KLASSISK DYNAMIKK

[YF 1-11, 14 ; LL 1-7, 9]

Størrelser, enheter, SI-systemet [YF 1]

Eks: Masse ; $m = \underbrace{79.2}_{\text{Måltall (Tallverdi)}} \; \underbrace{\mu g}_{\text{Enhet}}$

Størrelse   Symbol

Dekadisk prefiks: μ = mikro $= 10^{-6}$

Notasjon: $[m] = kg$ ("enheten til masse er kilogram")

Grunnenheter i SI:

lengde : $[\ell] = m$ (meter)
tid : $[t] = s$ (sekund)
masse : $[m] = kg$ (kilogram)
elektrisk strømstyrke : $[I] = A$ (ampere)
temperatur : $[T] = K$ (kelvin)
stoffmengde : $[n] = mol$

Sammensatte enheter:

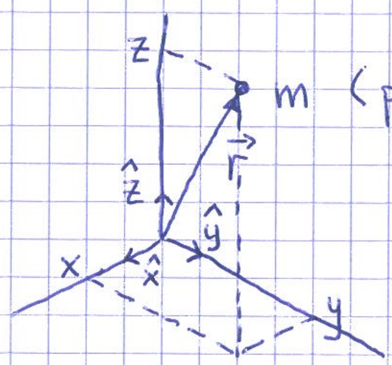
hastighet : $[v] = m/s$
akselerasjon : $[a] = m/s^2$

Avledete enheter:

kraft : $[F] = kg\, m/s^2 = N$ (newton)
energi : $[W] = Nm = J$ (joule)
effekt : $[P] = J/s = W$ (watt)

Kinematikk [YF 2,3 ; LL 1]

(= beskrivelse av bevegelse)



$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$$

= m's posisjon ved tid t i kartesiske koordinater

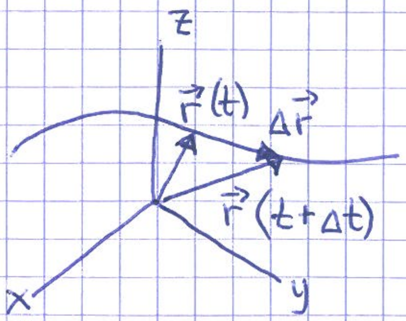
Enhetsvektorer $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad \text{(dimensjonsløse)}$$

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1 \quad ; \quad \hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \dots = 0$$

Banen $\vec{r}(t)$ beskriver m's bevegelse:



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

= forflytningen mellom t og $t+\Delta t$

Hastighet = forflytning pr tidsenhet :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Dvs : $\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$ (da Δt er en skalar)

$\vec{v}$ er tangent til banen

Akselerasjon = hastighetsendring pr tidsenhet:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Vanlig notasjon i fysikk:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{osv} \qquad \Rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Komponenter, kartesiske:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{osv}$$

Tilsvarende: $a_x = \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ osv

Ser at: $\vec{r} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{v} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{a}$

Forventer da:

$$\vec{a} \xrightarrow{\text{integrasjon}} \vec{v} \xrightarrow{\text{integrasjon}} \vec{r}$$

Som stemmer:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x\, dt$$

$$\Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\, dt$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t)\, dt$$

Tilsvarende:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = a_x\, dt \Rightarrow \ldots \Rightarrow v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t)\, dt$$

Generalisering til 3D:

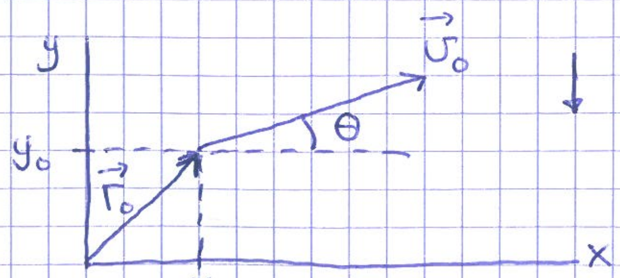
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\, dt$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\, dt$$

Eks: Anta konstant $\vec{a}$ og $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$.
Bestem $\vec{r}(t)$ og $\vec{v}(t)$.

Løsn: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\cdot t$; $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot t^2$

Eks: Kast i tyngdefeltet



$\vec{a} = -g\hat{y}$

Finn $\vec{r}(t)$ og vis at $y(x)$, banen, er en parabel.

Løsn: $x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = x_0 + v_0 t \cos\theta$

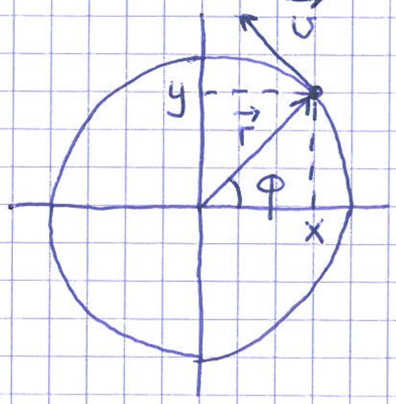
$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = y_0 + v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2$

Eliminasjon av t gir $y(x)$ (vis selv)

Øving 1: • Kast i motbakke.

• Gitt $a(v)$, hva blir $v(t)$?

Sirkelbevegelse [YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8]



Polarkoord:

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\vec{r}$

($\varphi > 0$ mot klokka)

Fra fig: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\tan\varphi = y/x$,

$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$ (= konst. for sirkelbev.)

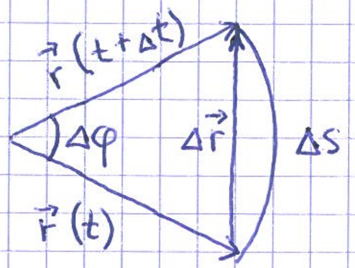
$\vec{r} = r\cos\varphi\ \hat{x} + r\sin\varphi\ \hat{y}$

Vinkelhastighet = vinkelendring pr tidsenhet:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Vinkel = buelengde / radius:

$$\Delta\varphi = \Delta s / r$$



Når $\Delta t \to 0$: $\Delta\varphi \to 0$, $\Delta r = |\Delta\vec{r}| \to \Delta s = r\,\Delta\varphi$

$\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$

Dermed:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\,\Delta\varphi}{\Delta t} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega$$

$\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$ og $\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$ $\Rightarrow$ $\vec{v} \perp \vec{r}$

Hvis v og $\omega = v/r$ er konst., har vi <u>uniform</u> sirkelbev., og da er

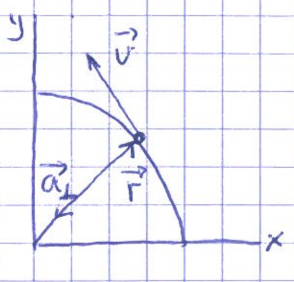
$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} d\varphi = \omega \int_0^t dt = \omega t,$$ og med $\varphi(0) = 0$ fås

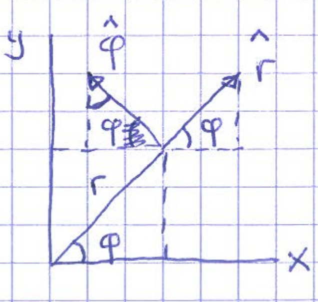
$$\boxed{\varphi(t) = \omega t}$$

Har da:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} = r\cos\omega t\,\hat{x} + r\sin\omega t\,\hat{y}$$
$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\hat{x} + \dot{y}(t)\,\hat{y} = -r\omega\sin\omega t\,\hat{x} + r\omega\cos\omega t\,\hat{y}$$
$$\vec{a}_\perp(t) = \ddot{x}(t)\,\hat{x} + \ddot{y}(t)\,\hat{y} = -r\omega^2\cos\omega t\,\hat{x} - r\omega^2\sin\omega t\,\hat{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_\perp = -\omega^2\vec{r}}$$ Sentripetalakselerasjon





$$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$
$$\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$

Ser at: $\vec{r} = r\hat{r}$, $\vec{v} = v\hat{\varphi} = r\omega\hat{\varphi}$, $\vec{a}_\perp = -\omega^2 r\hat{r} = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$

Hvis $v = |\vec{v}|$ endrer seg, har vi også baneakselerasjon:

$$a_\parallel = \dot{v} = \frac{d}{dt}(\omega r) = r\frac{d\omega}{dt} = r\dot{\omega}$$

Total akselerasjon: $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel = -\omega^2 r\,\hat{r} + r\dot{\omega}\,\hat{\varphi}$

Vinkelakselerasjon: $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$; $[\alpha] = 1/s^2$

Periode: T = omløpstid ; $[T] = s$

Frekvens: f = antall omløp pr tidsenhet ; $[f] = Hz$ (herz) $= 1/s$

$\Rightarrow v = 2\pi r/T \Rightarrow T = 2\pi r/v = 2\pi/\omega$, $f = 1/T = \omega/2\pi$