TEP 4145

Klassisk mekanikk
Løsning av øving 1

a) $T+V=E=0$ for en partikkel som såvidt unnslipper jordas gravitasjon. Her er valgt nullnivået $V=0$ for $r\to\infty$. Newtons gravitasjonslov: $V(r)=-\gamma\dfrac{Mm}{r}$, hvor M er jordmassen, m er partikkelmassen. Unnslippingshastigheten v_0 er gitt ved $\tfrac{1}{2}m v_0-\gamma\dfrac{Mm}{r}=0$, dvs. $v_0^2=2\gamma\dfrac{M}{R}$.

Da $g=\gamma\dfrac{M}{R^2}=9{,}81\,m/s^2$ fås $v_0=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 6{,}37\cdot 10^6}$ m/s = 11,2 km/s.

b) Konstant masse, $\vec{F}=m\dot{\vec{v}}$, $\Rightarrow F\cdot\vec{v}=m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v}=\dfrac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)=\dfrac{dT}{dt}$.

Variabel masse, $\vec{F}=\dot{\vec{p}}$, $\Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{p}=\dot{\vec{p}}\cdot\vec{p}=\dfrac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}p^2\right)=\dfrac{d(mT)}{dt}$, fordi $T=\dfrac{p^2}{2m}$.

c) $V(x_1,x_2)=\tfrac{1}{2}k(x_1-x_2-l)^2=\tfrac{1}{2}k(x-l)^2$.

Bevegelsesligninger:

$$m_1\ddot{x}_1=-\frac{\partial V}{\partial x_1}=-k(x_1-x_2-l) \qquad\qquad \ddot{x}_1=-\frac{k}{m_1}(x-l)$$

$$\Rightarrow$$

$$m_2\ddot{x}_2=-\frac{\partial V}{\partial x_2}=k(x_1-x_2-l) \qquad\qquad \ddot{x}_2=\frac{k}{m_2}(x-l)$$

Kombinasjon av ligningene gir:

$$\ddot{R}=0,\qquad \ddot{x}=-\frac{k}{\mu}(x-l),\qquad \frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}.$$

Løsning for $x-l$, som gir $x=l$ for $t=t_0$, er $x-l=A\sin\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}(t-t_0)$, A en konstant.

Dette gir $\tfrac{1}{2}\mu\dot{x}^2=\dfrac{A^2}{2}k\cos^2\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}(t-t_0)$, $V=\tfrac{1}{2}k(x-l)^2=\tfrac{1}{2}kA^2\sin^2\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}(t-t_0)$.

$$\Rightarrow\quad E\equiv\tfrac{1}{2}\mu\dot{x}^2+V=\tfrac{1}{2}kA^2,\quad A=\sqrt{2\frac{E}{k}}.$$

Altså $x-l=\sqrt{2\dfrac{E}{k}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}(t-t_0)$.

Når $k\to\infty$ for fast E vil vinkelfrekvensen $\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}\to\infty$, $x=x_1-x_2\to l$. Partiklene blir stivt forbundet i avstanden l. Frihetsgraden tilsvarende partikkelens relative bevegelse "fryses."