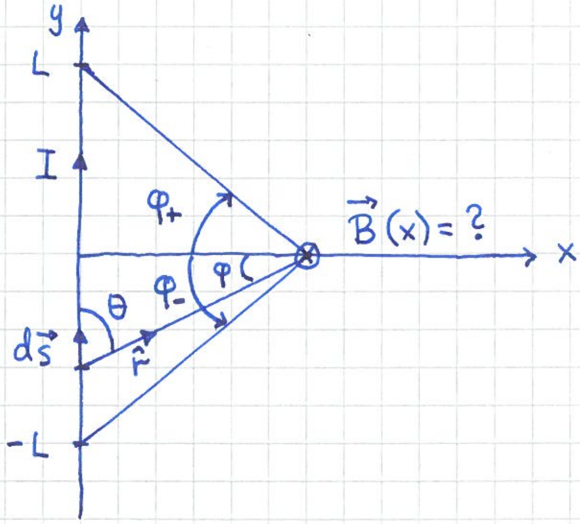
Eks 1: $\vec{B}$ fra rett strømførende leder [TM 27.2; LHL 23.5] [YF 28.3]

27B



Fra figuren:

$$\sin\varphi_+ = L/\sqrt{x^2+L^2}$$

$$\sin\varphi_- = -L/\sqrt{x^2+L^2}$$

$$\sin\theta = \frac{x}{r} = \cos\varphi$$

$$\tan\varphi = y/x$$

Bidrag $d\vec{B}$ fra $I\,d\vec{s}$: $\quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}$

$$d\vec{s}\times\hat{r} = dy\cdot 1\cdot \sin\theta\cdot(-\hat{z}) \quad ; \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\varphi}{x^2}$$

$$y = x\tan\varphi \Rightarrow dy = x\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(x) = \int d\vec{B} = -\frac{\mu_0 I\hat{z}}{4\pi}\int_{\varphi_-}^{\varphi_+}\underbrace{\frac{x\,d\varphi}{\cos^2\varphi}}_{dy}\cdot\underbrace{\cos\varphi}_{\sin\theta}\cdot\underbrace{\frac{\cos^2\varphi}{x^2}}_{1/r^2}$$

$$= -\frac{\mu_0 I\hat{z}}{4\pi x}\int_{\varphi_-}^{\varphi_+}\cos\varphi\,d\varphi = -\frac{\mu_0 I\hat{z}}{4\pi x}\underbrace{\left\{\sin\varphi_+ - \sin\varphi_-\right\}}_{=2L/\sqrt{x^2+L^2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 I L\hat{z}}{2\pi x\sqrt{x^2+L^2}}$$

(= felt fra lengde $2\cdot L$)

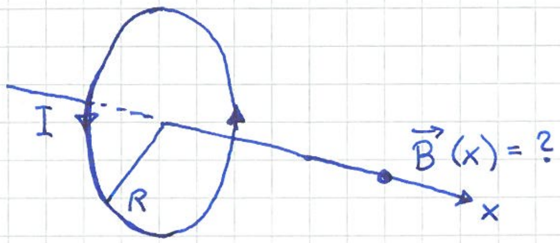
Hvis ∞ lang: $\sqrt{x^2+L^2}\approx L$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(x) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\hat{z}}$$

Eks 2: $\vec{B}$ på aksen til sirkulær strømsløyfe

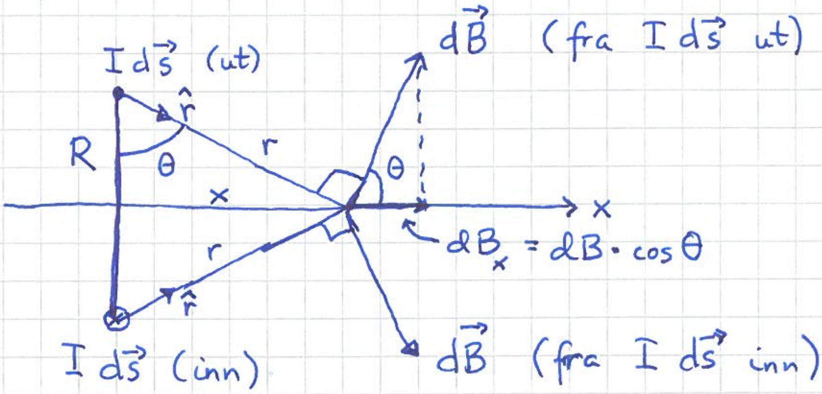
128B

[TM 27.2; LHL 23.6] [YF 28.5]



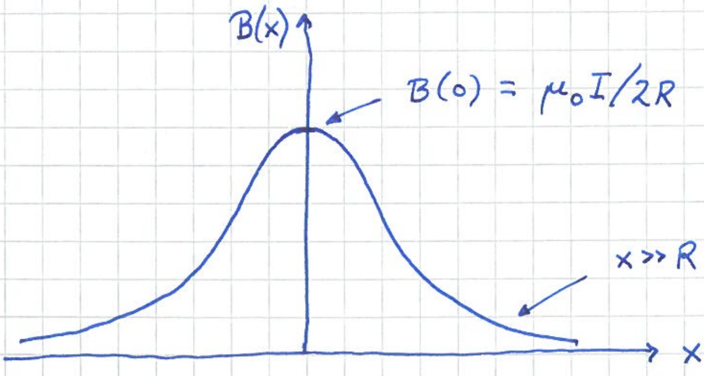
- Strøm I i ring, radius R, sentrum i origo, ligger i yz-planet.
- Hva er $\vec{B}(x)$ på x-aksen?

Sett fra siden:



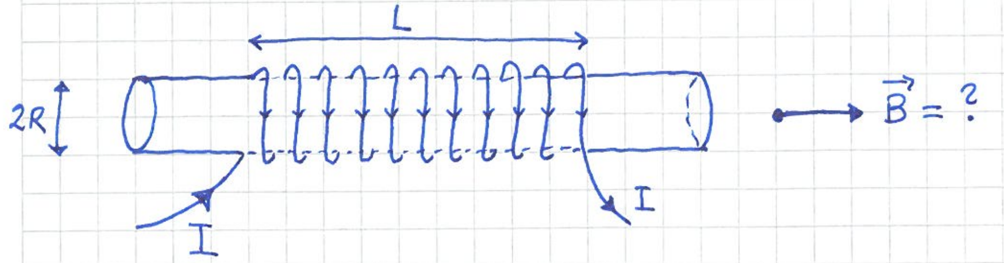
- symmetri $\Rightarrow \vec{B}(x) = B(x)\,\hat{x}$ (for alle x)
- $dB = \left| \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi (x^2+R^2)} \cdot \underbrace{ds \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2}}_{|d\vec{s} \times \hat{r}|}$
- $\cos\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{(x^2+R^2)^{1/2}}$

$$\Rightarrow B(x) = \oint dB_x = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \underbrace{\oint ds}_{=2\pi R} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$



Eks 3: $\vec{B}$ på aksen til strømførende spole

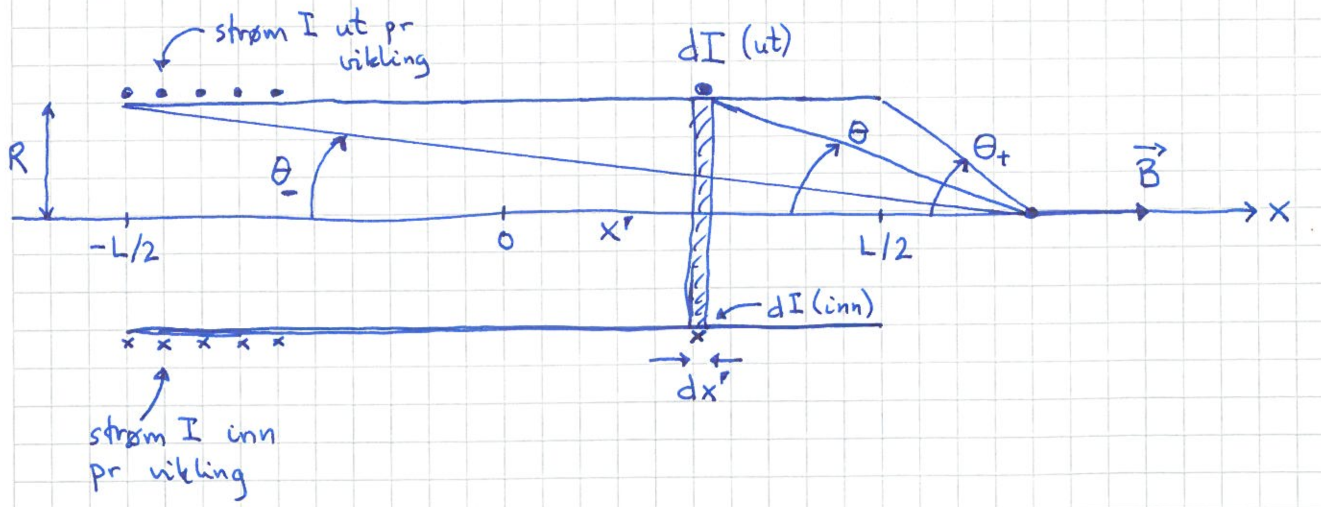
[TM 27.2 ; LHL 23.6] [YF 28.7]



- spole med N tettliggende viklinger på lengde L ($N=11$ i figuren over) ; viklingstetthet $n = N/L$
- hva blir $\vec{B}$ på spolens akse ?

Løsning:

Med tettliggende viklinger kan vi betrakte dette som N strømførende ringer fordelt på lengden L :



viklinger på lengde dx' = dN (# betyr her "antall")

——— " ——— L = N

$$\Rightarrow \frac{dN}{N} = \frac{dx'}{L} \Rightarrow dN = \frac{N}{L}\,dx' = n \cdot dx'$$

Bruker resultatet s. 111 til å skrive ned bidraget dB fra strøm dI i ring med bredde dx' ved x' :

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot dI \cdot R^2}{2\{(x-x')^2 + R^2\}^{3/2}}$$

Med dN viklinger på lengden dx', med strøm I i hver vikling, fås:

$$dI = I \cdot dN = I \cdot n \cdot dx' \qquad (n = N/L)$$

Dermed:

$$B(x) = \int dB = \frac{\mu_0 I n R^2}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{\{(x'-x)^2 + R^2\}^{3/2}}$$

Fra figuren s. 112 ser vi at

$$\cos\theta = \frac{x-x'}{\{(x-x')^2 + R^2\}^{1/2}} = \cos\theta_{\pm} \quad \text{for } x' = \mp \frac{L}{2}$$

Og siden

$$\frac{d}{dy}\left\{\frac{y}{\sqrt{y^2+c}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{y^2+c}} + \frac{y\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 2y}{(y^2+c)^{3/2}} = \frac{y^2+c}{(y^2+c)^{3/2}} - \frac{y^2}{(y^2+c)^{3/2}}$$

$$= c/(y^2+c)^{3/2},$$

er det klart at

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{\{(x'-x)^2+R^2\}^{3/2}} = \Big|_{-L/2}^{L/2} \frac{x'-x}{R^2\sqrt{(x'-x)^2+R^2}}$$

$$= \frac{\frac{L}{2}-x}{R^2\sqrt{(\frac{L}{2}-x)^2+R^2}} + \frac{\frac{L}{2}+x}{R^2\sqrt{(\frac{L}{2}+x)^2+R^2}},$$ og dermed er

$$\underline{\underline{B(x) = \frac{1}{2}\mu_0 n I\left\{\frac{\frac{L}{2}-x}{\sqrt{(\frac{L}{2}-x)^2+R^2}} + \frac{\frac{L}{2}+x}{\sqrt{(\frac{L}{2}+x)^2+R^2}}\right\}}}$$

(PUH!)

129D

Alternativt kan vi skrive

$$B(x) = \frac{1}{2}\mu_0 n I \left\{ \cos\theta_- - \cos\theta_+ \right\}$$

Lang spole: $L \gg R$ (og $\frac{L}{2} \gg R$)

- Med x nær enden av spolen:

  Da er enten $x = L/2$, dvs $\theta_- = 0$ og $\theta_+ = \pi/2$,

  eller $x = -L/2$, dvs $\theta_- = \frac{\pi}{2}$ og $\theta_+ = \pi$.

  I begge tilfeller blir

  $$B\left(|x| \approx \frac{L}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\mu_0 n I}}$$

- Med x inni spolen og langt unna begge ender:

  Da er $\theta_- = 0$ og $\theta_+ = \pi$, slik at

  $$\boxed{B = \mu_0 n I} \quad \text{(inni lang spole)}$$

Det kan vises (ved å bruke den såkalte Amperes lov, som ikke er pensum her) at

$$B = \mu_0 n I$$

overalt inni en lang spole, dvs ikke bare på spolens akse (men under forutsetning av at det er "dypt" inni spolen, dvs langt unna begge ender)

Dette er vårt hovedresultat, som vi skal bruke som en tilnærmelse også for "reelle spoler".

På utsiden av en slik lang og tettviklet spole kan vi anta $B \approx 0$, da det her er mye svakere enn inni spolen.