TEP4145 Klassisk mekanikk
Vår 2007

Øving 9

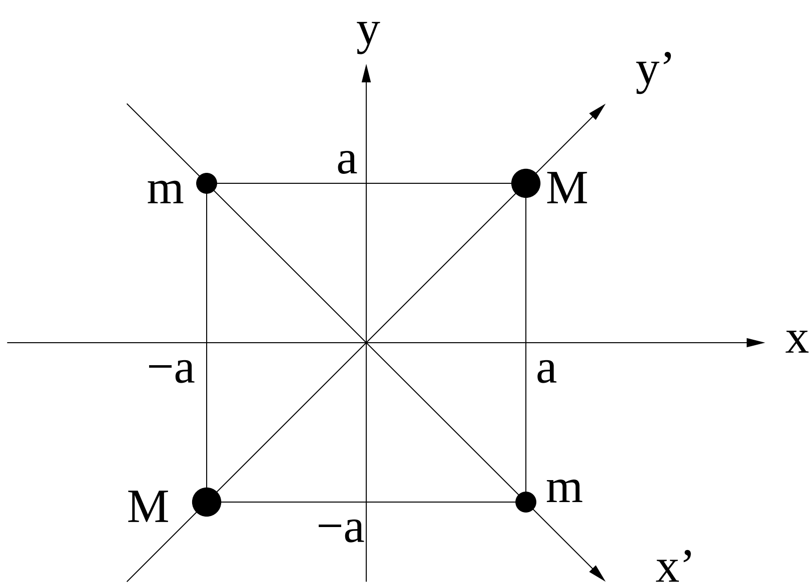
OPPGAVE 1

Bestem treghetsmatrisen $\boldsymbol{I}$ relativt til

a) aksene x, y, z

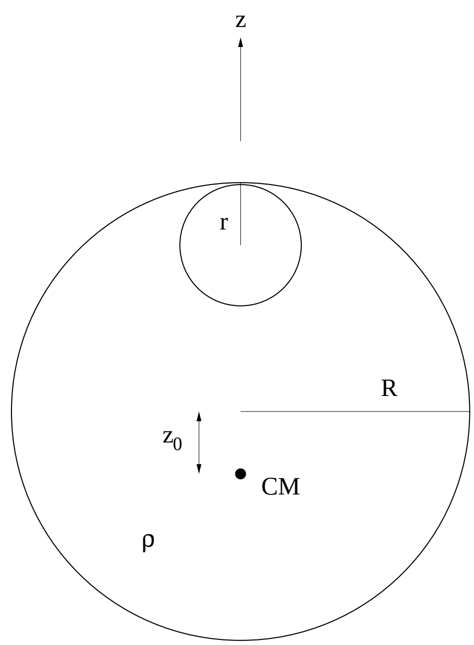
b) aksene x', y', z'

for systemet med fire punktmasser i figuren nedenfor. (Alle massene har $z = z' = 0$.)



OPPGAVE 2

Ei kule med radius R har uniform massetetthet ρ. Kula har et kuleformet hulrom med radius r, som vist i figuren nedenfor. Kula, som er en symmetrisk snurrebass, har symmetriaksen langs z-aksen.



Kulas massesenter ligger åpenbart på z-aksen. Bestem avstanden z_0 fra kulas (geometriske) sentrum til massesenteret.
Bestem kulas treghetsmomenter med hensyn på symmetriaksen (I_z) og med hensyn på en akse som står vinkelrett på z-aksen og som passerer gjennom massesenteret ($I_x = I_y$).

Oppgitt: Med kontinuerlig massefordeling:

$$I_{jk} = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) \left(r^2 \delta_{jk} - x_j x_k \right) d^3 r$$

Med punktmasser:

$$I_{jk} = \sum m(x_i x_i \delta_{jk} - x_j x_k)$$

Treghetsmoment for (homogen) kule med masse M og radius R:

$$\frac{2}{5} M R^2$$

Steiners sats:

$$I = I_{CM} + M s^2$$

Fasit:

1a: $I_{11} = I_{22} = 2a^2(m + M)$, $I_{12} = I_{21} = 2a^2(m - M)$, $I_{33} = 4a^2(m + M)$

1b: $I_{11} = 4Ma^2$, $I_{22} = 4ma^2$, $I_{33} = 4(m + M)a^2$

2:

$$z_0 = \frac{r^3(R - r)}{R^3 - r^3}$$

$$I_z = \frac{8}{15}\pi\rho(R^5 - r^5)$$

$$I_x = I_y = \frac{4}{3}\pi\rho\left[\frac{2}{5}\left(R^5 - r^5\right) - \frac{(R - r)^2 r^3 R^3}{R^3 - r^3}\right]$$