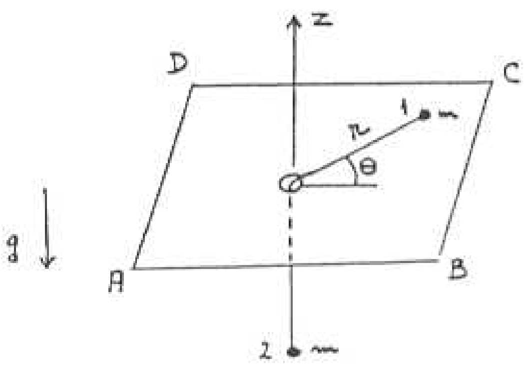
Klassisk mekanikk
Løsning av øving 4

Oppgave 1



a) Hvis z er vertikalkoordinaten for masse (2), er

$$s = r + z = konst.$$

Partikkel 1: $T_1 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$, $\quad V_1 = 0$.

Partikkel 2: $T_2 = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$, $\quad V_2 = mgz = mg(r - s)$.

Lagrangesfunksjonen for systemet er: $\underline{\underline{L}} = T_1 + T_2 - V_1 - V_2 = \underline{\underline{m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mg(r-s)}}$

b) Lagranges ligning for θ: $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \theta}}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$.

Spinnet $\left(\bar{l} = \bar{r} \times \bar{v}\right)$ (eller dreieimpulsen): $\quad l = mr^2\dot{\theta}$, det vil si konstant.

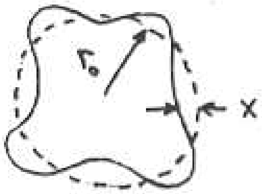
Lagranges ligning for r: $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg = 0$.

Innsetting av l gir: $\quad \underline{\underline{2m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + mg = 0}}$.

Sirkulær bevegelse: $\quad \ddot{r} = 0,\ r = r_0 \quad$ gir $\quad \frac{l^2}{mr_0^3} = mg$, eller $\quad \underline{\underline{r = \sqrt[3]{\frac{l^2}{m^2 g}}}}$

Dette kan innses direkte: sirkulær bevegelse når sentrifugalkraften $mr_0\omega^2 = mr_0\dot{\theta}^2$ balanserer tyngden (mg) av massen under bordet, dvs. $r_0\dot{\theta}^2 = g$.
Innsetting av $l = mr_0^2\dot{\theta}$ gir samme r_0 som ovenfor.

c) Slingrebevegelse:



Innsetting av $r = r_0 + x$ i radiell retning gir

Lagrangeligningen i radiell retning

$$2m\left(\underbrace{\ddot{r}_0}_{=0} + \ddot{x}\right) - \frac{l^2}{m r_0^{\,3}\left(1+\frac{x}{r_0}\right)^3} + mg = 0 .$$

Til 1. orden i x/r_0 er: $\quad \dfrac{1}{\left(1+\frac{x}{r_0}\right)^3} = \dfrac{1}{1+\frac{3x}{r_0}} = 1 - \dfrac{3x}{r_0}$.

Det gir: $\quad 2m\ddot{x} - \dfrac{l^2}{m r_0^{\,3}}\left(1 - \dfrac{3x}{r_0}\right) + mg = 0$.

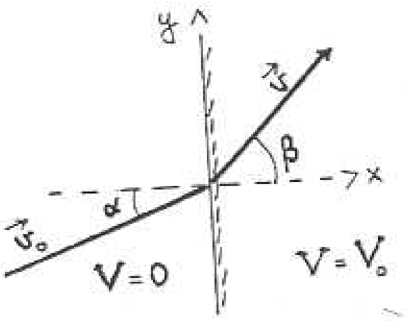
Fordi $\dfrac{l^2}{m r_0^{\,3}} = \dfrac{l^2}{m}\cdot\dfrac{m^2 g}{l^2} = mg$, faller konstantleddene bort.

Dermed blir bevegelsesligningen for x når $x << r_0$: $\quad \underline{\underline{\ddot{x} + \dfrac{3g}{2r_0}x = 0}}$

Med de gitte utgangsbetingelser blir $x = x_0 \cos \omega t$.

Innsetting i ligningen for x gir slingrebevegelsens vinkelfrekvens: $\quad \underline{\underline{\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{2r_0}}}}$

Oppgave 2



a) Kraften på partikkelen $\vec{F} = -\nabla V$ virker vinkelrett på planet, det vil si i x -retning. Bevelsesmengdens (impulsens) y –komponent forblir derfor upåvirket av potensialbarrieren:

$$m v_{0y} = m v_y \,, \;\Rightarrow\; v_0 \sin\alpha = v \sin\beta$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v}{v_0} .$$

Energien E er den samme for de to sider: $\quad \tfrac{1}{2} m v_0^{\,2} = \tfrac{1}{2} m v^2 + V_0 , \quad \dfrac{v^2}{v_0^{\,2}} = 1 - \dfrac{2V_0}{m v_0^{\,2}}$.

Da $E = \tfrac{1}{2} m v_0^{\,2}$ altså $\dfrac{v^2}{v_0^{\,2}} = 1 - \dfrac{V_0}{E}$.

Kombinerer ligningene: $\quad \underline{\underline{\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{1 - \dfrac{V_0}{E}} \equiv n}}$