TEP 4145

Klassisk mekanikk

ØVING 4

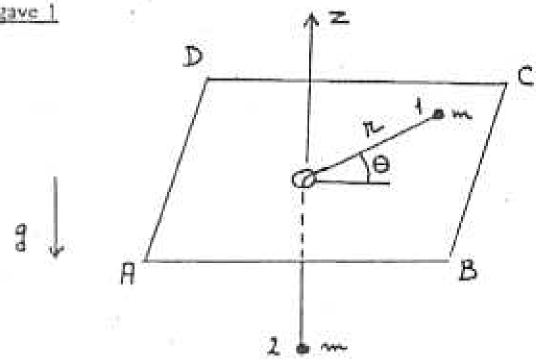
UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MEKANIKK, TERMO- OG FLUIDDYNAMIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Iver Brevik
Tlf.: (7359)3555

EKSAMEN I FAG 66033 KLASSISK MEKANIKK
Onsdag 12. januar 1994
Tid: kl. 0900 - 1400

Hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator
Matematisk formelsamling

Oppgave 1



To partikler 1 og 2, hver med masse m, er forbundet ved en masseløs snor av konstant lengde s. Snora kan løpe friksjonsfritt gjennom en liten åpning i et horisontalt bord ABCD. Partikkel 2 kan bevege seg vertikalt i tyngdefeltet (langs z-aksen). Partikkel 1 beveger seg horisontalt og friksjonsfritt på bordet. Bevegelsen til partikkel 1 vil i det generelle tilfelle være sammensatt av en radiell ($\dot{r} \neq 0$) og en asimutal ($\dot{\theta} \neq 0$) del, hvor (r, θ) er de vanlige plane polarkoordinater. (Se perspektivskissen. Vi betrakter bare bevegelsen så lenge som ingen av partiklene passerer gjennom åpningen). Legg origo i åpningen, og la z-aksen peke oppover. Velg potensialets nullnivå i bordets plan.

a) Vis at Lagrangefunksjonen for partiklene (1+2) er

$$L = m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mg(r-s).$$

b) Vis at Lagranges ligning for θ uttrykker bevarelse av dreieimpuls, $L_z = l$ = konstant, og vis at Lagranges ligning for r kan skrives

$$2m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + mg = 0 \quad .$$

Denne ligningen tillater som mulig løsning at partikkel 1 utfører en sirkulær bevegelse: $r = r_0$ = konstant. Finn r_0 uttrykt ved l. Kunne du ha innsett dette resultatet direkte?

c) Vi tenker oss så at den sirkulære banen $r = r_0$ blir utsatt for en liten radiell perturbasjon: $r \to r_0 + x$, slik at $x = x(t)$ beskriver "slingringen" av partikkel 1 i banen. Benytt den radielle Lagranges ligning ovenfor til å finne bevegelsesligningen for x (ta bare med ledd til første orden i x/r_0). Dersom initialbetingelsene er

$$x(t=0) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(t=0) = 0 \; ,$$

vil løsningen av bevegelsesligningen være av formen $x = x_0\cos\omega t$. Finn slingrebevegelsens vinkelfrekvens ω, uttrykt ved r_0.

Oppgave 2

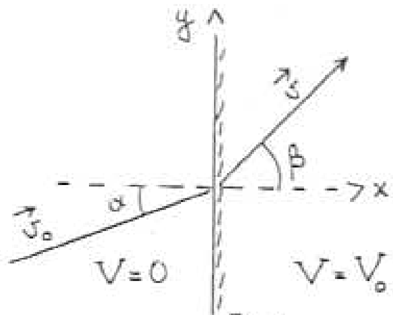


Fig.1

a) En fri ikkerelativistisk partikkel med masse m og konstant hastighet $\vec{v}_0$ kommer inn fra venstre i potensialfritt rom (V=0); se figur 1. Ved planet x=0 er det et potensialsprang, slik at i rommet x>0 er potensialet konstant, lik $V_0(<E)$. Partikkelbanen blir "brutt" ved passering gjennom potensialspranget: partikkelen fortsetter på høyre side med samme energi E som før, men med en annen konstant hastighet $\vec{v}$.

Helningsvinklene med horisontalen er α og β på de to sidene av planet.
Komponentene av hastighetene parallelt med planet må være de samme på de to sidene, dvs. $v_{0y} = v_y$ på figuren. Hvorfor? Benytt dette til å vise at

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \; , \quad \text{hvor} \quad n = \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}} \tag{1}$$