Øving 12

Oppg 1 og 2

1. Energibalanse $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V = E$ sammen med bevarelse av dreieimpuls $l = mr^2\dot{\theta}$ gir

① $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(V + \frac{l^2}{2mr^2}\right) = E$.

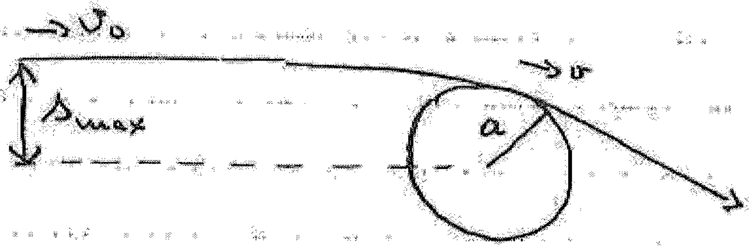
Altså endimensjonelt problem, med $V' = V + \frac{l^2}{2mr^2}$.

Betingelse for at partikkelen faller inn mot sentrum:
Av ① følger $V + l^2/(2mr^2) < E$ eller $r^2V + l^2/2m < Er^2$
Når $r \to 0$ vil høyre side $\to 0$, slik at betingelsen blir

$$r^2V\Big|_{r\to 0} < -l^2/2m$$

Det betyr at enten må
$V(r) \to -K/r^2$ med $K > l^2/2m$, eller
$V(r) \to -\frac{A}{r^n}$ med $n > 2$, hvor A er en positiv konstant.

2.



Grensetilfelle på figuren: Partikkelen tangerer overflaten.
Bevarelse av total energi:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{a} \qquad ①$$

Bevarelse av dreieimpuls: $l = mv_0 s_{max} = mva$, ②
hvor siste ledd er regnet ut i tangeringspunktet.
Av ②: $v = \frac{s_{max}}{a} v_0$, som innsatt i ① gir

$$s_{max} = \sqrt{a^2 + 2ka/(mv_0^2)}$$

Alle partikler med støtparameter $s < s_{max}$ treffer overflaten $\Rightarrow$ $\sigma_{eff} = \pi s_{max}^2 = \pi\left(a^2 + 2ka/(mv_0^2)\right)$

Oppg. 3, øving 12

1) $u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dz')} = \frac{u_x'}{\gamma(1+vu_z'/c^2)}$

$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{u_y'}{\gamma(1+vu_z'/c^2)}$

$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\gamma(dz' + v dt')}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dz')} = \frac{u_z' + v}{1+vu_z'/c^2}$

Differensierer:

$$du_x = \frac{du_x'}{\gamma(1+vu_z'/c^2)} - \frac{u_x'}{\gamma(1+vu_z'/c^2)^2} \cdot \frac{v}{c^2} du_z' \xrightarrow{(\vec{u}' = 0)} \gamma^{-1} du_x'$$

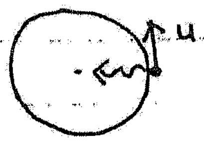
Tilsvarende for $du_y = \gamma^{-1} du_y'$.

$$du_z = \frac{du_z'}{1+vu_z'/c^2} - \frac{u_z'+v}{(1+\frac{vu_z'}{c^2})^2} \cdot \frac{v}{c^2} du_z' \to du_z' - \frac{v^2}{c^2} du_z' = (1-\beta^2) du_z'$$

Av $dt = \gamma dt'(1 + \frac{v}{c^2} u_z')$ fås $dt = \gamma dt'$.

$\Rightarrow$ $\underline{a_x} = \frac{du_x}{dt} = \underline{(1-\beta^2) a_x'}$, tilsvarende $\underline{a_y = (1-\beta^2) a_y'}$

$\underline{a_z = \frac{du_z}{dt} = (1-\beta^2)^{3/2} a_z'}$

2) 

$\nu^\circ = \frac{dN}{dt^\circ}$, hvor dN er antall bølger emittert i tiden dt° i det instantane hvilesystemet S'.

En har $dt^\circ = d\tau$ (egentiden til preparatet).

Hvis t er ~~observert~~ observatørens tid vil $dt = \gamma d\tau$.

Frekvensen ν mottatt i sentrum altså

$$\underline{\nu} = \frac{dN}{dt} = \frac{dN}{\gamma d\tau} = \frac{\nu^\circ}{\gamma} = \underline{\sqrt{1-\beta^2}\,\nu^\circ, \quad \beta = \frac{u}{c}}$$

Transversal Dopplereffekt.