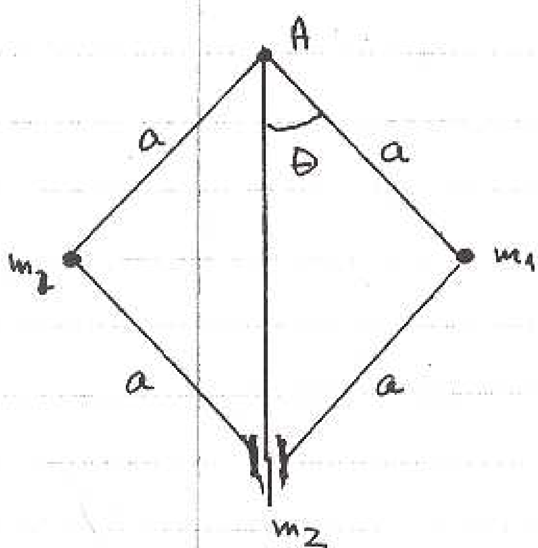
TEP4145 KLASSISK MEKANIKK

Løsning Øving 4 oppgave 3.



2 partikler, hver av masse m_1, pluss 1 partikkel av masse m_2 nederst.

For hver partikkel m_1:

Kinetisk energi fra polar bevegelse i planet er $\frac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\theta}^2$.

Kinetisk energi fra asimutal bevegelse inn i planet er $\frac{1}{2} m_1 (a \sin\theta)^2 \dot{\varphi}^2$, hvor $\dot{\varphi} = \Omega$.

Kinetisk energi for partiklene m_1 altså

$$T_1 = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} m_1 a^2 \sin^2\theta\, \Omega^2 \right) = m_1 a^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \cdot \Omega^2 \right).$$

Partikkel m_2 glir vertikalt. Da dens avstand fra A er $2a\cos\theta$, er dens kinetiske energi

$$T_2 = \tfrac{1}{2} m_2 \left(-2a \sin\theta\, \dot{\theta} \right)^2 = 2 m_2 a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta.$$

Potensielle energier:

$$V_1 = -2 m_1 g a \cos\theta, \qquad V_2 = -2 m_2 g a \cos\theta$$

(legger nullnivået i $\cos\theta = 0$).

ɔ:

$$L = T_1 + T_2 - V_1 - V_2 =$$

$$= m_1 a^2 \left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2\theta \right) + 2 m_2 a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta + 2(m_1 + m_2) g a \cos\theta.$$

Hvis $\theta = 0$ ved $t = 0$: For økende t vil θ øke, inntil systemet når en likevektsstilling.

$\Omega \to \infty$: $\theta \to \frac{1}{2}\pi$.

Løsning Øving 4 oppgave 3, forts.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = 2a^2\dot\theta(m_1 + 2m_2\sin^2\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = 2a^2\ddot\theta(m_1 + 2m_2\sin^2\theta) + 2a^2\dot\theta^2 \cdot 4m_2\sin\theta\cos\theta$$
$$= 2a^2\ddot\theta(m_1 + 2m_2\sin^2\theta) + 4a^2 m_2\dot\theta^2\sin 2\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m_1 a^2\Omega^2 2\sin\theta\cos\theta + 2m_2 a^2\dot\theta^2 2\sin\theta\cos\theta - 2(m_1+m_2)ga\sin\theta$$
$$= a^2(m_1\Omega^2 + 2m_2\dot\theta^2)\sin 2\theta - 2(m_1+m_2)ga\sin\theta.$$

Lagranges ligning:

$$2a^2\ddot\theta(m_1 + 2m_2\sin^2\theta) + 4a^2m_2\dot\theta^2\sin 2\theta - a^2(m_1\Omega^2 + 2m_2\dot\theta^2)\sin 2\theta + $$
$$+ 2(m_1+m_2)ga\sin\theta = 0$$

Med $\omega_0^2 = 2g/a$:

① $$2\ddot\theta(m_1 + 2m_2\sin^2\theta) + 4m_2\dot\theta^2\sin 2\theta - (m_1\Omega^2 + 2m_2\dot\theta^2)\sin 2\theta +$$
$$+ \omega_0^2(m_1+m_2)\sin\theta = 0$$

Likevektstilstand $\theta = \theta_0$, $\ddot\theta = \dot\theta = 0$:

$$-(m_1\Omega^2)\sin 2\theta_0 + \omega_0^2(m_1+m_2)\sin\theta_0$$

② $$\cos\theta_0 = \frac{m_1+m_2}{2m_1}\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$$

Ekvivalent énpartikkelproblem: Skriver L slik: $(m_1 = m_2 = m)$

$L = ma^2(1 + 2\sin^2\theta)\dot\theta^2 - V'(\theta)$, hvor det effektive potensial er

$$V'(\theta) = -ma^2(\Omega^2\sin^2\theta + 2\omega_0^2\cos\theta)$$

Anta $\Omega > \omega_0$. $dV'/d\theta = -ma^2(2\Omega^2\sin\theta\cos\theta - 2\omega_0^2\sin\theta) = 0$ når

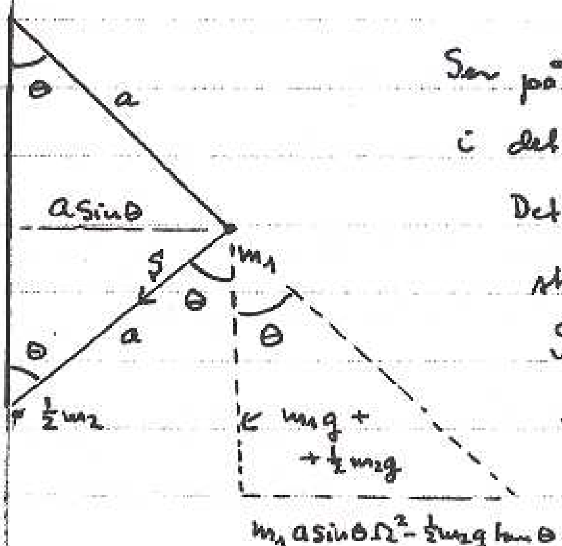
③ $\cos\theta = \omega_0^2/\Omega^2$, altså i overensstemmelse med ② ovenfor.

En finner $V'(\theta_0) = -ma^2\omega_0^2\left(\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right)$,

$\left.\frac{d^2V'(\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta_0} > 0$, altså minimumspkt. for $V'(\theta)$ når $\theta = \theta_0$.

Løsning Øving 4 oppgave 3, forts.

Bestemmelse av Θ_0 ved direkte betraktning:



Ser på likevekten av systemets høyre del i det roterende koordinatsystemet. Det er en aksial kraft S i nedre stang slik at vertikalkomponenten $S\cos\Theta$ balanserer halvparten av tyngden $m_2 g$ av nedre masse (tyngden fordeles seg likt på høyre og venstre halvpart).

Altså $S\cos\Theta = \frac{1}{2} m_2 g$.

På m_1 virker:

- Sentrifugalkraft $m_1 a \sin\Theta\,\Omega^2$ utover
- Horisontalkraft $S\sin\Theta = \frac{1}{2} m_2 g \tan\Theta$ innover
- Vertikalkraft $m_1 g$ fra tyngden av m_1
- Vertikalkraft $\frac{1}{2} m_2 g$ fra tyngden av m_2

Av figuren:
$$\frac{m_1 a \sin\Theta\,\Omega^2 - \frac{1}{2} m_2 g \tan\Theta}{m_1 g + \frac{1}{2} m_2 g} = \tan\Theta$$

Innføring av $\omega_0^2 = 2g/a$:
$$\frac{2m_1\Omega^2 - \frac{1}{2} m_2 \omega_0^2 \frac{1}{\cos\Theta}}{(2m_1 + m_2)\frac{1}{2}\omega_0^2} = \frac{1}{\cos\Theta}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\cos\Theta_0 = \frac{m_1 + m_2}{2m_1}\,\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}} \qquad (\Theta \to \Theta_0), \text{ som før.}$$