TEP4145 Klassisk mekanikk
Vår 2007

Øving 8

OPPGAVE 1

Finn Lagranges og Hamiltons ligninger i sylinderkoordinater $q_i = (r, \theta, z)$ for en partikkel med masse m i et potensial $V = V(q_i)$.

OPPGAVE 2

Foucaultpendelen

Vi har nå endelig fått på plass en foucaultpendel her i Realfagbygget. I denne oppgaven skal vi se nærmere på pendelbevegelsen, slik vi observerer den i vårt roterende koordinatsystem. Mer presist skal vi vise at pendelens svingeplan, definert ved en vinkel ϕ i forhold til (for eksempel) syd-nord-retningen (se figur neste side), roterer med hastighet

$$\dot{\phi} = \omega \sin\theta$$

på grunn av corioliskraften $-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$. Her er ω jordas vinkelhastighet (dvs $2\pi/24$ i enheten inverse timer) og θ er breddegraden der hvor pendelen er plassert (dvs ca $63^\circ\, 36'$ her i Realfagbygget). Med andre ord, pinnene som Ola Hunderi setter opp i en sirkel rundt pendelen om morgenen, er alle slått ned av den pendlende kula etter ca 13.4 timer, hvilket skulle bli i nitida om kvelden.

a) Pendelen har lengde l og ei kule med masse m i enden. Anta at snora er masseløs og at pendelen svinger med små utslag. Se bort fra sentrifugalkraften $(-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}))$. Kreftene som virker på kula er dermed tyngdekraften, snordraget og corioliskraften. Velg et koordinatsystem med origo i sentrum av kula når den henger i ro, positiv x-akse mot øst og positiv y-akse mot nord. (Og dermed positiv z-akse vertikalt oppover.) Vis at bevegelsen i xy-planet under disse forutsetningene beskrives av differensialligningene

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\Omega\dot{x} + \omega_0^2 y &= 0 \end{aligned}$$

Her har vi innført $\Omega = \omega \sin\theta$ (dvs vertikalkomponenten av jordas vinkelfrekvens ω, og som etter hvert skal vise seg å være lik pendelplanets vinkelhastighet $\dot{\phi}$) og $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ (dvs pendelens naturlige svingefrekvens).

b) Innfør den komplekse variabelen $u = x + iy$ og vis at de to ligningene over kan kombineres til en enkel differensialligning

$$\ddot{u} + 2i\Omega\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

c) Løs ligningen for u, for eksempel ved å gjette på at løsningen må være på formen $\exp(\alpha t)$. Bruk initialbetingelsene $x = y = \dot{y} = 0$ og $\dot{x} = v_0$ ved $t = 0$ og vis at bevegelsen i xy-planet blir

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{\omega_0}\cos\Omega t\,\sin\omega_0 t \\ y(t) &= -\frac{v_0}{\omega_0}\sin\Omega t\,\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

Med andre ord: En harmonisk svingning med vinkelfrekvens ω_0 der svingeplanet roterer omkring z-aksen med vinkelfrekvens Ω.