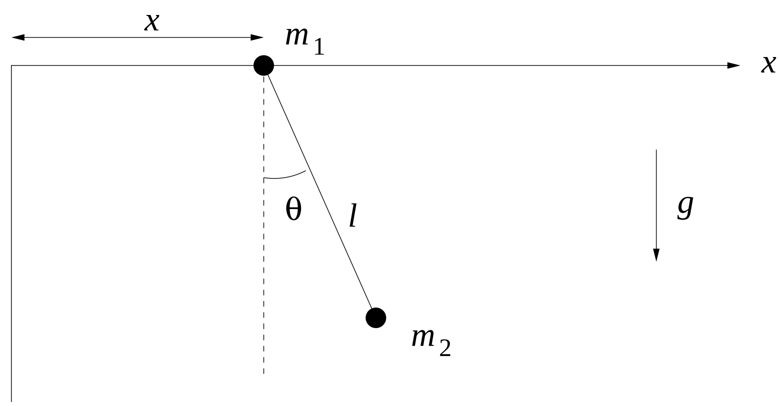
TEP4145 Klassisk mekanikk
Vår 2007

Øving 7, løsningsforslag

OPPGAVE 1



Posisjonen til m_1 er $x_1 = x$. Kinetisk energi for m_1:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2$$

Kinetisk energi for m_2:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right)$$

Med positiv θ i figuren over har vi

$$x_2 = x + l \sin\theta \quad \text{og} \quad y_2 = l \cos\theta$$

som gir

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \quad \text{og} \quad \dot{y}_2 = -l\dot{\theta}\sin\theta$$

Potensiell energi (kun for m_2 med m_1 der $V = 0$):

$$V = -m_2 g l \cos\theta$$

Lagrangefunksjonen blir:

$$\begin{aligned} L &= L(\dot{x}, \theta, \dot{\theta}) = T(\dot{x}, \theta, \dot{\theta}) - V(\theta) \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left(2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\right) + m_2 g l \cos\theta \end{aligned}$$

Her er L uavhengig av x (dvs x er en syklisk koordinat) slik at den kanoniske impulsen $p_x = \partial L / \partial \dot{x}$ er en konstant:

$$p_x = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\theta}\cos\theta = \text{ konst}$$

I følge oppgaven kan vi anta at systemets massemiddelpunkt ikke beveger seg i x-retning. Med andre ord, $p_x = 0$, og vi kan integrere uttrykket for p_x. Det gir:

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l \sin\theta = \text{ konst}$$

Systemets totale energi er:

$$E = T + V = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left(2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\right) - m_2 g l \cos\theta$$

Vi kan eliminere $\dot{x}$ ved å benytte oss av at $p_x = 0$:

$$\dot{x} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\, l\dot{\theta}\cos\theta$$

Total energi er dermed

$$E = \frac{m_2 l \dot{\theta}^2}{2}\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, \cos^2\theta\right) - m_2 g l \cos\theta$$

Denne ligningen kan løses med hensyn på $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{2\left(E + m_2 g l \cos\theta\right)}{m_2\left(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\, \cos^2\theta\right)}}$$

Integrasjon gir deretter

$$t = l\sqrt{\frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}}\int\sqrt{\frac{m_1 + m_2\sin^2\theta}{E + m_2 g l\cos\theta}}\, d\theta$$

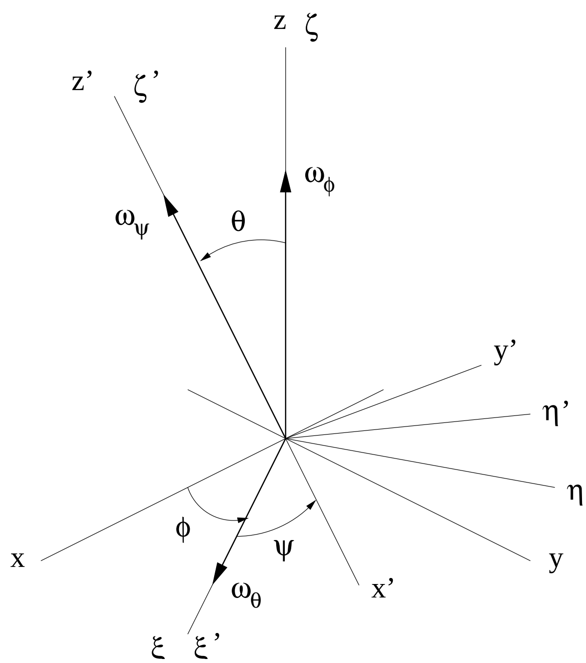
Her har vi foretatt følgende lille omskriving:

$$1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, \cos^2\theta = \frac{m_1 + m_2\sin^2\theta}{m_1 + m_2}$$

Massesenteret ligger i ro, og systemet svinger som en fysisk pendel omkring massesenteret.

OPPGAVE 2

Denne oppgaven kan løses ved figurbetraktning, eller på tilsvarende måte som er gjort i kap. 5.6.1 i kompendiet (kap 4-9 i det gule). La oss her bruke førstnevnte metode, som er det enkleste, i hvert fall hvis vi har en bra figur:



Rotasjonen som svarer til $\boldsymbol{\omega}$, dvs rotasjon om en vilkårlig akse, kan oppfattes som 3 påfølgende rotasjoner med vinkelhastigheter henholdsvis $\omega_\phi = \dot{\phi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$ og $\omega_\psi = \dot{\psi}$. Her tilsvarer ω_ϕ rotasjon omkring z-aksen, med andre ord:

$$\boldsymbol{\omega}_\phi = \dot{\phi}\,\hat{z}$$

Videre tilsvarer ω_θ rotasjon omkring ξ-aksen, med andre ord:

$$\boldsymbol{\omega}_\theta = \dot{\theta}\,\hat{\xi}$$

Endelig tilsvarer ω_ψ rotasjon omkring z'-aksen, med andre ord:

$$\boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\psi}\,\hat{z}'$$

Enhetsvektoren $\hat{\xi}$ ligger i xy-planet og kan dekomponeres slik:

$$\hat{\xi} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$$

Enhetsvektoren $\hat{z}'$ har komponent med lengde $\cos\theta$ langs z-aksen. Projeksjonen av $\hat{z}'$ på xy-planet har lengde $\sin\theta$ og peker i retning av positiv x og negativ y dersom vi har dreid en positiv vinkel ϕ som vist i figuren. Dermed må $\hat{z}'$ ha komponent $\sin\theta \cdot \sin\phi$ i x-retning og komponent $-\sin\theta \cdot \cos\phi$ i y-retning. Alt i alt:

$$\hat{z}' = \cos\theta\,\hat{z} + \sin\theta \cdot \sin\phi\,\hat{x} - \sin\theta \cdot \cos\phi\,\hat{y}$$

Total komponent av $\boldsymbol{\omega}$ langs x-aksen blir dermed

$$\omega_x = \dot{\theta} \cdot \cos\phi + \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi,$$

total komponent av $\boldsymbol{\omega}$ langs y-aksen blir

$$\omega_y = \dot{\theta} \cdot \sin\phi - \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi,$$

og total komponent av $\boldsymbol{\omega}$ langs z-aksen blir

$$\omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cdot \cos\theta,$$

som var det vi skulle vise.

OPPGAVE 3

Sett fra et referansesystem som ikke roterer med karusellen, er det her to krefter som virker på ryggsekken: Den kraften $\boldsymbol{F}$ som *du* utøver på sekken (for å holde den i ro i fanget ditt) og tyngdekraften $-mg\hat{z}$. (Vi kan her trygt se bort fra effekter som skyldes at *jorda* roterer, for jordas vinkelhastighet er ubetydelig i forhold til karusellens vinkelhastighet.) Newtons andre lov gir da

$$\boldsymbol{F}_{\text{tot}} = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} - mg\,\hat{z}$$

I forelesningene utledet vi sammenhengen

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}$$

Her er $\boldsymbol{v}_r$ og $\boldsymbol{a}_r$ henholdsvis hastigheten og akselerasjonen til sekken målt i det roterende referansesystemet, dvs det som ligger fast i karusellen. Her holder du sekken i ro, så begge disse er lik null. Med positiv x-akse fra karusellens sentrum mot deg har vi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) &= \boldsymbol{\alpha} t = \alpha t\,\hat{z} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\alpha} = \alpha\,\hat{z} \\ \boldsymbol{r} &= r\,\hat{x} \end{aligned}$$

med tallverdiene $\alpha = 0.2$, $t = 10$ og $r = 5$ (alt i SI-enheter) ved det aktuelle tidspunktet. Her forsvinner altså coriolisleddet, ettersom $\boldsymbol{v}_r = 0$. Sentrifugalleddet blir

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \alpha t\,\hat{z} \times (\alpha t\,\hat{z} \times r\,\hat{x}) = \alpha^2 t^2 r\;\hat{z} \times \hat{y} = -\alpha^2 t^2 r\;\hat{x}$$

"Eulerleddet" blir

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} = \alpha\,\hat{z} \times r\,\hat{x} = \alpha r\,\hat{y}$$

Settes tallverdier inn, finner vi at du må utøve en kraft $\boldsymbol{F}$ på sekken med komponenter $F_x = -160$ N, $F_y = 8$ N og $F_z = 80$ N (med $g = 10$).