

Øving 8, løsningsforslag

OPPGAVE 1

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(r, \theta, z)$$

Lagranges ligninger:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad L = L(q, \dot{q})$$

som gir

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + \frac{\partial V}{\partial \theta} &= 0 \\ m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Hamiltons ligninger:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad H = H(p, q)$$

Hamiltonfunksjonen er

$$H = T + V = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2 \right) + V(r, \theta, z)$$

Her har vi brukt  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ , som gir

$$p_r = m\dot{r} \quad , \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad , \quad p_z = m\dot{z}$$

og deretter eliminert  $\dot{q}_i$  fra uttrykket for  $T$ . Hamiltons ligninger blir

$$\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \quad , \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \quad , \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

De tre ligningene for  $\dot{q}_i$  har vi allerede på plass, i og med uttrykkene for  $p_i$ .

## OPPGAVE 2

a) Vi skal vise at  $x(t)$  og  $y(t)$  oppfyller ligningene

$$\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} + \omega_0^2 y = 0 \quad (2)$$

der  $\Omega = \omega \sin \theta$  og  $\omega_0^2 = g/l$ . Kraftene som virker på kula, målt i realfagbygg-systemet, er:

- tyngdekrafta  $m\mathbf{g} = -mg\hat{z}$
- snordraget  $\mathbf{S} = S_x\hat{x} + S_y\hat{y} + S_z\hat{z}$
- corioliskrafta  $\mathbf{F}_{\text{cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$

Vi neglisjerer sentrifugalkrafta  $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ .

Jordas vinkelhastighet er

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \sin \theta \hat{z} + \omega \cos \theta \hat{y}$$

Kulas hastighet er

$$\mathbf{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$$

Vi antar små utsving og kan da sette

$$S = |\mathbf{S}| \simeq mg$$

og dessuten anta at

$$\dot{z} \ll \dot{x}, \dot{y}$$

Vektorproduktet i coriolisleddet kan da tilnærmet skrives som

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} &\simeq (\omega \sin \theta \hat{z} + \omega \cos \theta \hat{y}) \times (\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}) \\ &= \dot{x}\omega \sin \theta \hat{y} - \dot{y}\omega \sin \theta \hat{x} - \dot{x}\omega \cos \theta \hat{z} \\ &= \Omega(\dot{x}\hat{y} - \dot{y}\hat{x}) - \dot{x}\omega \cos \theta \hat{z} \end{aligned}$$

Ser så på komponentene av snordraget. Når utsvinget fra origo er

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y},$$

har vi (med vinkel  $\beta$  mellom  $z$ -aksen og snora)

$$\begin{aligned} |S_x| &= S \sin \beta \sin \phi = S \frac{r}{l} \frac{x}{r} \simeq mg \frac{x}{l} \\ |S_y| &= S \sin \beta \cos \phi = S \frac{r}{l} \frac{y}{r} \simeq mg \frac{y}{l} \\ |S_z| &= S \cos \beta = S \frac{l-z}{l} \simeq mg \frac{l-z}{l} \end{aligned}$$

Horisontalkomponenten av  $\mathbf{S}$  peker hele tiden inn mot origo, slik at vi må ha  $S_x > 0$  når  $x < 0$ , tilsvarende for  $S_y$ , og omvendt når  $x > 0$ , alternativt  $y > 0$ . Dermed:

$$\begin{aligned} S_x &= -mgx/l = -m\omega_0^2 x \\ S_y &= -mgy/l = -m\omega_0^2 y \\ S_z &= mg(1 - z/l) \end{aligned}$$

Bevegelsesligningene for kula er

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{S} + \mathbf{F}_{\text{cor}}$$

For  $x$ -komponenten:

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + 2m\Omega\dot{y}$$

For  $y$ -komponenten:

$$m\ddot{y} = -m\omega_0^2 y - 2m\Omega\dot{x}$$

Og dette var nettopp hva vi skulle vise, for bevegelsen i  $xy$ -planet.

b) Med  $u = x + iy$ :

$$\dot{u} = \dot{x} + i\dot{y}$$

$$\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y}$$

Multipliser ligning (2) med  $i$  og legg sammen med ligning (1). Det gir

$$\ddot{x} + i\ddot{y} + 2i\Omega(\dot{x} + i\dot{y}) + \omega_0^2(x + iy) = 0$$

dvs

$$\ddot{u} + 2i\Omega\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

c) Prøver  $u \sim \exp(\alpha t)$  som løsning. Innsatt gir det

$$\alpha^2 + 2i\Omega\alpha + \omega_0^2 = 0$$

som har løsninger

$$\begin{aligned}\alpha &= -i\Omega \pm i\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} \\ &\simeq -i\Omega \pm i\omega_0\end{aligned}$$

ettersom  $\omega_0 \gg \Omega$ . Generell løsning for  $u$  er dermed

$$\begin{aligned}u(t) &= e^{i\Omega t} (Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}) \\ &= Ce^{-i\Omega t} \cos(\omega_0 t + \gamma)\end{aligned}$$

Den kompleks konjugerte av  $u$  er da

$$u^*(t) = C^* e^{i\Omega t} \cos(\omega_0 t + \gamma)$$

Ettersom  $u = x + iy$ , og dermed  $u^* = x - iy$ , finner vi

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}(u + u^*) = \cos(\omega_0 t + \gamma) \cdot \Re \{Ce^{-i\Omega t}\} \\ y &= \frac{1}{2i}(u - u^*) = \cos(\omega_0 t + \gamma) \cdot \Im \{Ce^{-i\Omega t}\}\end{aligned}$$

Med de gitte startbetingelsene  $x = y = 0$  ved  $t = 0$ :

$$\begin{aligned}0 &= \cos \gamma \cdot \Re C \\0 &= \cos \gamma \cdot \Im C\end{aligned}$$

Ettersom vi ikke kan ha  $C = 0$  (da blir  $u = 0$ ), må vi ha  $\cos \gamma = 0$ , dvs  $\gamma = \pi/2$ , og dermed  $\cos(\omega_0 t + \gamma) = \sin \omega_0 t$ . Deretter regner vi ut  $\dot{x}$  og  $\dot{y}$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \omega_0 \cos \omega_0 t \Re \{C e^{-i\Omega t}\} + \sin \omega_0 t \Re \{-i\Omega C e^{-i\Omega t}\} \\ \dot{y} &= \omega_0 \cos \omega_0 t \Im \{C e^{-i\Omega t}\} + \sin \omega_0 t \Im \{-i\Omega C e^{-i\Omega t}\}\end{aligned}$$

Setter inn  $\dot{x} = v_0$  og  $\dot{y} = 0$  ved  $t = 0$ :

$$\begin{aligned}v_0 &= \omega_0 \Re C \\0 &= \omega_0 \Im C\end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned}\Im C &= 0 \\ \Re C &= \frac{v_0}{\omega_0}\end{aligned}$$

Hele løsningen blir

$$\begin{aligned}x(t) &= \sin \omega_0 t \cdot \Re \left\{ \frac{v_0}{\omega_0} e^{-i\Omega t} \right\} = \frac{v_0}{\omega_0} \cos \Omega t \sin \omega_0 t \\ y(t) &= \sin \omega_0 t \cdot \Im \left\{ \frac{v_0}{\omega_0} e^{-i\Omega t} \right\} = -\frac{v_0}{\omega_0} \sin \Omega t \sin \omega_0 t\end{aligned}$$

som tilsvarer en harmonisk svingning i  $xy$ -planet, med vinkelfrekvens  $\omega_0$ , og der svingeplanet roterer med klokka, og en hel gang rundt på tiden

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega \sin \theta} \simeq 26.8 \text{ h}$$