(Litt annen notasjon i øvingsteksten, men det går sikkert bra!)

KLASSISK MEKANIKK
Løsning Øving 10

Oppg. 1

Med bevegelseslign. $\sum_{j=1}^{3}(V_{ij}-\omega^2 T_{ij})A_j=0$, hvor $y_i=A_i e^{-i\omega t}$, $A_i=C_\alpha \Delta_{i\alpha}$,

fås $\sum_{j=1}^{3}(V_{ij}-\omega_\alpha^2 T_{ij})C_\alpha \Delta_{j\alpha}=0$ for svingemoden α. Altså

① $$\sum_{j=1}^{3}(V_{ij}-\omega_\alpha^2 T_{ij})\Delta_{j\alpha}=0, \quad \alpha=(1,s,a)$$

Fra forelesningene er

$$\mathbb{V}-\omega_\alpha^2\mathbb{T}=\begin{pmatrix} k-\omega_\alpha^2 m, & -k, & 0 \\ -k, & 2k-\omega_\alpha^2 M, & -k \\ 0, & -k, & k-\omega_\alpha^2 m\end{pmatrix}, \quad \mathbb{T}=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m\end{pmatrix}.$$

Da gir ① følgende ligningssett:

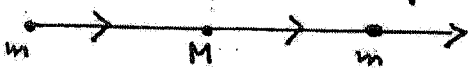
② $$\begin{cases}(k-\omega_\alpha^2 m)\Delta_{1\alpha}-k\Delta_{2\alpha}=0\\ -k\Delta_{1\alpha}+(2k-\omega_\alpha^2 M)\Delta_{2\alpha}-k\Delta_{3\alpha}=0\\ -k\Delta_{2\alpha}+(k-\omega_\alpha^2 m)\Delta_{3\alpha}=0\end{cases}$$

Normeringen er
$$\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}\Delta_{i\alpha}\Delta_{j\beta}=\delta_{\alpha\beta}$$

Innsetting for T_{ij} i normeringsbetingelsen gir

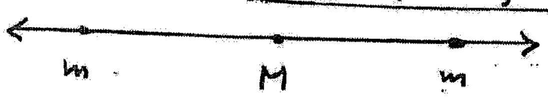
③ $$m\Delta_{1\alpha}^2+M\Delta_{2\alpha}^2+m\Delta_{3\alpha}^2=1, \quad \text{for } \beta=\alpha$$

1) Velg $\alpha=1$. (Fra forelesn. er) $\omega_1=0$. Da gir ②: $\Delta_{11}=\Delta_{21}=\Delta_{31}$.
Normeringsbet. ③ gir da $\Delta_{11}=\Delta_{21}=\Delta_{31}=1/\sqrt{\mu}$, ($\mu=2m+M$)



(Translasjon av alle 3 atomene)

2) $\alpha=s$ (symmetrisk mode). Da er $\omega_s=\sqrt{k/m}$, og ② gir
$\Delta_{2s}=0$, $\Delta_{1s}+\Delta_{3s}=0$. Normering ③ gir $m\Delta_{1s}^2+m\Delta_{3s}^2=1$,
slik at $\Delta_{1s}=1/\sqrt{2m}$, $\Delta_{2s}=0$, $\Delta_{3s}=-1/\sqrt{2m}$.

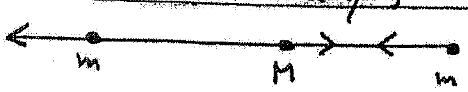


(C-atom i ro, O-atomene har motsatt fase)

3) $\alpha=a$ (antisymmetrisk mode). Da er $\omega_a=\sqrt{k\mu/(Mm)}$, $\Rightarrow$
$(k-\omega_a^2 m)=-2km/M$, $(2k-\omega_a^2 M)=-kM/m$, slik at ② gir
$\frac{2m}{M}\Delta_{1a}+\Delta_{2a}=0$, $\Delta_{1a}+\frac{M}{m}\Delta_{2a}+\Delta_{3a}=0$, $\Delta_{2a}+\frac{2m}{M}\Delta_{3a}=0$

$\Rightarrow$ $\Delta_{3a}=\Delta_{1a}$, $\Delta_{2a}=-\frac{2m}{M}\Delta_{1a}$. Normeringen ③ gir
$m\Delta_{1a}^2+M\Delta_{2a}^2+m\Delta_{3a}^2=1$. Dette gir

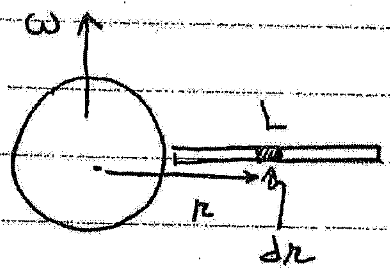
$$\Delta_{1a}=\sqrt{\frac{M}{2m\mu}}, \quad \Delta_{2a}=-2\sqrt{\frac{m}{2M\mu}}, \quad \Delta_{3a}=\sqrt{\frac{M}{2m\mu}}.$$



(O-atomene har samme amplitude, C-atomet har motsatt fase og annen amplitude.)

KLASSISK MEKANIKK

Løsning Øving 10, Oppgave 2



I det roterende koordinatsystem er sentrifugalkraften på et element av lengde dr i avstand r fra sentrum lik $r\omega^2 \cdot \rho\, dr$, hvor ρ er stavens masse per lengdeenhet. Gravitasjonstiltrekningen på elementet er

$$\frac{GM \cdot \rho\, dr}{r^2} = \frac{GM}{R^2} \cdot \frac{R^2}{r^2} \rho\, dr = g_0 \cdot \frac{R^2}{r^2} \rho\, dr,$$

hvor $GM/R^2 = g_0$ er tyngdens akselerasjon ved jordoverflaten.

Kraftbalanse ved likevekt gir ved integrasjon

$$\int_R^{R+L} r\omega^2 \rho\, dr = g_0 R^2 \rho \int_R^{R+L} \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho\omega^2\left[(R+L)^2 - R^2\right] = g_0 R^2 \rho \left(\frac{-1}{R+L} + \frac{1}{R}\right)$$

$$\frac{1}{2}\omega^2 (2R+L)(R+L) = g_0 R$$

$$L^2 + 3RL + \left(2R^2 - \frac{2 g_0 R}{\omega^2}\right) = 0$$

Løst som 2. grads ligning gir dette

$$L = -\frac{3R}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + \frac{8 g_0 R}{\omega^2}}.$$

$R = 6400$ km, $\omega = \frac{2\pi}{1\,\text{døgn}} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\, s^{-1}$, $g_0 = 9{,}8\, m\, s^{-2}$

$\Rightarrow$ $\underline{L = 1{,}5 \cdot 10^5 \text{ km}}$. Omtrent halvveis til månen.