rightarrow v'$. Vi ser at transformasjonsligningene er **lineære**. Lorentztransformasjonen gjør at lyshastigheten c er **invariant**, dvs. den samme sett fra de to systemene S og S' . La oss vise dette:

Anta en punktkilde i origo i S' som emitterer en lysbølge ved $t = 0$. Ligning for lysfronten:

$$\begin{aligned} r' &= ct' \\ \Rightarrow (r')^2 &= c^2(t')^2 \\ \Rightarrow (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 &= c^2(t')^2 \end{aligned}$$

Vi skal se at vi får samme ligning for lysfronten i S :

$$\begin{aligned} (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2 &= x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2 - c^2\gamma^2\left(t - \frac{vz}{c^2}\right)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - z^2 + \gamma^2(z^2 - 2vzt + v^2t^2) - c^2\gamma^2\left(t^2 - \frac{2v}{c^2}zt + \frac{v^2z^2}{c^2}\right) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - z^2 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1-\beta^2} + \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)}_{=0} - z \underbrace{(2v\gamma^2t - 2v\gamma^2t)}_{=0} + \gamma^2t^2(v^2 - c^2) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \underbrace{\gamma^2(1 - v^2/c^2)}_{=1} \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2, \end{aligned}$$

som betyr at

1. Hvis $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2(t')^2$, er også $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$.
2. Lysfronten beveger seg med samme hastighet i både S og S' .

For $v \ll c$ ser vi at vi får $x' = x; y' = y; z' = z - vt; t' = t$, så

$$\text{Lorentztransformasjon} \xrightarrow{v \ll c} \text{Galileitransformasjon.}$$

Invers transformasjon:

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= y', \\ z &= \gamma(z' + vt'), \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{vz'}{c^2}\right), \end{aligned}$$

(Opplagt! Vi må kunne la $v \rightarrow -v$ ettersom S beveger seg med hastighet $-v$ relativt til S' . Finnes også ved å løse ut for z og t fra transformasjonsligningene for z' og t' .)

På vektorform:

$$\vec{r}' = \vec{r} + [\gamma(z - vt) - z] \frac{\vec{v}}{v}.$$

Da $\vec{v} \cdot \vec{r}' = vz$ blir $z = \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}'}{v}$, så

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} + \left[(\gamma - 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}'}{v} - \gamma vt \right] \frac{\vec{v}}{v} \\ &= \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{r}') \vec{\beta}}{\beta^2} - \gamma ct \vec{\beta}. \end{aligned}$$

Tilsvarende for t' :

$$\begin{aligned} t' &= \gamma t - \frac{\gamma v z}{c^2} = \gamma t - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{r} = \gamma t - \frac{\gamma}{c} \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{r} \\ &= \gamma t - \frac{\gamma}{c} \vec{\beta} \cdot \vec{r}. \end{aligned}$$

Da Lorentztransformasjonen er lineær, kan vi bruke ideer og formelapparat fra kapittel 5. Innfører en “4. dimensjon” med variabelen

$$x_4 = ict,$$

dvs vi innfører et 4-dimensjonalt **Minkowskirom** med akser

$$x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z; x_4 = ict.$$

Vi får dermed for den invariante størrelsen:

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = \sum_{\mu=1}^4 x_{\mu}x_{\mu} \equiv x_{\mu}x_{\mu}$$

(vi benytter summekonvensjonen: sum over repeterte indekser).

En vektor i Minkowskirommet kaller vi en 4-vektor. Standard notasjon i denne forbindelse:

- greske indekser for 4-vektorer ($\alpha, \beta, \mu, \dots$)
- romanske indekser for 3-vektorer (i, j, k, \dots).

Vi kan nå uttrykke invarians av lyshastigheten ved å si at $x_{\mu}x_{\mu}$ er en invariant. Med andre ord: **normen** av posisjonsvektoren i Minkowskirommet er konstant under en Lorentztransformasjon. Fra kapittel 5.2: en lineær transformasjon som ikke endrer vektorens lengde (størrelse, norm) er en såkalt **ortogonal** transformasjon.

Lorentztransformasjonen er en ortogonal transformasjon i Minkowskirommet

Lorentztransformasjonen på matriseform:

$$\mathbf{x}' = \mathbb{L}\mathbf{x} \quad \text{evt.} \quad x'_{\mu} = L_{\mu\nu}x_{\nu}$$

Vi valgte relativ hastighet v langs z -aksen: $\vec{v} = v\hat{z} = vx_3$, gir transformasjonsmatrisen:

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

Fra kapittel 5 vet vi også at for en ortogonal matrise gjelder:

$$\mathbb{L}^{-1} = \tilde{\mathbb{L}},$$

der $\tilde{\mathbb{L}}$ er den transponerte av \mathbb{L} . Invers Lorentztransformasjon kan derfor skrives slik:

$$x_{\mu} = L_{\mu\nu}^{-1}x'_{\nu} = \tilde{L}_{\mu\nu}x'_{\nu} = L_{\nu\mu}x'_{\nu},$$

og vi kan umiddelbart skrive ned den inverse transformasjonsmatrisen:

$$\mathbb{L}^{-1} = \tilde{\mathbb{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -i\beta\gamma \\ 0 & 0 & i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

Som før ser vi at invers Lorentztransformasjon svarer til å la $v \rightarrow -v$.

8.2.1 Einsteins addisjonsformel

Vi ser som før på to inertialsystemer S og S' der S' beveger seg i forhold til S med hastighet v langs z -aksen. Vi velger at origo i de to systemene sammenfaller ved $t = t' = 0$. Vi lar $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ være den vanlige tredimensjonale hastigheten til en materiell partikkel i systemet S . På komponentform: $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$ og $u_z = \frac{dz}{dt}$.

I S' -systemet er tilsvarende $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$, $u'_y = \frac{dy'}{dt'}$ og $u'_z = \frac{dz'}{dt'}$. Fra Lorentztransformasjonen får vi at

$$\begin{aligned} dx' &= dx \\ dy' &= dy \\ dz' &= \gamma(dz - vdt) \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dz\right), \end{aligned}$$

som gir oss

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dz\right)} = \frac{u_x}{\gamma(1 - vu_z/c^2)}. \quad (8.1)$$

Tilsvarende blir

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - vu_z/c^2)}, \quad (8.2)$$

mens

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{\gamma(dz - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dz\right)} = \frac{u_z - v}{1 - vu_z/c^2} \quad (8.3)$$

Ligningene (8.1), (8.2) og især (8.3), kalles **Einsteins addisjonsformler**. Vi legger merke til at

1. Når $v \ll c$, dvs. $\beta \ll 1$ og $\gamma \simeq 1$, blir $u'_x = u_x$, $u'_y = u_y$ og $u'_z = u_z - v$, altså $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$. Dette er Galileitransformasjonen.
2. Den ekstremt relativistiske grensen $v \rightarrow c$, $\beta \rightarrow 1$ gir $u'_z \rightarrow \frac{u_z - c}{1 - u_z/c} \approx -c$, men vi ser at vi hele tiden har $|\vec{u}'_z| < c$.

8.2.2 Formelle egenskaper til \mathbb{L}

En **generell transformasjon** i Minkowskirommet (som bevarer konstanten c) kan skrives på formen:

$$\mathbf{x}' = \mathbb{L}\mathbf{x} + \mathbf{a},$$

der \mathbb{L} er en ortogonal 4×4 -matrise og \mathbf{a} en 4-dim. translasjonsvektor (svarer til skifte av origo. Kan være romlig translasjon eller omdefinering av nullpunkt for tid).

En transformasjon som består av en Lorentztransformasjon og en translasjon (som dette) kalles en **Poincaré-transformasjon**. Kalles også en inhomogen Lorentztransformasjon når $\mathbf{a} \neq 0$.

At \mathbb{L} er ortogonal medfører (se kapittel 5.3)

$$\mathbb{L}\tilde{\mathbb{L}} = \tilde{\mathbb{L}}\mathbb{L} = \mathbb{I}.$$

Det gir 10 betingelser (det kan du selv sjekke) for elementene i \mathbb{L} og dermed $16 - 10 = 6$ uavhengige elementer i \mathbb{L} . Med 4 uavhengige elementer i \mathbf{a} , gir det at en generell Poincarétransformasjon har $6 + 4 = 10$ uavhengige elementer.

En **homogen Lorentztransformasjon** har formen $\mathbf{x}' = \mathbb{L}\mathbf{x}$ og har dermed 6 frie elementer. Vi skal videre kun se på homogene Lorentztransformasjoner.

Ortogonalitetsbetingelsen gir at (jf. kapittel 5.3)

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \mathbb{L}\tilde{\mathbb{L}} \\ &\Downarrow \\ 1 &= |\mathbb{I}| = |\mathbb{L}\tilde{\mathbb{L}}| = |\mathbb{L}| \cdot |\tilde{\mathbb{L}}| \\ &\Downarrow \\ |\mathbb{L}| &= \pm 1. \end{aligned}$$

Vi skiller mellom

- $|\mathbb{L}| = 1$: **proper** Lorentztransformasjon; kan gå kontinuerlig over i identitetstransformasjonen \mathbb{I} .
- $|\mathbb{L}| = -1$: **improper** Lorentztransformasjon; kan *ikke* fremkomme kontinuerlig fra identitetstransformasjonen. Fås f.eks. ved inversjon av romaksene men ikke tidsaksen.

Vi skal nå se at vi må ha $L_{44}^2 \leq 1$. Vi har at $\mathbb{L}\tilde{\mathbb{L}} = 1$, så

$$L_{\mu\alpha}\tilde{L}_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu} \implies L_{44}^2 + L_{4j}L_{4j} = 1.$$

Ettersom L_{4j} forbinder en imaginær koordinat x'_4 med en reell romkoordinat x_j , må vi ha $L_{4j}L_{4j} \leq 0$ (og reell), og dermed

$$L_{44}^2 = 1 - L_{4j}L_{4j} \geq 1 \quad (\text{og reell}). \quad (8.4)$$

Vi mellom de to mulige måtene dette kan oppfylles på

- $L_{44} \geq 1$: **ortokron** transformasjon.
- $L_{44} \leq -1$: **ikke-ortokron** transformasjon. Involverer tidsinversjon.

Den eneste typen Lorentztransformasjon som kan gå kontinuerlig over i \mathbb{I} er proper og ortokron, dvs. med $|\mathbb{L}| = +1$ og $L_{44} \geq 1$. Dette kalles gjerne **begrenset Lorentztransformasjon**, og reduserer seg til Galilei-transformasjonen ved $v \ll c$.

8.3 Litt om reell metrikk

Dette er ikke direkte eksamensstoff, men notasjonen vi presenterer her, dukker opp senere for den som vil se nærmere på f.eks. feltteori.

Definerer et **Riemannrom** med koordinater x_μ som kan være reelle eller komplekse. **Metrikken** eller den **metriske tensoren** $g_{\mu\nu}$ gir uttrykket for et infinitesimale buelengdeelement:

$$ds^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

Notasjonen er:

- Kovariante vektorkomponenter har nedre indeks: x_μ
- Kontravariante vektorkomponenter har øvre indeks: x^μ .

Navnene har sammenheng med måten vektorene endrer seg under infinitesimale transformasjoner. Vi skal ikke gå nærmere inn på dette her.

Den metriske tensoren \mathbf{g} gir sammenhengen mellom x_μ and x^ν :

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

For veielementet ds kan vi da skrive:

$$ds^2 = dx_\mu g^{\mu\nu} dx_\nu = dx_\mu dx^\mu.$$

Det betyr at dersom ds^2 er invariant, så er også $dx_\mu dx^\mu$ invariant.

For det komplekse Minkowskirommet vi har regnet med hadde vi $x_4 = ict$, så vi kan bruke $\mathbf{g} = \mathbb{I}$, og får

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2,$$

som vi tidligere har vist at er invariant. I dette tilfellet blir $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, $x_\mu = x^\nu$ og vi har $\text{Tr}(\mathbf{g}) = +4$. "Tr" står for "Trace" eller **spor** på norsk, og er en operator definert som:

$$\text{Tr}(\mathbb{A}) = \sum_{\mu} A_{\mu\mu},$$

dvs. summen av diagonalelementene i matrisen.

La oss se på et par alternativer til det komplekse Minkowskirommet.

1. La

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

For å få $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ invariant, la oss velge metrikken

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

som gir

$$\begin{aligned} dx_0 &= g_{0\nu}dx^\nu = g_{00}dx^0 = -c \cdot dt \\ dx_1 &= g_{1\nu}dx^\nu = g_{11}dx^1 = dx \\ dx_2 &= g_{2\nu}dx^\nu = g_{22}dx^2 = dy \\ dx_3 &= g_{3\nu}dx^\nu = g_{33}dx^3 = dz, \end{aligned}$$

altså

$$ds^2 = -c^2 dt + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

som vi vet er invariant. I dette tilfellet er $\text{Tr}(\mathbf{g}) = +2$.

2. La igjen

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z,$$

men nå med metrikken

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

og vi får

$$\begin{aligned} dx_0 &= +dx^0 = c \cdot dt \\ dx_1 &= -dx^1 = -dx \\ dx_2 &= -dx^2 = -dy \\ dx_3 &= -dx^3 = -dz, \end{aligned}$$

med kurveelementet

$$ds^2 = c^2 dt - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

igjen en invariant. I dette tilfellet er $\text{Tr}(\mathbf{g}) = -2$.

I vitenskapen er det gjerne slik at dersom noe kan gjøres på to måter, så gjøres det på begge, og valg av metrikk er dessverre intet unntak. De to valgene over er akkurat like gode, og er begge i bruk i forskjellige deler av litteraturen til potensiell forvirring for leseren.

En god motivasjon til å benytte reell metrikk istedet for den komplekse dukker raskt opp når en skal kombinere metrikken med kvantemekanikk, slik en for eksempel raskt må i partikkelfysikk. Sett at en betrakter en bølgefunksjon i et 4-dimensjonalt rom beskrevet av en kompleks Minkowski-metrikk, og ønsker å komplekskonjugere denne (svarer til $i \rightarrow -i$). Bølgefunksjonen skal konjugeres (imaginærdel skifter fortegn), mens selve rommet, og dermed koordinatsystemet, forblir uforandret (imaginærdel skifter *ikke* fortegn), og dermed må en holde styr på hvilke i -er som hører koordinatsystemet til og hvilke som hører bølgefunksjonen til. I dette kurset støter vi imidlertid ikke på slike problemer og fortsetter derfor ubekymret å betrakte den komplekse formuleringen.

8.4 Kovariant firedimensjonal formulering

Til grunn i relativitetsteorien ligger prinsippet om at alle inertialsystemer har nøyaktig samme fysiske lover (ekvivalensprinsippet), og som vi har sett gjør dette at det er nødvendig at tidskoordinaten transformeres på samme måte som romkoordinater ved overgang mellom inertialsystemer, og at alle de fire koordinatene må inngå i relativistiske bevegelsesligninger på like fot (de som kjenner Schrödingerligningen fra kvantemekanikken husker kanskje at denne inneholder dobbeltderivasjon av romkoordinater, men kun en enkel derivasjon med hensyn på tiden. Schrödingerligningen kan derfor ikke være relativistisk, og det er den heller ikke). Dette er en motivasjon for å innføre det firedimensjonale Minkowskirommet i vår spesielle relativitetsteori. I den generelle relativitetsteorien er en lignende formulering (se evt. kap. 8.3) ikke bare hensiktsmessig, men temmelig nødvendig.

MERK: Uttrykket “kovariant” her har ingenting å gjøre med distinksjonen mellom de ulike vektorkomponentene i avsnitt 8.3! I denne forbindelse setter vi likhetstegn mellom kovarians og forminvarians. Vi ønsker altså å se i hvilken grad fysiske ligninger bevarer sin form under en Lorentztransformasjon. Anta at en fysisk ligning har formen

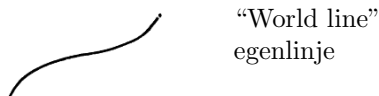
$$F_{\alpha\beta\gamma\dots} = G_{\alpha\beta\gamma\dots},$$

da er ligningen kovariant dersom

$$F'_{\alpha\beta\gamma\dots} = G'_{\alpha\beta\gamma\dots}$$

etter en Lorentztransformasjon. α, β osv. er de frie indeksene i ligningen (i motsetning til eventuelle summerte indekser).

Vi starter med å betrakte et punkt i Minkowskirommet med koordinater (x_1, x_2, x_3, x_4) . En partikkel som beveger seg i rommet vil beskrives av en “vei” i Minkowskirommet.



En liten endring av koordinatene langs egenlinjen beskrives av 4-vektoren dx_μ . Vi har sett at $dx_\mu dx_\mu$ er en Lorentzinvariant (dvs. har samme verdi målt i alle inertialsystemer).

Vi definerer **egentiden**:

$$dx_\mu dx_\mu \equiv -c^2 d\tau^2. \quad (8.5)$$

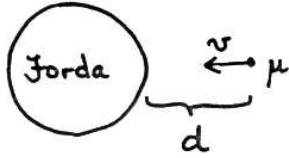
Vi legger nå inertialsystemet S' “på” partikkelen som beveger seg, dvs. partikkelen er i ro i S' . Da har vi

$$\begin{aligned} dx'_\mu &= (0, 0, 0, icdt') & \implies & dx'_\mu dx'_\mu = -c^2 dt'^2 \\ d\tau &= dt' \end{aligned}$$

Sett fra inertialsystemet S , beveger partikkelen seg med hastighet u ($u^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$). Her er

$$\begin{aligned} dx_\mu &= (dx, dy, dz, icdt) \\ dx_\mu dx_\mu &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \\ &\Downarrow \\ -c^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 &= u^2 - c^2 \\ d\tau^2 &= (1 - u^2/c^2) dt^2 \\ dt &= \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} > d\tau \end{aligned}$$

Med ord: klokka i S (der partikkelen beveger seg) viser en tid dt som er lengre enn tida $d\tau$ som vises på klokka i S' (der partikkelen er i ro, partikkelens *hvilesystem*). Dette kalles **tidsdilatasjon**

Eksempel: Levetid for μ -mesoner (myoner) i atmosfæren

Myoner dannes pga. kosmisk stråling i den ytre atmosfæren ved $d \sim 6$ km. fra jordoverflaten. Levetiden i myonets hvilesystem er $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$ s. Myonets hastighet ift. jorden er (typisk) $2.994 \cdot 10^8$ m/s, altså ganske nær lysets hastighet.

Ikkerelativistisk ville et myon tilbakelegge en avstand $l_0 = v\tau = 600$ m iløpet av sin levetid, og nesten ingen myoner skulle nå frem til oss. Dette er ikke i samsvar med målinger ved jordoverflaten, der myondeteksjoner er hyppige. En relativistisk betraktning må til.

- Sett fra jorda: Myonets levetid blir

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 32 \cdot 10^{-6} \text{ s},$$

og med hastigheten $v = 2,994 \cdot 10^8$ m/s kan et typisk meson tilbakelegge en avstand

$$l = vt \approx 9,6 \text{ km} > d,$$

dvs. de fleste myoner når frem til jorda!

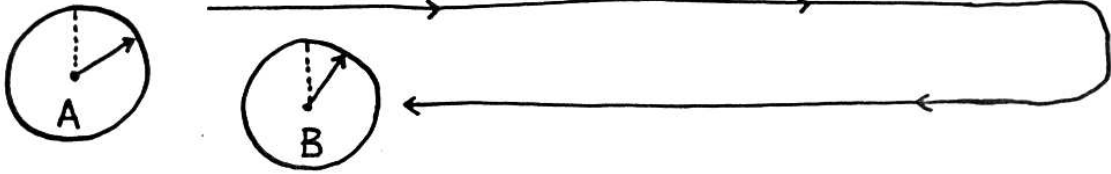
- Sett fra myonets hvilesystem: Jorda beveger seg med hastigheten $v = 2,994 \cdot 10^8$ m/s mot myonet. Lorentztransformasjonen $z' = \gamma(z - vt)$ gir sammenhengen mellom avstand z' observert fra jorda og avstand z og tid t observert fra myonets hvilesystem. La myonet dannes ved $t = 0$. Avstand til jorda, sett fra myonet, blir dermed

$$z = z' \sqrt{1 - \beta^2} \approx 375 \text{ m},$$

der vi har brukt $z' \approx 6$ km. Det betyr at jorda når frem til myonet etter en tid $t = z/v \approx 1,25 \cdot 10^{-6}$ s, altså i god tid før myonet dør!

Eksperiment, CERN 1975: Bailey et al. Physics Letters 55B, 420 (1975)

Eksempel: Tvillingparadokset



Vi ser på følgende tilfelle. Klokke B reiser vekk fra klokke A, snur og kommer tilbake. Klokke A viser at B har vært borte en tid T , mens klokke B viser at B har vært borte en tid T/γ .

Men: Kan ikke klokke B oppfatte situasjonen slik at det er den som er i ro mens A reiser vekk og kommer tilbake? Isåfall ville B forvente at A har målt en tid T/γ^2 på sin klokke.

Nei! Situasjonen er ikke symmetrisk! Asymmetrien kommer av at B *snur*. Han endrer sin hastighet fra v til $-v$ (eller tilsvarende) og utsettes dermed for en akselerasjon (som han selv kan måle). Med andre ord skifter B fra ett inertialsystem til et annet, mens A ikke gjør det.

Denne asymmetrien kan utledes mer rigorøst ved å betrakte lyssignaler emittert fra A og B med *jevne* mellomrom (målt på klokkene A og B) og benytter Dopplereffekten: På vei ut mottar både A og B den andres signal med redusert frekvens $f' = f[(1-\beta)/(1+\beta)]^{1/2}$. Når B snur, mottar han *straks* signaler med frekvens $f'' = f[(1+\beta)/(1-\beta)]^{1/2}$ fra A, mens det tar en tid L/c før A begynner å motta signaler med frekvens f'' fra B.

Eksempel: Klokker i rutefly rundt jorden

Nøyaktige Cs-klokker er i eksperiment blitt plassert i fly som går rundt jorda. Tidsdilatasjon ble da målt med en nøyaktighet på ca. 10% [Hafele og Keating, *Science* 177, 166 (1972)].

Med $v \sim 500\text{km/h} \sim 140\text{m/s}$ blir $\gamma \approx 1 + 10^{-13}$. Dermed, med $\Delta t \approx 11\text{timer} \approx 4 \cdot 10^4\text{s}$, blir $\Delta\tau = \Delta t(1 - 10^{-13}) = \Delta t - 4 \cdot 10^{-9}\text{s}$. Klokkene i flyet har altså saknet med 4 nanosekunder i forhold til den på jorda, i overensstemmelse med det som ble målt.

Vi har sett at $ds^2 = dx_\mu dx_\mu$ kan være positiv, negativ eller lik null. Vi skiller mellom disse tilfellene:

- romrettet ("space-like") dersom $x_\mu x_\mu > 0$,
- tidrettet ("time-like") dersom $x_\mu x_\mu < 0$,
- lyslik eller null ("light-like") dersom $x_\mu x_\mu = 0$.

Hvorfor disse betegnelsene? Betrakt to hendelser beskrevet ved hhv. $x_{1\mu} = (\vec{r}_1, ict_1)$ og $x_{2\mu} = (\vec{r}_2, ict_2)$. Vi ser på differansevektoren

$$X_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2, ic(t_1 - t_2)).$$

med normen

$$X_\mu X_\mu = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 - c^2(t_1 - t_2)^2$$

Vi velger et koordinatsystem slik at $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ligger langs z -aksen. I et system S' som beveger seg med hastighet v langs z -aksen, blir da

$$t'_1 - t'_2 = \gamma \left[t_1 - t_2 - \frac{v}{c^2}(z_1 - z_2) \right] = \frac{\gamma}{c} [c(t_1 - t_2) - \beta(z_1 - z_2)]$$

Hvis X_μ er romrettet (eller null), er $X_\mu X_\mu \geq 0$, dvs. $c|t_1 - t_2| \leq |z_1 - z_2|$, og det vil alltid finnes en hastighet $\leq c$ som gir $t'_1 - t'_2 = 0$, dvs. det finnes alltid et inertialsystem S' der de to hendelsene oppfattes som *simultane*. Hvis X_μ er tidrettet, er $X_\mu X_\mu < 0$, $c|t_1 - t_2| > |z_1 - z_2|$, og vi kan ikke finne et inertialsystem der hendelsene oppfattes som simultane.

Hendelser med *romrettet* separasjon kan altså ikke forbindes med et lyssignal, m.a.o. kan de to hendelsene ikke influere hverandre. De to hendelsene kan gjøres simultane, så “før” og “etter” er ikke entydig bestemt. Hendelser med *tidrettet* separasjon *kan* forbindes med et lyssignal, så de to hendelsene har mulighet til å influere hverandre. Nå kan hendelsene imidlertid *ikke* gjøres simultane (dvs. $t_1 > t_2 \Rightarrow t'_1 > t'_2$ uansett inertialsystemer) så “før” og “etter” er entydige begreper. Vi kan nå snakke om **kausaltet**, prinsippet om årsak før virkning.

8.4.1 Firinghastighet

Det virker naturlig å definere den firedimensjonale hastigheten slik

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}, \quad (8.6)$$

der $dx_\mu = (dx_i, ic \cdot dt)$ og τ er den Lorentzinvariante skalaren vi kalte egentiden.

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{dx_i}{d\tau} = \gamma \frac{dx_i}{dt} = \gamma u_i \\ u_4 &= \frac{dx_4}{d\tau} = ic \frac{dt}{d\tau} = ic\gamma, \end{aligned}$$

altså

$$u_\mu = \gamma(\vec{u}, ic) \quad (8.7)$$

Firinghastigheten er tidsrettet, for

$$u_\mu u_\mu = \gamma^2 u^2 - \gamma^2 c^2 = \frac{u^2 - c^2}{1 - u^2/c^2} = -c^2 < 0. \quad (8.8)$$

Det er nyttig å merke seg at $u_\mu u_\mu = -c^2$ er en invariant.

8.4.2 Firingstrømtetthet

Vi husker kontinuitetsligningen for en generell ladningstetthet ρ (“ladning” kan her bety f.eks. masse, total sannsynlighet elektrisk ladning):

$$\nabla \cdot \vec{j} - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

der \vec{j} er den tilhørende strømtettheten. Ligningen er ekvivalent med en **lokal bevaringslov** ladningen tilsvarende ρ : divergensen (det vil si netto strøm ut av et infinitesimalt volumelement) er lik tidsendringen i tettheten (altså tidsendringen av mengden ladning innenfor samme infinitesimale volumelement), eller med andre ord: all endring av ladning innenfor et lite volum skyldes strøm av ladning gjennom volumets overflate.

Merk at enhver bevaringslov i relativitetsteorien er nødt til å ha en slik *lokal* form. “Bevaring” av ladning betyr ikke annet enn at den totale ladningen er lik til enhver tid, men vi kan ikke tillate at en ladning forsvinner ett sted og dukker opp igjen en endelig avstand unna i samme øyeblikk, fordi samtidighet ikke er et absolutt begrep. Sett fra et annet inertialsystem ville det da se ut som om ladningen et lite øyeblikk forsvant eller ble doblet, og den totale ladningen altså *ikke* bevart.

Kontinuitetsligningen får en elegant form dersom vi definerer firingstrømtettheten

$$j_\mu = (j_i, ic\rho). \quad (8.9)$$

Da kan kontinuitetsligningen skrives på formen

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu \equiv \partial_\mu j_\mu = 0 \quad (8.10)$$

Ikke uventet er firervektoren j_μ nettopp $\rho_0 U_\mu$, der ρ_0 er ladningstettheten i inertialsystemet hvor ladningen er i ro, og U_μ er firerhastigheten. Dermed:

$$j_\mu = \rho_0 U_\mu = (\gamma \rho_0 \vec{u}, i c \gamma \rho_0) = (\rho \vec{u}, i c \rho) = (\vec{j}, i c \rho) \quad (8.11)$$

Ladningstettheten ρ for en ladning i bevegelse blir større enn ρ_0 på grunn av lengdekontraksjonen; $\rho = \gamma \rho_0 > \rho_0$. Ladningsbevarelsen bør holde sett fra ethvert inertialsystem, så vi forventer (forlanger!) at kontinuitetsligningen er kovariant under en Lorentztransformasjon. Da

$$dx_\mu = L'_{\mu\nu} dx'_\nu = \tilde{L}_{\mu\nu} dx_\nu = L_{\nu\mu} dx_\nu,$$

følger det at

$$\frac{\partial}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = L_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

Dermed transformerer både $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ og j_μ på samme måte som dx_μ under en Lorentztransformasjon, og divergensen $\partial_\mu j_\mu$ må derfor være en Lorentzinvariant skalar. Kontinuitetsligningen er dermed kovariant (dvs. har samme form før og etter en vilkårlig Lorentztransformasjon).

8.4.3 Maxwells ligninger og firerpotensial

Litt rekapitulasjon først; Maxwells ligninger (i et medium):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho & \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{aligned}$$

der vi har brukt

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} + \vec{M} \end{aligned}$$

($\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m}$). Lorentzkraften::

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

Ettersom $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, kan vi innføre det elektromagnetiske vektorpotensialet

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A},$$

ettersom $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ for en vilkårlig vektor \vec{A} . Dermed

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) &= 0 \\ \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= 0, \end{aligned}$$

så vi kan skrive

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi,$$

fordi $\nabla \times \nabla \chi = 0$ for vilkårlig skalar χ . Vi antar så at vi er i vakuum; $\vec{P} = 0$ og $\vec{M} = 0$:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right).$$

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, så

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\epsilon_0 \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right] &= \rho \\ \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) &= -\rho / \epsilon_0 \end{aligned}$$

Vi har videre i vakuum at $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$, og Maxwell-ligningen for curl til magnetfeltet kan vi skrive

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ \nabla \times \nabla \times \vec{A} &= \mu_0 \vec{j} - \epsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Fra matematikken har vi identiteten $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, så

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j}$$

Maxwells 2 skalare ligninger og to vektorligninger for \vec{E} og \vec{B} (tilsammen åtte skalare ligninger) er nå redusert til en skalar ligning og en vektorligning for φ og \vec{A} (tilsammen fire skalare ligninger), men de er fremdeles *koblede*. Vi kan “dekoble” ligningene ved å utnytte at vi har en viss frihet til selv å velge φ og \vec{A} ;

Da $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, vil \vec{B} bli uforandret ved transformasjonen

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi \quad (\chi \text{ er en vilkårlig konstant}), \quad (8.12)$$

fordi $\nabla \times \nabla \chi = 0$. Men ettersom $\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, må vi samtidig foreta transformasjonen

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (8.13)$$

for at også \vec{E} skal forbli uforandret. Denne friheten til å justere potensialene φ og \vec{A} kalles justérinvarians eller (mer vanlig) **gaugeinvarians**.

Et vanlig valg er å ta χ som oppfyller

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

Dette er såkalt **Lorentz-gauge** og henger sammen med **Lorentzbetingelsen**

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (8.14)$$

(Hvis $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, får vi

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} &= \nabla \cdot (\vec{A} + \nabla \chi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \\ &= \underbrace{\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}}_{=0}. \quad \text{OK!} \end{aligned}$$

Bruker nå Lorentzbetingelsen til å dekkle ligningene for φ og \vec{A} :

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}\tag{8.15}$$

og

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \underbrace{\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}_{=0} &= -\mu_0 \vec{j} \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j}.\end{aligned}\tag{8.16}$$

Nå kan vi innføre **firerpotensialet**

$$A_\mu = (\vec{A}, i\varphi/c).\tag{8.17}$$

Lorentzbetingelsen får da formen

$$\partial_\mu A_\mu = 0\tag{8.18}$$

og “bølgeligningene” 8.15 og 8.16 kan skrives som

$$\square^2 A_\mu = -\mu_0 j_\mu,\tag{8.19}$$

der

$$\square^2 \equiv \partial_\mu \partial_\mu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\tag{8.20}$$

er **D’Alemberts operator**. Firerstrømtettheten j_μ definerte vi i ligning 8.9.

Dermed ser vi at A_μ transformerer som j_μ , dvs. som x_μ , under en Lorentztransformasjon (\square^2 er en invariant skalar operator), og vi kan konkludere med at

Maxwells elektromagnetiske teori er kovariant, det vil si i samsvar med den spesielle relativitetsteorien.

(8.21)

8.5 Relativistisk mekanikk

Newtons 2. lov, $\vec{F} = m\vec{a}$, er invariant under en Galileitransformasjon, men *ikke* under en Lorentztransformasjon. Dermed er det nødvendig å finne en generalisering av Newtons mekanikk som

- tilfredsstillt kravet om kovarians i spesiell relativitetsteori, og
- reduserer seg til $\frac{d}{dt}(mu_i) = F_i$ for $v_i \ll c$.

Vi ønsker å arbeide med følgende størrelser:

- m , invariant masse
- τ , egentid
- U_μ , firerhastighet
- K_μ , Minkowskikraften

Ettersom

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow 0} d\tau &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} dt = dt \\ \lim_{u \rightarrow 0} U_i &= \lim_{u \rightarrow 0} \gamma u_i = u_i,\end{aligned}$$

må vi kreve at

$$\lim_{u \rightarrow 0} K_i = F_i.$$

Når vi nå skal forsøke å finne uttrykk for K_i , bruker vi elektromagnetisk teori, fordi

- Vi har sett at den er kovariant, og
- vi kjenner allerede Lorentzkraften,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

Vi har

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = q(-\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{u} \times \nabla \times \vec{A}) \\ \vec{u} \times \nabla \times \vec{A} &= \nabla(\vec{u} \cdot \vec{A}) - (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{A} \\ &\Downarrow \\ F_i &= -q \left[\partial_i(\varphi - \vec{u} \cdot \vec{A}) + \frac{dA_i}{dt} \right] \end{aligned}$$

Da

$$U_\mu A_\mu = \gamma u_i A_i + \gamma ic \frac{i\varphi}{c} = \gamma(\vec{u} \cdot \vec{A} - \varphi),$$

og $d\tau = \gamma dt$, får en

$$F_i = -q \left[-\frac{1}{\gamma} \partial_i(U_\mu A_\mu) + \frac{1}{\gamma} \frac{dA_i}{d\tau} \right] = \frac{q}{\gamma} \left[\partial_i(U_\mu A_\mu) - \frac{dA_i}{d\tau} \right].$$

Både $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ og dA_i transformeres som romkomponenter av en firervektor (mens $U_\mu A_\mu$ og $d\tau$ er invariante skalarer), så vi identifiserer

$$\begin{aligned} K_i &= q \left[\partial_i(U_\mu A_\mu) - \frac{dA_i}{d\tau} \right] \\ K_i &= \gamma F_i \end{aligned} \tag{8.22}$$

Minkowskikraften blir altså

$$K_\mu = q \left[\partial_\mu(U_\nu A_\nu) - \frac{dA_\mu}{d\tau} \right] \tag{8.23}$$

for kraft på ladde partikler.

Det er nå naturlig å innføre **firerimpulsen**:

$$p_\mu = mU_\mu = (m\gamma\vec{u}, ic\gamma m), \tag{8.24}$$

slik at vi kan skrive Minkowskikraften på formen

$$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}. \tag{8.25}$$

Med (8.25), $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ og $\vec{K} = \gamma \vec{F}$, får vi:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{8.26}$$

også relativistisk!

Hva så med tidsdimensjonen av Minkowskikraften, K_4 ? Vi fant i ligning 8.8 at $U_\mu U_\mu = -c^2$, så

$$U_\mu K_\mu = U_\mu \frac{d}{d\tau}(mU_\mu) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} m U_\mu U_\mu \right) = -\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} mc^2 \right) = 0,$$

så

$$\begin{aligned} U_i K_i + U_4 K_4 &= 0 \\ \gamma u_i \gamma F_i + ic \gamma K_4 &= 0 \\ K_4 &= \frac{i\gamma}{c} \vec{F} \cdot \vec{u}, \end{aligned}$$

altså

$$K_\mu = \gamma(\vec{F}, \frac{i}{c} \vec{F} \cdot \vec{u}). \quad (8.27)$$

Vi har $\frac{dp_4}{d\tau} = K_4$, $p_4 = mU_4 = icm\gamma$, og $K_4 = \frac{i}{c} \gamma \vec{F} \cdot \vec{u}$, og dermed

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(icm\gamma) &= \frac{i}{c} \gamma \vec{F} \cdot \vec{u} \\ \frac{d}{dt}(\gamma mc^2) &= \vec{F} \cdot \vec{u} \\ \frac{dE}{dt} &= \vec{F} \cdot \vec{u}; \quad E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned}$$

(merk: i Goldstein brukes T istedet for E). Alt oppsummert:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}; \quad \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}; \quad p_\mu = (\vec{p}, \frac{i}{c} E)} \quad (8.28)$$

Hvis $\beta \ll 1$ fås $E = mc^2 + \frac{1}{2}mu^2 =$ hvileenergi + kinetisk energi (ofte brukes m_0 om den invariante massen, men vi bruker bare m). Dersom partikkelen er i et ytre felt må den potensielle energien V legges til for at vi skal få den *totale* energi (målt i forhold til et definert nullpunkt).

Ettersom $p_\mu = mu_\mu = m \frac{dx_\mu}{d\tau}$, må p_μ transformere på samme måte som x_μ under en Lorentztransformasjon. Vi velger hastigheten v langs z -aksen som vanlig.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= \mathbb{L}\mathbf{p} \\ \mathbb{L} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned} p'_1 &= p_1, & p'_2 &= p_2 \\ p'_3 &= \gamma p_3 + i\beta\gamma p_4 = \gamma(p_3 - \frac{\beta}{c} E) \\ p'_4 &= -i\beta\gamma p_3 + \gamma \frac{iE}{c} \\ \frac{iE'}{c} &= -i\beta\gamma p_3 + \gamma \frac{iE}{c}, \end{aligned}$$

og

$$E' = \gamma(E - vp_3).$$

La oss regne ut invarianten $p_\mu p_\mu$ i partikkelens hvilesystem:

$$p_\mu p_\mu = p^2 - E^2/c^2 = -\frac{(mc^2)^2}{c^2} = -m^2 c^2,$$

ettersom $p = 0$ og $\gamma = 1$ i dette systemet. Da kan vi skrive generelt:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (8.29)$$

Et foton har $m = 0$ og dermed $E = pc$. Videre har fotonet $E = h\nu$, så

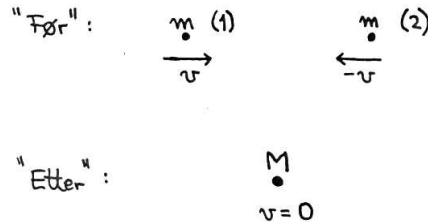
$$pc = p\nu\lambda = h\nu$$

$$p_{\text{ph}} = \frac{h}{\lambda} \quad (8.30)$$

Dette er de Broglies formel for partikkel-bølge-dualisme.

Eksempel: Energibevarelse og masseendring

Anta fullstendig uelastisk støt (illustrert):



Romlig impulsbevarelse, dvs. at \vec{p} er konstant i tid, impliserer umiddelbart at også energien E er bevart, ettersom Lorentztransformasjonen "blander" E med komponenter av \vec{p} . Dermed må total firerimpuls $p_\mu = (\vec{p}, \frac{iE}{c})$ være bevart.

$$P_\mu = p_{1\mu} + p_{2\mu} = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2, i\frac{E_1 + E_2}{c})$$

Bevarelse av P_4 :

$$\gamma mc^2 + \gamma mc^2 = Mc^2 \quad \implies \quad M = 2\gamma m > 2m,$$

så masseøkningen er

$$\Delta M = M - 2m = 2m(\gamma - 1)c^2.$$

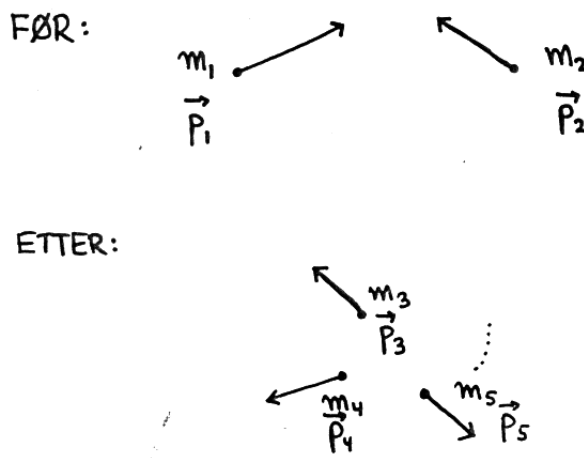
Kinetisk energi før kollisjonen ("sammensmeltingen") er omgjort til hvileenergi og dermed masse.

8.6 Relativistisk kinematikk

Relativistisk mekanikk spiller en helt sentral rolle innen høyenergi- og partikkelfysikk som f.eks. kommer til anvendelse i partikkelakseleratorer. I partikkelakseleratoren LHC (Large Hadron Collider) som idet dette skriver fremdeles er under bygging ved CERN og er planlagt å komme i drift i 2007, kan protoner akselereres til energier opp til 14 TeV (1 TeV = 10^{12} eV). Til sammenligning er protonets hvileenergi ca. 1 GeV, fire størrelsesordener mindre!

Vi skal se på en situasjon der to partikler kolliderer/vekselvirker og danner nye partikler (muligens fler enn 2).

Vi kjenner altså ikke detaljene i støtet, men vi kan likevel bruke klassisk mekanikk på systemet tilstrekkelig lang tid før og etter selve kollisjonsøyeblikket (som må behandles kvantemekanisk). I CM-systemet er total impuls $\vec{P} = 0$ (både før og etter kollisjonen, pr. definisjon). Bevaring av impuls og energi kan vi som vi har sett uttrykke samlet som **bevaring av firerimpuls**.



Figur 25: Relativistisk kollisjon mellom to partikler. To eller flere partikler produseres.

Total firerimpuls før støtet

$$P_\mu = p_{1\mu} + p_{2\mu},$$

og etter støtet

$$P'_\mu = p_{3\mu} + p_{4\mu} + \dots$$

må være like.

Anta at vi er i CM-systemet, og innfører **ekvivalent masse** til systemet:

$$M \equiv \frac{E'}{c^2}. \quad (8.31)$$

Vi har at

$$P'_\mu P'_\mu = \underbrace{\vec{P}'^2}_{=0} + \left(\frac{iE'}{c}\right)^2 = -\left(\frac{E'}{c}\right)^2 = -M^2 c^2$$

Da $P_\mu P_\mu$ er invariant, må vi også ha $P_\mu P_\mu = -M^2 c^2$ før støtet. Dermed

$$\begin{aligned} P_\mu P_\mu &= (p_{1\mu} + p_{2\mu})(p_{1\mu} + p_{2\mu}) = p_{1\mu} p_{1\mu} + p_{2\mu} p_{2\mu} + 2p_{1\mu} p_{2\mu} \\ &= -m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2 + 2\left(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - \frac{E_1 E_2}{c^2}\right) \\ &= -M^2 c^2, \end{aligned}$$

der vi har brukt at $p_\mu p_\mu = -m^2 c^2$ (se s. 98). Så

$$-M^2 c^4 = (E')^2 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2(E_1 E_2 - c^2 \vec{p}_1 \vec{p}_2).$$

Anta at en partikkel i utgangspunktet er i ro i labsystemet, f.eks. $\vec{p}_2 = 0$. Da er $E_2 = m_2 c^2$, og

$$\begin{aligned} (E')^2 &= M^2 c^4 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2E_1 m_2 c^2 \\ &= (m_1 + m_2)^2 c^4 + 2E_1 m_2 c^2 - 2m_1 m_2 c^4 \\ &= (m_1 + m_2)^2 c^4 + 2m_2 c^2 \underbrace{(E_1 - m_1 c^2)}_{K_1}, \end{aligned}$$

der K_1 er kinetisk energi til partikkel nr. 1. Det vil si

$$(E')^2 = M^2 c^4 = (m_1 + m_2)^2 c^4 + 2m_2 c^2 K_1.$$

Vi ser at tilgjengelig energi E' i CM-systemet øker langsomt med innkommende kinetisk energi:

$$\text{For } K_1 \gg m_1 c^2, m_2 c^2 : \quad E' \sim \sqrt{K_1}$$

Terskelenergien (kjent fra atom- og kjernefysikk?) er den minste energien som trengs for å få en reaksjon til å gå. I vårt system tilsvarer dette at alle reaksjonsproduktene er i ro i CM-systemet etter kollisjonen. I dette tilfellet blir den ekvivalente massen lik summen av massene til reaksjonsproduktene:

$$M = \sum_r m_r,$$

så

$$\begin{aligned} \left(\sum_r m_r\right)^2 c^4 &= (m_1 + m_2)^2 c^4 + 2m_2 c^2 K_1 \\ \frac{K_1}{m_1 c^2} &= \frac{(\sum_r m_r)^2 - (m_1 + m_2)^2 c^4}{2m_1 m_2}, \end{aligned}$$

der vi altså har antatt at partikkel 2, "target" lå i ro. Reaksjonens **Q -verdi** defineres slik:

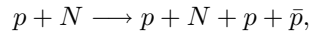
$$Q = \sum_r m_r (m_1 + m_2) = \text{ny masse i CM-systemet.} \quad (8.32)$$

Vi får da

$$\begin{aligned} \left(\sum_r m_r\right)^2 - (m_1 + m_2)^2 &= (Q + m_1 + m_2)^2 - (m_1 + m_2)^2 = Q^2 + 2Q(m_1 + m_2) \\ \frac{K_1}{m_1 c^2} &= \frac{Q^2 + 2Q(m_1 + m_2)}{2m_1 m_2} \end{aligned}$$

Eksempel: Produksjon av antiproton

Vi betrakter reaksjonen



der N representerer et nukleon (n eller p). Vi gjør forenklingen

$$m_p \approx m_n \approx m_{\bar{p}} \approx 938 \text{ MeV}/c^2 \equiv m.$$

Q -verdien blir

$$Q = 4m - 2m = 2m,$$

og

$$\begin{aligned} \frac{K_1}{m c^2} &= \frac{(2m)^2 + 4m \cdot 2m}{2m^2} = \frac{4 + 8}{2} = 6 \\ K_1 &= 6m c^2 = 5.57 \text{ GeV} \\ \frac{K_1}{c^2} &= 6m = 3Q. \end{aligned}$$

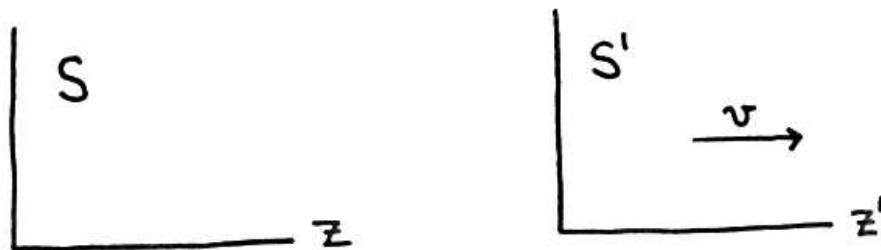
Vi har her latt N ligge i ro. La nå istedet $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ før støtet (dvs. at CM-systemet og lab.systemet nå er det samme). Da får vi

$$\begin{aligned} K_1 = K_2 &= m c^2 = 938 \text{ MeV} \quad (\text{all kinetisk energi kan gå over i hvileenergi!}) \\ \frac{K_1}{c^2} &= m = \frac{1}{2} Q \end{aligned}$$

Vi ser at det er svært hensiktsmessig å akselerere partiklene i motsatt retning i en ringformet bane.

8.6.1 Relativistisk felttensor

Vi velger konfigurasjonen vår som før:



Lorentztransformasjonen som en 4-dimensjonal tensor av rang 2 skriver vi:

$$L_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

Den **elektromagnetiske felttensoren** defineres slik:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \quad (8.33)$$

$A_\mu = (\vec{A}, i\varphi/c)$ er det elektromagnetiske firerpotensialet som vi definerte i ligning 8.17.

Vi ser at dette er en **antisymmetrisk** tensor, dvs.

$$F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$$

(generelt sier vi at en tensor med vilkårlig antall indekser er antisymmetrisk i indeksene α og β dersom et ombytte av de to indeksene gir samme tensor tilbake, men med motsatt fortegn. Dersom dette er tilfelle ved ombytte av et vilkårlig par av indekser, sier vi at tensoren er *fullstendig* antisymmetrisk). Dersom vi uttrykker \vec{E} og \vec{B} ved \vec{A} og φ ,

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A},$$

kan vi skrive felttensoren slik:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.34)$$

Vi Lorentztransformerer $F_{\mu\nu}$ slik:

$$L'_{\mu\nu} = L_{\mu\alpha}L_{\nu\beta}F_{\alpha\beta}. \quad (8.35)$$

Dette er i utgangspunktet 16 ligninger, men ettersom $F_{\mu\nu}$ (og dermed nødvendigvis $F'_{\mu\nu}$!) er symmetrisk, blir 6 av ligningene ekvivalente med andre ligninger. Videre er alle diagonalelementene i $L_{\mu\nu}$ og $L'_{\mu\nu}$ null (følger av antisymmetrien), så fire nye ligninger forsvinner, og det står igjen seks lineært uavhengige ligninger å løse. For eksempel kan vi ta ligningen $\mu = 4, \nu = 1$:

$$\frac{i}{c}E'_1 = F'_{41} = L_{4\alpha}L_{1\beta}F_{\alpha\beta} = L_{4i}L_{11}F_{i1} = -i\beta\gamma B_2 + \gamma\frac{i}{c}E_1$$

altså

$$E'_1 = \gamma(E_1 - vB_2), \quad (8.36)$$

og tilsvarende får vi

$$E'_2 = \gamma(E_2 + vB_1). \quad (8.37)$$

$\mu = 4, \nu = 3$ gir

$$\begin{aligned} F'_{43} &= L_{4\alpha}L_{3\beta}F_{\alpha\beta} = -\beta\gamma L_{3\beta}F_{3\beta} + \gamma L_{3\beta}F_{4\beta} \\ &= -\beta\gamma \cdot i\beta\gamma \left(-\frac{i}{c}E_3\right) + \gamma^2 \frac{i}{c}E_3 = \frac{i}{c}\gamma^2 E_3(1 - \beta^2) = \frac{i}{c}E_3, \end{aligned}$$

dvs.

$$E'_3 = E_3. \quad (8.38)$$

Dersom nå $v \ll c$, forenkles ligningene 8.36-8.38 som

$$E'_1 = E_1 - vB_2, \quad E'_2 = E_2 - vB_1, \quad E'_3 = E_3,$$

som vi kan generalisere til en vektorligning:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}. \quad (8.39)$$

Magnetfeltet gis av “romdelen” av $F_{\mu\nu}$:

$$F'_{ik} = L_{i\alpha}L_{k\beta}F_{\alpha\beta}.$$

F.eks. $i = 1$ og $k = 2$ gir

$$B'_3 = F'_{12} = L_{1\alpha}L_{2\beta}F_{\alpha\beta} = L_{1\alpha}F_{\alpha 2} = F_{12} = B_3. \quad (8.40)$$

På akkurat samme måte får vi for $(i, k) = (2, 3)$ og $(i, k) = (1, 3)$ henholdsvis

$$B'_1 = \gamma(B_1 + \frac{\beta}{c}E_2) \quad (8.41)$$

$$B'_2 = \gamma(B_2 - \frac{\beta}{c}E_1), \quad (8.42)$$

Vi ser på tilfellet $v \ll c$ og som for det elektriske feltet kan også det transformerte magnetfeltet skrives som en generell vektorligning i dette tilfellet:

$$\vec{B}' = \vec{B} \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}). \quad (8.43)$$

Ligningene 8.39 og 8.43 benyttes mye i magnetohydrodynamikken (MHD). Dersom de skrives på komponentform gir de tilsammen har 6 skalare ligninger, samme antall vi kom frem til ved kun å betrakte symmetrier i ligning 8.35.

9 Kanoniske transformasjoner

Kanoniske transformasjoner er knyttet til Hamiltonformuleringen av mekanikken. Vi så i kapittel 3 at det som regel *ikke* er noen fordel med Hamiltonformalismen fremfor Lagrangeformalismen når det gjelder å løse konkrete problemer i mekanikken. Fordelene med Hamiltonformulering er av en mer fundamental art: vi bruker nå koordinater q og impulser p som uavhengige variable på samme nivå. Det viser seg viktig i både statistisk mekanikk og kvantemekanikk.

9.1 Transformasjon av faserommet

Faserommet utspennes av $2n$ akser; n akser for q_i og n akser for p_i . Vi husker at kanonisk impuls var gitt ved:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p(q, \dot{q}, t), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

og Hamiltons ligninger var

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \right\}; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Vi har allerede sett at vi kan foreta “vanlige” koordinattransformasjoner

$$Q_i = Q_i(q, t)$$

for eksempel fra kartesiske koordinater, $q = \{x, y\}$, til plane polarkoordinater, $q = \{r, \vartheta\}$. En slik transformasjon kalles en **punkttransformasjon**. Mer generelt, og fortsatt i overensstemmelse med Hamiltonformuleringen, kan vi transformere både q_i og p_i ; en transformasjon a faserommet:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, t) \\ P_i &= P_i(q, p, t). \end{aligned}$$

Q_i og P_i er kanoniske koordinater som oppfyller “Hamiltons ligninger”:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \end{aligned}} \quad (9.1)$$

Størrelsen $K(Q, P, t)$ er som vi ser Hamiltonfunksjonen i de nye koordinatene, og (9.1) er en **kanonisk transformasjon**.

Vi husker fra kapittel 2 at Lagranges ligninger kan utledes fra Hamiltons prinsipp:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0.$$

Tilsvarende kan Hamiltons ligninger utledes av det **modifiserte Hamiltons prinsipp**:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}_i - H(p, q, t)] dt = 0. \quad (9.2)$$

Dette kan vi se ved å starte med variasjonsprinsippet

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} f(q, \dot{q}, p, t) dt \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}_i - H(p, q, t)] dt = 0.$$

Her oppfattes p_i og q_i som uavhengige koordinater. Merk at $f(q, \dot{q}, p, t) = p_i \dot{q}_i - H(p, q, t)$ ikke inneholder \dot{p}_i . Variasjonsprinsippet $\delta I = 0$, fører dermed som vi har sett til Eulerligningene for f , forutsatt at vi kan sette randverdiuttrykkene ved $t = t_1, t_2$ lik 0. Dette er ok for koordinatene q_i :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0,$$

fordi $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Vi trenger også å ha

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i} \delta p_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0,$$

men det er også i orden, ettersom f ikke inneholder \dot{p} , som medfører at $\frac{\partial f}{\partial \dot{p}} = 0$ jfr. ovenfor. Dermed får vi Eulerligningene for f :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} &= 0 \Rightarrow \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \\ \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i}}_{=0} - \frac{\partial f}{\partial p_i} &= 0 \Rightarrow \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \end{aligned}$$

som er Hamiltons ligninger. Ettersom Hamiltons ligninger også er oppfylt for P og Q , må det modifiserte Hamiltons prinsipp også gjelde her:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [P_i \dot{Q}_i - K(P, Q, t)] dt = 0.$$

Vi sammenligner med (9.2), og ser at

$$\boxed{\begin{aligned} p_i \dot{q}_i - H &= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}, \\ \text{der } \delta F(t_1) &= \delta F(t_2) = 0. \end{aligned}} \quad (9.3)$$

F er altså en *vilkårlig* funksjon med null variasjon i endepunktene.

Kanoniske transformasjoner er nyttige dersom F inneholder halvparten av sine variable fra det gamle og halvparten fra det nye koordinatsettet. F kalles da en **genererende funksjon** og fungerer som en “bro” mellom (q, p) og (Q, P) . I valg av F har vi fire mulige alternativer som vi ser på etter tur.

9.1.1 Alternativ 1: $F = F_1(q, Q, t)$

Dette valget gir:

$$\begin{aligned} p_i \dot{q}_i - H &= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt} \\ &= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \end{aligned}$$

Da q_i og Q_i er uavhengige, er denne ligningen bare identisk oppfylt dersom

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ \underline{K} &= \underline{H + \frac{\partial F_1}{\partial t}}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

9.1.2 Alternativ 2: $F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i$

Med dette valget får vi

$$\begin{aligned} p_i \dot{q}_i - H &= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_2}{dt} - \dot{Q}_i P_i - Q_i \dot{P}_i \\ &= -K + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i - Q_i \dot{P}_i. \end{aligned}$$

Med q_i og P_i uavhengige får vi

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \\ \underline{K} &= \underline{H + \frac{\partial F_2}{\partial t}}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

$F_1(q, Q, t)$ og $F_2(q, P, t)$ er relatert via Legendretransformasjonen (med $P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$)

$$F_1 = -P_i Q_i + \underbrace{F_2(q, P, t)}_{\text{“integrasjonskonst.”}}$$

Altså: P går ut og Q kommer inn (eller omvendt!).

9.1.3 Alternativ 3: $F = q_i p_1 + F_3(p, Q, t)$

Vi fortsetter med tredje mulige valg $F = q_i p_1 + F_3(p, Q, t)$. Av

$$p_1 \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_3}{dt},$$

fås

$$\begin{aligned} p_i \dot{q}_i - H &= P_i \dot{Q}_i - K + p_i \dot{q}_i + \dot{p}_i q_i + \frac{d}{dt} F_3(p, Q, t) \\ -\dot{p}_i q_i - H &= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_3}{\partial t} + \frac{\partial F_3}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \dot{Q}_i. \end{aligned}$$

Da p_i og Q_i er uavhengige fås på samme måte som over:

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \\ P_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

9.1.4 Alternativ 4: $F = q_i p_1 - Q_i P_i + F_4(p, P, t)$

Samme prosedyre som i de foregående tilfellene gir

$$\begin{aligned} p_i \dot{q}_i - H &= P_i \dot{Q}_i - K + p_i \dot{q}_i + \dot{p}_i q_i - P_i \dot{Q}_i - \dot{P}_i Q_i + \frac{d}{dt} F_4(p, P, t) \\ -\dot{p}_i q_i - H &= -Q_i \dot{P}_i - K + \frac{\partial F_4}{\partial t} + \frac{\partial F_4}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \dot{P}_i, \end{aligned}$$

og som før, ettersom p_i og P_i er uavhengige får vi

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \\ Q_i &= \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Eksempel: Generell transformasjon (*Goldstein 2. utg. s. 386.*)

Betrakt transformasjonen av type 2 ovenfor gitt ved $F_2 = q_i P_i$. Det gir:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i; \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i; \quad K = H.$$

Funksjonen F_2 genererer altså identitetstransformasjonen! Litt mer generelt, la $F_2 = f_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \cdot P_i$. Dermed får vi

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q, t).$$

De nye koordinatene avhenger bare av de gamle koordinatene og tiden, ikke av impulser. Transformasjonen er av typen $Q_i = Q_i(q, t)$, dvs. en punkttransformasjon. Altså: en punkttransformasjon er et spesialtilfelle av en kanonisk transformasjon!

Eksempel: Harmonisk Oscillator (Goldstein 2. utg. s. 389-390.)

Vi starter med $H = p^2/2m + kq^2/2$ i "vanlige" koordinater (én dimensjon). Med $\omega^2 = k/m$ kan vi skrive

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2q^2).$$

Hvis vi kan finne en transformasjon

$$p = f(P) \cos Q; \quad q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q,$$

blir $K = H$ syklisk i den nye koordinaten Q :

$$K = H = \frac{f^2(P)}{2m}(\cos^2 Q + \sin^2 Q) = \frac{f^2(P)}{2m}.$$

Vi må bestemme $f(P)$ slik at transformasjonen blir kanonisk. Med transformasjonen ovenfor:

$$p = m\omega p \cdot \cot Q, \quad \text{uavhengig av } f(P).$$

Dette tilsvarer F av typen $F_1(q, Q)$:

$$p = -\frac{\partial}{\partial q} F_1(q, Q) \implies F_1 = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q \quad (\text{enkleste løsning}).$$

Den andre halvparten av transformasjonen:

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q} \implies q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q.$$

Sammenligning med de originale transformasjonsligningene gir:

$$f(P) = \sqrt{2m\omega P}, \implies H = \frac{f^2(P)}{2m} = \omega P$$

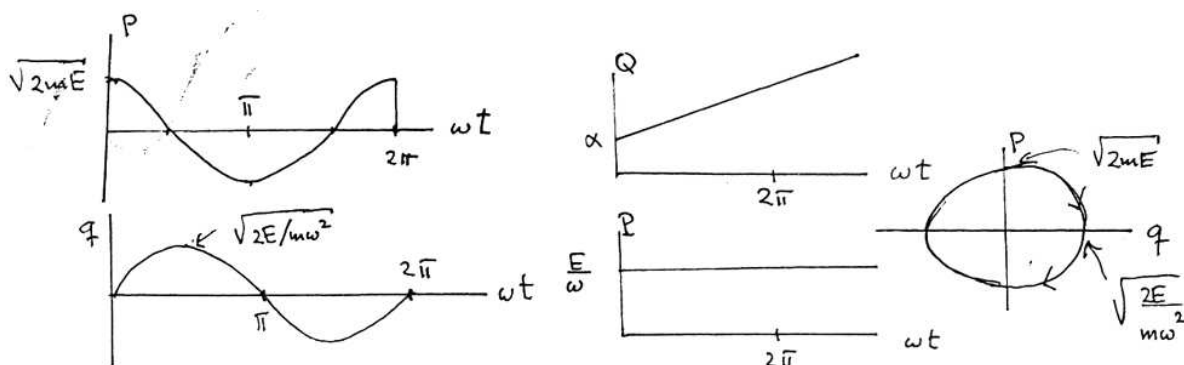
uttrykt med de transformerte variable. Da Q er en syklisk koordinat, blir konjugert impuls P en konstant. Da har vi sett at $H = E = \text{total energi} = \text{konstant}$, og vi får $P = E/\omega$. Bevegelsesligningen for Q :

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega \implies Q(t) = \omega t + \alpha \quad (\alpha \text{ fastlegges ved init. bet.})$$

Løsningen for q blir:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin \omega t + \alpha,$$

som er vanlig løsning for harmonisk oscillator!



9.2 Poissonklammer

Poissonklammen av to funksjoner u og v med hensyn på kanoniske variable q og p defineres slik:

$$[u, v]_{q,p} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right). \quad (9.8)$$

En ser at

$$[u, v]_{q,p} = -[v, u]_{q,p}. \quad (9.9)$$

Videre er det temmelig åpenbart at de følgende relasjonene må holde:

$$[u, C]_{q,p} = 0 \quad \text{når } C \text{ er konst.} \quad (9.10)$$

$$[q_i, q_j]_{q,p} = [p_i, p_j]_{q,p} = 0 \quad (9.11)$$

$$[q_i, p_j]_{q,p} = \delta_{ij}. \quad (9.12)$$

La $F = F(q_i, p_i, t)$ være en vilkårlig funksjon uttrykt ved kanoniske variable q_i, p_i . Da er

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right),$$

der vi har benyttet Hamiltons ligninger, ligning 3.1, side 31. Altså:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H]_{q,p}. \quad (9.13)$$

Hvis F er en bevegelseskonstant, dvs. $dF/dt = 0$, er altså

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [F, H]_{q,p} = 0.$$

Med andre ord, dersom F ikke avhenger eksplisitt av t , er betingelsen for at F er en bevegelseskonstant at

$$[F, H]_{q,p} = 0.$$

Flere formelle egenskaper til Poissonklammene:

$$[u_1 + u_2, v]_{q,p} = [u_1, v]_{q,p} + [u_2, v]_{q,p} \quad (9.14)$$

$$[u_1 u_2, v]_{q,p} = u_1 [u_2, v]_{q,p} + u_2 [u_1, v]_{p,q} \quad (9.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [u, v]_{p,q} = \left[\frac{\partial u}{\partial t}, v \right]_{p,q} + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t} \right]_{p,q} \quad (9.16)$$

9.2.1 Sammenheng med kvantemekanikken

I kvantemekanikken er en kommutator mellom to operatører u og v (vi husker at en funksjon også kan sees på som en operator) definert som

$$[u, v] = uv - vu.$$

Den kvantemekaniske sammenhengen

$$[q_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

bør være velkjent. Sammen med relasjonen vi fant, $[q_i, p_j]_{q,p} = \delta_{ij}$, virker det naturlig å anta at sammenhengen mellom en kvantemekaniske kommutatorer og Poissonklammer er

$$[u, v] = i\hbar [u, v]_{q,p}. \quad (9.17)$$

En noe nærmere begrunnelse finner en ved å sammenligne Heisenbergs operatorligning i kvantemekanikken,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [A, H],$$

med ligning 9.13. Ligningene får ganske riktig samme form når

$$\frac{1}{i\hbar} [A, H] \leftrightarrow [F, H]_{q,p}$$

9.2.2 Jacobis identitet og Poissons teorem

Vi skal kun nevne (ikke utlede) disse resultatene. Vi dropper fra nå av subskriptet q,p . **Jacobis identitet** lyder:

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0 \quad (9.18)$$

Denne identiteten brukes noen ganger i kvantemekanikken (den som har tid og lyst, kan selv sette inn definisjonen av Poissonklammene i uttrykket over og se at det stemmer).

Videre, **Poissons teorem**, som lyder:

Teorem 1. Hvis F og G er to bevegelseskonstanter som ikke avhenger eksplisitt av tiden, vil også Poissonklammen $[F, G]$ være en bevegelseskonstant.

Bevis. Sett $w = H$ inn i Jacobis identitet:

$$[H, [F, G]] + [G, [H, F]] + [F, [G, H]] = 0.$$

Ettersom F og G er bevegelseskonstanter og ikke eksplisitt tidsavhengige, er $[H, G] = 0$ og $[H, F] = 0$ ved ligning 9.13. Da må følgelig

$$[H, [F, G]] = 0,$$

som (igjen ved ligning 9.13) impliserer at $[F, G]$ er en bevegelseskonstant. Da er det bevist. \square

Eksempel: Poissonklammer mellom impuls og dreieimpuls

Vi vil finne Poissonklammene dannet av de kartesiske komponentene av impulsen \vec{p} og dreieimpulsen $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ for en partikkel. Betrakt

$$[p_x, L_x] = [p_x, yp_z - zp_y] = [p_x, y]p_z - [p_x, z]p_y,$$

fordi $[p_i, p_k] = 0$. Da $[p_i, x_k] = \delta_{ik}$, blir $[p_x, y] = 0$, $[p_x, z] = 0$ og altså $[p_x, L_x] = 0$. Nøyaktig det samme gjelder naturligvis om vi i det ovenstående hadde erstattet x med y eller z . Vi ser videre på to forskjellige komponenter, for eksempel:

$$[p_x, L_y] = [p_x, zp_x - xp_z] = \underbrace{[p_x, z]}_{=0}p_x - [p_x, x]p_z = + \underbrace{[x, p_x]}_{=1}p_z = p_z.$$

Syklisk ombytte av x, y, z over gir oss

$$[p_y, L_z] = p_x, \quad [p_z, L_x] = p_y.$$

Samlet:

$$[p_i, L_j] = \epsilon_{ijk}p_k.$$

Alternativt og mer kompakt kan vi gjøre utregningene ovenfor generelt:

$$[p_i, L_j] = [p_i, \epsilon_{jlm}x_l p_m] = \underbrace{[p_i, x_l]}_{=-\delta_{il}} \epsilon_{jlm}p_m = -\epsilon_{jim}p_m = \epsilon_{ijk}p_k.$$

Tilsvarende kan vi finne:

$$[x_i, L_j] = [x_i, \epsilon_{jlm}x_l p_m] = \underbrace{[x_i, p_m]}_{=-\delta_{im}} \epsilon_{jlm}x_l = \epsilon_{jli}x_l = \epsilon_{ijk}x_k.$$

Eksempel: Poissonklammer mellom dreieimpulskomponenter

Vi vil finne Poissonklammene mellom dreieimpulskomponenter. Benytter summekonvensjonen og regner direkte ut:

$$[L_x, L_y] = \frac{\partial L_x}{\partial x_i} \frac{\partial L_y}{\partial p_i} - \frac{\partial L_x}{\partial p_i} \frac{\partial L_y}{\partial x_i}, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Her er

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_x}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} (yp_z - zp_y) = \delta_{yi}p_z - \delta_{zi}p_y \\ \frac{\partial L_y}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i} (zp_x - xp_z) = z\delta_{xi} - x\delta_{zi} \\ \frac{\partial L_x}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i} (yp_z - zp_y) = y\delta_{zi} - z\delta_{yi} \\ \frac{\partial L_y}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} (zp_x - xp_z) = \delta_{zi}p_x - \delta_{xi}p_z, \end{aligned}$$

som gir

$$[L_x, L_y] = (\delta_{yi}p_z - \delta_{zi}p_y)(z\delta_{xi} - x\delta_{zi}) - (y\delta_{zi} - z\delta_{yi})(\delta_{zi}p_x - \delta_{xi}p_z) = xp_y - yp_x = L_z.$$

Generaliseringen blir (vises naturligvis på akkurat samme måte, men vi gjør ikke hele utregningen her):

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk}L_k.$$

Ligningen

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk}L_k, \quad (9.19)$$

er nok et eksempel på sammenhengen med kvantemekanikken, der en svært lignende relasjon (på en faktor $i\hbar$ nær) definerer algebraen for dreieimpulsoperatorene.

Vi sier at generatorer G_i for en Lie-gruppe generelt oppfyller

$$[G_i, G_j] = C_{ijk}G_k, \quad (9.20)$$

der C_{ijk} kalles strukturkoeffisientene. I vårt tilfelle er rotasjonsgruppen en såkalt $SO(3)$ i 3 dimensjoner, og $C_{ijk} = \epsilon_{ijk}$.

9.2.3 Kanonisk transformasjon av Poissonklammer

Poissonklammer er invariante under en kanonisk transformasjon:

$$[u, v]_{q,p} = [u, v]_{Q,P}. \quad (9.21)$$

Dette kan lett vises for den harmoniske oscillatoren, hvor

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = m\omega q \cot Q, \quad P = E/\omega.$$

9.2.4 Liouvilles teorem

(Jf. Landau-Lifshitz: *Mechanics* (1976), § 46) **Faserommet** utspennes av p_i og q_i . Et punkt i faserommet tilsvarer en betemt tilstand for systemet. Når systemet utvikler seg, beskriver punktet en faselinje (phase path).

Teorem 2 (Liouvilles teorem). La $d\Gamma = dq_1 \cdots dq_n \cdot dp_1 \cdots dp_n$ være et volumelement i faserommet. Under en kanonisk transformasjon vil et vilkårlig volum av faserommet være invariant:

$$\int dq_1 \cdots dq_n \cdot dp_1 \cdots dp_n = \int dQ_1 \cdots dQ_n \cdot dP_1 \cdots dP_n. \quad (9.22)$$

Bevis. Ved transformasjon av variable i et multippelt integral vil generelt

$$\int dQ_1 \cdots dQ_n \cdot dP_1 \cdots dP_n = \int D \cdot dq_1 \cdots dq_n \cdot dp_1 \cdots dp_n,$$

hvor

$$D \equiv \frac{\partial(Q_1 \cdots Q_n, P_1 \cdots P_n)}{\partial(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n)}$$

er **Jacobideterminanten**. Vi må vise at for enhver kanonisk transformasjon er $D = 1$. Matematisk kan Jacobideterminanten behandles som en brøk:

$$D = \frac{\frac{\partial(Q_1 \cdots Q_n, P_1 \cdots P_n)}{\partial(q_1 \cdots q_n, P_1 \cdots P_n)}}{\frac{\partial(q_1 \cdots q_n, P_1 \cdots P_n)}{\partial(q_1 \cdots q_n, P_1 \cdots P_n)}} = \frac{\frac{\partial(Q_1 \cdots Q_n)}{\partial(q_1 \cdots q_n)} \Big|_{P=\text{konst.}}}{\frac{\partial(p_1 \cdots p_n)}{\partial(P_1 \cdots P_n)} \Big|_{q=\text{konst.}}}.$$

Vi antar nå tilfelle 2 under kanoniske transformasjoner, dvs. $F_2 = F_2(q_i, P_i)$. Da så vi at $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$, $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$. ik -elementet i telleren:

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \right)_P = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial F_2}{\partial P_i},$$

og ik -elementet i nevneren:

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial P_k} \right)_q = \frac{\partial}{\partial P_k} \frac{\partial F_2}{\partial q_i}.$$

Da en determinant er uavhengig av ombyttet linjer \leftrightarrow spalter ($i \leftrightarrow k$), vil $D = 1$ under en kanonisk transformasjon. OK! \square

Vi har sett at tidsutviklingen til systemet kan beskrives som en kanonisk transformasjon. Ettersom faseromvolumet er bevart ved en kanonisk transformasjon, følger det derav at faseromvolumet er konstant.

9.3 Hamilton-Jacobi-teori

Kanoniske transformasjoner kan brukes til løsning av mekaniske problemer. Det vi forsøker å oppnå ved å bruke kanoniske transformasjoner som verktøy er å finne nye koordinater som er sykliske. Med sykliske koordinater, blir integrasjon av tilhørende bevegelsesligninger (som vi har sett mange ganger) trivielle.

En oppnår automatisk nye variable som er konstante ved å krevne at den transformerte Hamiltonfunksjonen K skal være likk null. De kanoniske ligningene blir da:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0. \end{aligned}$$

K er relatert til den genererende funksjonen F ved

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t},$$

som med $K = 0$ gir

$$H(p, q, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Det er hensiktsmessig her å velge løsningen $F = F_2 = F_2(q, P, t)$. Vi benytter ligning (9.5), $p_i = \partial F_2 / \partial q_i$, og endrer notasjon ved å omdøpe $F_2 \rightarrow S$. Resultatet blir

$$H(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (9.23)$$

som kalles **Hamilton-Jacobi-ligningen**.

Hamilton-Jacobi-ligningen er en førsteordens partiell differensialligning i $n + 1$ variable, nemlig q_1, \dots, q_n og t , for den genererende funksjonen S . S kalles for **Hamiltons prinsipale funksjon**.

Vi vet at de nye impulsene er konstante (vi har transformert problemet til et faserom, dvs. et kanonisk koordinatsett, der de er nettopp det),

$$P_i = \text{konst.}$$

Vi antar løsning på formen

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, t),$$

hvor $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ matematisk sett er $n + 1$ uavhengige integrasjonskonstanter. Ettersom S selv ikke opptrer i (9.23), vil $S + \alpha$, hvor α er en vilkårlig konstant, også være en løsning. Dette må tilsvare én av de $n + 1$ løsningene, og har ingen fysisk betydning ettersom S kun inngår i (9.23) iform av sine forskjellige deriverte. For vårt formål er det derfor nok å sette

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t).$$

Vi kan nå *velge* de n integrasjonskonstantene lik de nye konstante impulsene, $P_i \equiv \alpha_i$ (om dette ikke er åpenbart, så husk at har vi først funnet ett koordinatsett som gjør at impulsene er konstante, så vil dette systemet også ha konstante impulser, men med andre tallverdier, etter en vilkårlig Poincarétransformasjon (se s. 87), inkludert rotasjon og translasjon av hele faserommet, som gir den nødvendige friheten til å velge impulser som ovenfor)

Vi har altså

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} S(q, \alpha, t). \quad (9.24)$$

Den andre halvparten av transformasjonsligningene mellom gamle og nye koordinater, (9.5), er

$$Q_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} S(q, \alpha, t) \equiv \beta_i. \quad (9.25)$$

Vi tenker oss nå avslutningsvis at vi løser denne ligningen med hensyn på de opprinnelige koordinatene og finner

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t). \quad (9.26)$$

I matematisk forstand gir ligningene en ekvivalens mellom

- de ligningene som vi startet med, nemlig $2n$ kanoniske bevegelsesligninger (1. ordens differensialligninger), og
- de 1. ordens partielle Hamilton-Jacobi-differensialligningene.

Generell løsningsprosedyre

Vi oppsummerer med den generelle løsningsprosedyren vi har sett generelt på ovenfor:

1. Fra kjent Hamiltonfunksjon H , konstruerer vi Hamilton-Jacobi-ligningen,

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

og finner løsningen $S = S(q, \alpha, t)$ for Hamiltons prinsipale funksjon S .

2. Deretter finner vi

$$Q_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} S(q, \alpha, t) \equiv \beta_i,$$

og derav

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t).$$

3. Til sist finner vi de opprinnelige impulsene,

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} S(q, \alpha, t).$$

En forenkling kan gjøres dersom H ikke eksplisitt inneholder t (konservativt system). Da kan vi skrive:

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t.$$

Ligningen

$$\begin{aligned} H + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \\ H + \underbrace{\frac{\partial W}{\partial t}}_{=0} - \alpha &= 0, \end{aligned}$$

som betyr at

$$H = E = \alpha = \text{total energi.}$$

Altså, for konservativt system:

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - Et. \quad (9.27)$$

Konklusjon: For et konservativt system gir Hamilton-Jacobi-ligningen (9.23) at

$$H(q, \alpha) = E, \quad (9.28)$$

med

$$\alpha_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}. \quad (9.29)$$

W kalles **Hamiltons karakteristiske funksjon**.

Eksempel: Harmonisk oscillator

Hamiltonfunksjon for den harmoniske oscillator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2.$$

Med $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ gir betingelsen $H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ at

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Ettersom H ikke er tidsavhengig, skriver vi: $S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t$.

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{kq^2}{2} = \alpha$$

$$W = \sqrt{mk} \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}$$

$$S = \sqrt{mk} \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2} - \alpha t,$$

Hamiltons prinsipale funksjon. Av fysisk betydning er kun de partielle deriverte av S . Vi definerer som i teksten over

$$Q \equiv \beta' = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}} - t$$

$$t + \beta' = +\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(k \sqrt{\frac{k}{2\alpha}} \right)$$

$$q = \frac{2\alpha}{k} \sin(\omega t + \beta),$$

hvor $\beta = \beta' \omega$, $\omega \equiv \sqrt{\frac{m}{k}}$ og $\alpha = E$.

Impulsen:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{mk} \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2} = \sqrt{mk} \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - \frac{2\alpha}{k} \sin^2(\omega t + \beta)}$$

$$p = \sqrt{2m\alpha} \cos(\omega t + \beta).$$

Vi ser at dette stemmer med at $p = m\dot{q}$.

Register

- ϵ_{ijk} , *Se* Levi-Civita-symbolet
4-vektorer, 85
- addisjon av hastigheter, *Se* Einsteins addisjonsformler
antisymmetrisk tensor, 101
arbeid, 3
 mot friksjon, 12
Atwoods maskin, 14
- bevaringslov, 92
Boyles lov, 41
brachistochroneproblemet, 20–21
bundet bevegelse, 38
- CM, *Se* massesenter
Coulombpotensial, 47
- D'Alemberts operator, 95
D'Alemberts prinsipp, 8
degenerasjon av svingemoder, 80
dissipasjonsfunksjon, *Se* Rayleighs d.
dobbeltpendel, 7
dreieimpuls, 5
 bevaringslov for total d., 5
 definisjon, 3
- egenfrekvenser
 til et system av oscillatorer, 76
Einsteins addisjonsformler, 86
ekvivalensprinsippet, 89
ekvivalent masse, 99
elektromagnetisk felttensor, 101
elektromagnetisk potensial, 11–12
energi, 6–7
 bevaring av total mekanisk e., 4, 28
Euler-Lagranges ligninger, *Se* Eulers ligninger
Eulerligningene, 66
Eulers ligninger, 18
Eulers teorem, 27
Eulervinklene, 56–58
- føringer, 6
 holonome/ikke-holonome, 6
 rheonome/skleronome, 7
faserom, 109
faserommet, 29
firerimpuls, 96
 bevaring av, 98
firerpotensial, elektromagnetisk, 95
firerstrømtetthet, 92
firervektorer
 elektromagnetisk potensial, 95
 firerhastighet, 92
 firerimpuls, 96
 firerstrømtetthet, 92
 romrettet, tidrettet, lyslik, 91
foton, 98
fri rotasjon, 66
frihetsgrad, 7
- Galileitransformasjon, 83
gaugeinvarians, 94
generalisert kraft, 8
generaliserte potensialer, 11–12
genererende funksjon, 104, 111
gyroskopeffekten, 68
- Hamilton-Jacobi-ligningen, 110
Hamilton-Jacobi-teori, 110–113
Hamiltons karakteristiske funksjon, 112
Hamiltons ligninger, 30
Hamiltons prinsipale funksjon, 111
Hamiltons prinsipp, 16
 det modifiserte H., 103
 for ikke-holonome systemer, 21–23
harmonisk oscillator, 39
hermitesitet, 65
hovedakser, 65
hovedtreghetsmoment, 65
hvilesystem, til partikkel, 89
- Ideell gasslov, 41
impuls
 bevaringslov for total i., 5, 25
 definisjon, 3
 dreie-, *Se* dreieimpuls
 kanonisk i., 24
 konjugert i., *Se* kanonisk impuls
inertialsystem, 3, 83
intensitet, 46
- Jacobideterminant, 110
Jacobis identitet, 108
justérinvarians, *Se* gaugeinvarians
- kanoniske transformasjoner, 103–110
kanoniske variable, 29
karakteristisk ligning, 76
kausalitetsprinsippet, 92
Keplerproblemet, 42–45
Keplers 2. lov, 35
Keplers 3. lov, 44–45
kinematikk, 51
kinetisk energi

- for roterende, stivt legeme, 65
- kjeglesnitt, *Se* sentralbevegelse
- kommutator
 - kvantemekanisk, 107
- konfigurasjonsrommet, 29
- konservativt system, 9
 - definisjon, 4
 - Hamiltons prinsipp, 16
- kontinuitetsligningen, 92
- kovarians, 93
 - relativistisk kontinuasjonsligning, 93
- kraftmoment, 3
- Lagranges funksjon, 9
 - for partikkel i el.mag.felt, 12
- Lagranges ligninger, 10
 - anvendelser, 12–15
 - for dissipativt system, 12
 - fra Hamiltons prinsipp, 16–17
 - med ikke-holonome føringer, 22
- Lagranges metode med ubestemte koeffisienter, 22
- Legendretransformasjoner, 29
- Levi-Civita-symbolet, 10
- Levi-Civita-tensoren, 10
- Lie-gruppe, 109
- likevekt, 7
 - stabil, ustabil, 74
- lineær impuls, *Se* impuls
- lineær transformasjon, 52
- lokal bevaringslov, 92
- Lorentz-gauge, 94
- Lorentzbetingelsen, 94
- Lorentzkraft, 11
- Lorentztransformasjon, 83
 - begrenset, 87
 - homogen, 86
 - inhomogen, 86
 - Minkowskis matriserepresentasjon, 85
 - ortokron/ikke-ortokron, 87
 - proper og improper, 86
- lyshastigheten
 - invarians ved Lorentztransformasjon, 84
- massesenter
 - definisjon, 4
 - to legemer, 33
- Maxwells ligninger, 11
- metrikk, 87
- metrisk tensor, 87
- Minkowskikraft, 95
- Minkowskirom, 85
- minor
 - til en systemdeterminant, 77
- monogeniske systemer, 16
- Newtons 2. lov
 - én partikkel, 3
 - flere partikler, 4
 - fra Lagranges ligninger, 13
- Newtons 3. lov, 4
- norm
 - til 4-vektor, 85
- normalkoordinater, 77
- omløpstid, 44
- oscillator
 - éndimensjonal harmonisk o., 73
 - system av koblede o., 74–80
- perihel, 43
- Poincarétransformasjon, 86
- Poissonklammer, 107
- Poissons teorem, 108
- presesjon, 66
- Q-verdi, 100
- Rayleighs dissipasjonsfunksjon, 12
- Reduksjon til ekvivalent ettlegemeproblem, 33
- reduksjon til ekvivalent ettlegemeproblem, 34
- reduisert masse, 34
- relativ posisjon for to legemer, 33
- relativitetsteori
 - spesiell, 83–102
- Riemannrom, 87
- Rutherfords spredningstverrsnitt, 49
- sentralbevegelse, 33–50
 - baneparameter, 43
 - brennpunkt, 43
 - eksentrisitet, 43
 - halvakse, 43
 - kjeglesnitt, 43
- sentralt krefter, 33–50
- små oscillasjoner, 73–82
- snurrebass, symmetrisk, 68–72
- spor, til kvadratisk matrise, 87
- spredning i sentralt kraftfelt, 46–47
 - s. i Coulombpotensiale, 47
- spredningstverrsnitt
 - totalt, 49
- spredningstverrsnitt, differensielt, 46
- støtparameter, 46
- sterk lov om aksjon og reaksjon, 5
- stive legemer
 - definisjon, 51
- strukturkoeffisienter, 109
- summekonvensjon, 10, 78
- svak lov om aksjon og reaksjon, 4
- svingemoder, 76

- syklisk koordinat, 25
- terskelenergi, 100
- tidsdilatasjon, 89
- tidsendring av en vektor, 60
- tolegemeprobler, 33–50
- transformasjoner
 - aktiv/passiv betraktningssmåte, 55
 - infinitesimale, 58–59
 - kommutative egenskaper, 58, 59
 - ortogonale, 52–53
- transformasjonsmatriser, 55–56
 - assosiative egenskaper, 55
 - determinant, 56
 - kommutative egenskaper, 55
 - transponert t., 56
- treghetstensor, 64
- uavhengige koordinater, 51–52
- ubundet bevegelse, 37
- variasjonsregning, 17–18
- vendepunkt, 37
- vibrasjoner i toatomig molekyl, 80
- virialteoremet, 39–40
- virkningsintegral/virkning, 16
- virtuell forskyvning, 7
- virtuelt arbeid, prinsippet om, 8