Klassisk mekanikk

Øving 6

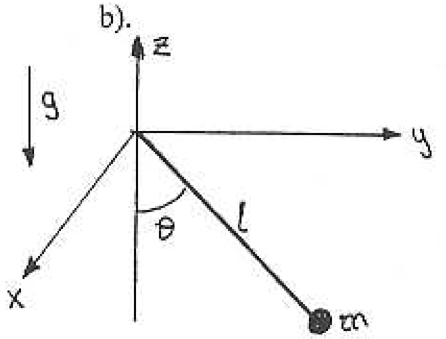
a) Enpartikkel med masse m beveger seg sentralt i et kraftfelt

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{\beta}{r^3} \qquad \beta = konst.$$ er avviket fra Keplerpotensialet.

Vis at baneligningen kan skrives på formen: $\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos(\gamma\theta)$, ($\gamma = 1$ gir en stabil ellipse) som gir en ellipse for $\gamma = 1$ og en presserende ellipse for $\gamma \neq 1$ (vridning av ellipsen, eng. precession, β for Merkur er 43 buesekunder/hundre år). Finn uttrykk for p, ε og γ.

Oppgitt: $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\arccos\left(-\frac{b+2cx}{\sqrt{q}}\right)$, hvor $q = b^2 - 4ac$

b).



En sfærisk pendel beveger seg i tyngdefeltet. Pendelmassen er m og lengden av den masseløse stanga er l. La θ være polarvinkelen som stanga danner med den negative z-aksen, og la φ være den ordinære asimutvinkelen.
Still opp Lagragrangefunksjonen (velg nullnivå for potensialet ved $\theta = \frac{1}{2}\pi$).

Vis at Lagranges ligninger gir:

$$p_\varphi \equiv ml^2\sin^2\theta\dot\varphi = konst. \quad \ddot\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\dot\varphi^2 + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

Vis at den totale energien E kan skrives

$$E = \tfrac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + V_{eff}(\theta).$$

Og vis at vi kan skrive tiden t og vinkelen φ på integralform:

$$t = \sqrt{\frac{ml^2}{2}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{E - V_{eff}(\theta)}},$$

$$\varphi = \frac{p_\varphi}{\sqrt{2ml^2}}\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E - V_{eff}(\theta)}}.$$

Hvilken type bevegelse svarer $p_\varphi = 0$ til?