TEP 4145 KLASSISK MEKANIKK

ØVING 2

a) Vis ved direkte substitusjon at Lagrangefunksjonen

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{dF(q,t)}{dt}$$

hvor F er en vilkårlig funksjon, gir samme Lagranges ligning som L.

b) Bruk Levi-Civita tensoren til å vise vektor-relasjonene

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \frac{1}{2}\nabla v^2 - (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla \times \vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla \times \vec{B}).$$

c) En partikkel med masse m beveger seg med lav hastighet $\dot{x} = v$. Friksjonskraften er $F_f = -\partial\mathcal{F}/\partial v$, hvor $\mathcal{F}$ er Rayleighs dissipasjonsfunksjon. Vis at dersom $\mathcal{F} \propto v^2$ så kan det viskøse energitapet $\dot{W}_f$ per tidsenhet skrives som

$$\dot{W}_f = 2\mathcal{F}.$$

Anta at partikkelen er en dempet oscillator, sentrert i origo. Fjærkonstanten er k. Anta at

$$\mathcal{F} = 3\pi\mu a v^2,$$

hvor μ er den dynamiske viskositet og a partikkelens radius. Gå ut fra Lagranges ligning i dette tilfelle, og vis at bevegelsesligningen kan skrives på formen $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Uttrykk λ og ω_0 ved konstantene ovenfor. Løs ligningen for $x(t)$ forutsatt $\dot{x}(0) = 0$ når $\lambda/\omega_0 \ll 1$, og vis at tilnærmet er $\dot{W}_f = m\lambda(\omega_0 x_0)^2 e^{-2\lambda t}$.

($x(0) = x_0$ er gitt.)

(Fra eks. 1998).