Klassisk mekanikk

Løsningsforslag til øving 6

a) Det sentrale kraftfeltet er gitt ved:

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{\beta}{r^3} \qquad \Rightarrow \qquad V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\beta}{2r^2}$$

Fra teorien er: $$\theta = \int \frac{\frac{1}{r^2}dr}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} + konst.$$

Innsetting av V og innføring av $u = \frac{1}{r}$ gir når konstanten utelates

$$\theta = -\int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mku}{l^2} - \gamma^2 u^2}}, \text{ hvor } \gamma^2 = 1 + \frac{\beta m}{l^2}$$

Benytter: $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos\left(-\frac{b + 2cx}{\sqrt{q}}\right), \text{ hvor } q = b^2 - 4ac$$

Her velges $a = \frac{2mE}{l^2}$, $b = \frac{2mk}{l^2}$, $c = -\gamma^2 \Rightarrow q = \left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2E\gamma^2 l^2}{mk^2}\right)$,

$$-\frac{b + 2cu}{\sqrt{q}} = \frac{\frac{\gamma^2 l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2E\gamma^2 l^2}{mk^2}}}.$$ Definerer $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\gamma^2 l^2}{mk^2}}$, $p = \frac{\gamma^2 l^2}{mk}$

Da blir $\theta = -\frac{1}{\gamma} \arccos \frac{\frac{p}{r} - 1}{\varepsilon}$,

Baneligningen er

$$(1) \quad \frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\gamma\theta), \qquad \text{hvor } \gamma = \sqrt{1 + \frac{m\beta}{2l}} \approx 1 + \frac{m\beta}{2l^2}$$

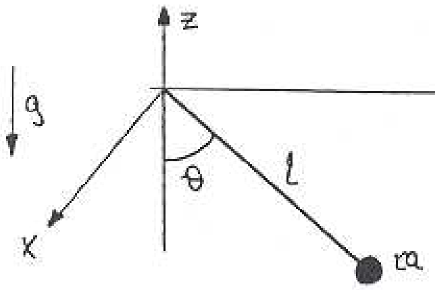
Antar $E < 0$. Da er ligning (1), ligningen for en ellipse med langsom presesjon.

Store halvakse: $a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$ (slik som når $\gamma = 1$) $\Rightarrow$

$$a = \frac{\frac{\gamma^2 l^2}{mk}}{1 - \left(1 + \frac{2E\gamma^2 l^2}{mk^2}\right)} = \frac{k}{2|E|}, \qquad \text{som for } \gamma = 1.$$

Vanlig litenhetsparameter er $\eta = \frac{\beta}{ka}$, dvs. $\gamma = 1 + \frac{m\eta ka}{2l^2}$

Verdien $\eta = 1.42 \cdot 10^{-7}$ tilsvarer Merkurs perihelbevegelse, som er 43″ per hundre år.



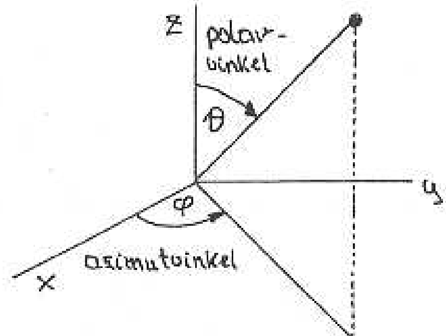
7b) θ er supplementsvinkelen til ordinær polarvinkel

$x = l\sin\theta\cos\varphi$

$y = l\sin\theta\sin\varphi$

$z = -l\cos\theta$

$V = -mg\cos\theta\,,\qquad V = 0$ for $\theta = \frac{1}{2}\pi$.



$$T = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{l^2}{2}m\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

$$L = T - V = \frac{l^2}{2}m\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + mgl\cos\theta$$

Lagrangeligningen: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

Vi finner $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = l^2 m\dot{\theta}$ og $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = l^2 m\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 - mgl\sin\theta$

Det gir bevegelsesligningen: $\ddot{\theta} - \frac{1}{2}\sin 2\theta\cdot\dot{\varphi}^2 + \dfrac{g}{l}\sin\theta = 0$

Tilsvarende for φ: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, hvor $\dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ som gir den andre

bevegelsesligningen: $\dfrac{d}{dt}\left(ml^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}\right) = 0\,,\qquad p_\varphi \equiv ml^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = konst.$

Total energi er konstant: $E = T + V = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - mgl\cos\theta$

Innsetting av $\qquad \dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta}$

gir: $\qquad E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \dfrac{p_\varphi^{\,2}}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta \equiv \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta)$,

hvor $\qquad V_{eff}(\theta) = \dfrac{p_\varphi^{\,2}}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta$. Altså $\dot{\theta}^2 = \dfrac{2}{ml^2}\left(E - V_{eff}\right)$

$$t = \int dt = \sqrt{\frac{ml^2}{2}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{E - V_{eff}(\theta)}}$$

Av $\dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{ml^2\sin^2(\theta)}$, følger

$$\varphi = \int\frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta}dt = \frac{p_\varphi}{\sqrt{2ml^2}}\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E - V_{eff}(\theta)}}$$

$p_\varphi = 0$ gir $ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = 0$, som har løsningen $\varphi = konst.$ som svarer til plan pendel.

Nardo(C:)klassisk\løsning6