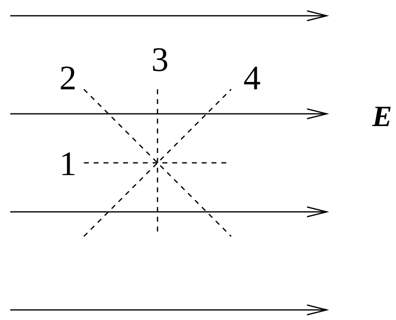
TFY4104 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.
Øving 9. Veiledning: 26. - 30. oktober.

Oppgave 1

a) Figuren viser et uniformt elektrisk felt $\boldsymbol{E}$ (heltrukne linjer). Langs hvilken stiplet linje endrer potensialet seg ikke?

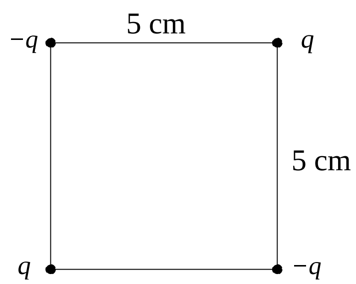


A 1
B 2
C 3
D 4

b) Den potensielle energien til to elektroner i innbyrdes avstand 1 Å ($= 10^{-10}$ m) er [1 eV $= 1.6 \cdot 10^{-19}$ J]

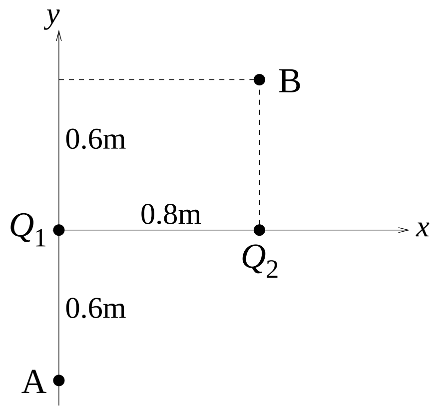
A 14.4 meV
B 14.4 eV
C 14.4 keV
D 14.4 MeV

c) Fire punktladninger, to positive og to negative ($q = 9\ \mu$C), er plassert i hjørnene på et kvadrat med sidekanter 5 cm, som vist i figuren. Hva er systemets potensielle energi?



A 19 J
B Null
C -7 J
D -38 J

d) To punktladninger $Q_1 = 69$ nC og $Q_2 = -98$ nC er plassert i xy-planet, som vist i figuren. Et elektron flyttes fra punkt A til punkt B. Hvor stor endring gir denne forflytningen i systemets potensielle energi? (Systemet- de to punktladningene og elektronet.) (1 eV $= 1.6 \cdot 10^{-19}$ J)

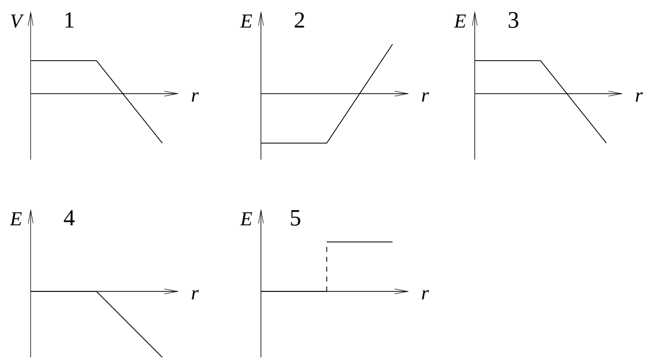


A -1 keV
B -1 eV
C 1 eV
D 1 keV

e) Hvor stor er radien til en (kuleformet) ekvipotensialflate på 50 V med en punktladning 10 nC i sentrum? Null potensial velges uendelig langt unna.

A 1.3 m
B 1.8 m
C 3.2 m
D 5.0 m

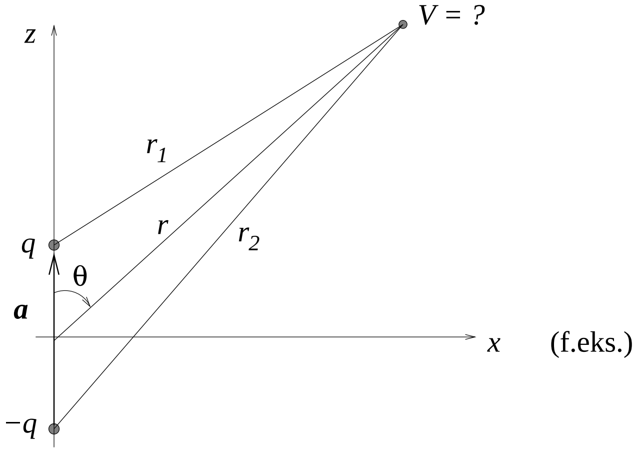
f) Hvis potensialet V som funksjon av avstanden r fra en ladningsfordeling er som vist i graf nr 1, hvilken graf viser da det elektriske feltet E som funksjon av avstanden r?



A 2
B 3
C 4
D 5

Oppgave 2

En *elektrisk dipol* som består av to punktladninger $\pm q$, er plassert langs z-aksen med sentrum i origo, som vist i figuren. Det elektriske *dipolmomentet* er da $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{a}$, der $\boldsymbol{a} = a\,\hat{z}$ er vektoren fra $-q$ til q.



Siden vi her opplagt må ha *symmetri* med hensyn til rotasjon omkring z-aksen, er det tilstrekkelig å se på forholdene i et halvplan som inneholder z-aksen, f.eks. xz-planet, med $x > 0$.
Vi kan videre velge mellom kartesiske koordinater (x, z) eller polarkoordinater (r, θ) for å angi en vilkårlig posisjon i dette planet. Vi skal se på begge deler i denne oppgaven. Vinkelen θ kan vi selvsagt velge i forhold til hvilken kartesiske akse vi vil; her lar vi θ være vinkelen som $\boldsymbol{r}$ danner i forhold til z-aksen (se figuren).

a) Bestem først sammenhengen mellom de kartesiske koordinatene og polarkoordinatene, dvs $x(r, \theta)$, $z(r, \theta)$ og $r(x, z)$.

b) Vis at potensialet fra en slik dipol i kartesiske koordinater blir

$$V(x, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z + a/2)^2}}\right)$$

Hva blir potensialet på x-aksen, $V(x, 0)$? Enn på z-aksen, $V(0, z)$? (På *hele* z-aksen; pass på fortegnene...!) Skisser funksjonen $V(0, z)$.

c) Vis at i stor avstand fra dipolen (dvs $r \gg a$) er potensialet med god tilnærmelse gitt i polarkoordinater ved

$$V(r, \theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

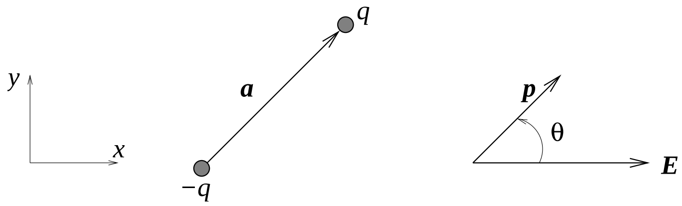
Tips: Ta utgangspunkt i at

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

og bruk figuren til å finne et tilnærmet uttrykk for dette når $r \gg a$.
Mens potensialet fra en enkelt punktladning avtar som $1/r$, avtar altså potensialet fra en dipol *raskere*, nemlig som $1/r^2$. Er dette rimelig?

Oppgave 3

En elektrisk dipol består av to punktladninger q og $-q$ med en (fast) innbyrdes avstand a. Dipolen er plassert i et homogent "ytre" elektrostatisk felt $\boldsymbol{E} = E\hat{x}$. Anta at dipolen ligger i xy-planet og slik at vektoren $\boldsymbol{a}$ fra $-q$ til q, og dermed også dipolmomentet $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{a}$, danner en vinkel θ med $\boldsymbol{E}$. Vinkelen θ regnes *mot urviseren* i forhold til x-aksen, som vist i figuren.



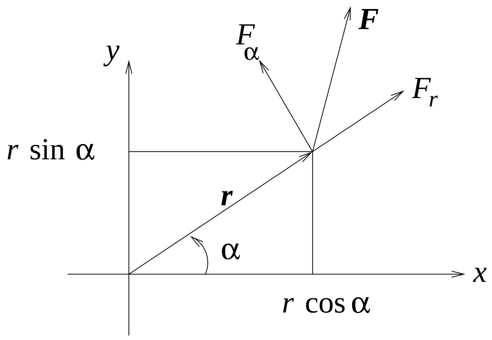
a) Hva blir den totale kraften (fra det ytre feltet $\boldsymbol{E}$) på dipolen?

b) Fra mekanikken har vi at *dreiemomentet* $\boldsymbol{\tau}$ omkring en bestemt akse (eller strengt tatt: om et punkt) er definert som $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$, der $\boldsymbol{r}_i$ er "armen" fra aksen og ut til posisjonen der kraften $\boldsymbol{F}_i$ angriper. Vis at for den elektriske dipolen i det homogene feltet blir dreiemomentet omkring aksen som går normalt gjennom dipolens midtpunkt

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{p} = -pE \sin\theta \; \hat{z}$$

c) Til slutt skal du finne et uttrykk for den potensielle energien $U(\theta)$ til den elektriske dipolen ovenfor. Skisser også $U(\theta)$. Hvilken orientering av dipolen i forhold til $\boldsymbol{E}$ representerer en stabil likevekt?

Til hjelp på punkt c) (repetisjon fra mekanikken):
La oss for enkelhets skyld holde oss i xy-planet. En kraft $\boldsymbol{F} = F_x \; \hat{x} + F_y \; \hat{y} = F_r \; \hat{r} + F_\alpha \; \hat{\alpha}$ som angriper i en posisjon $\boldsymbol{r} = r\cos\alpha \; \hat{x} + r\sin\alpha \; \hat{y}$ vil da gi et dreiemoment $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ omkring z-aksen:



Vi vet dessuten at kraften $\boldsymbol{F}$ kan "avledes' fra den potensielle energien U ved hjelp av gradientoperatoren: $\boldsymbol{F} = -\nabla U$. I polarkoordinater (r, α) har vi

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\alpha}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \alpha}$$

Da kan det vises at

$$\tau = -\frac{\partial U}{\partial \alpha},$$

og dermed er

$$dU = -\tau \, d\alpha$$

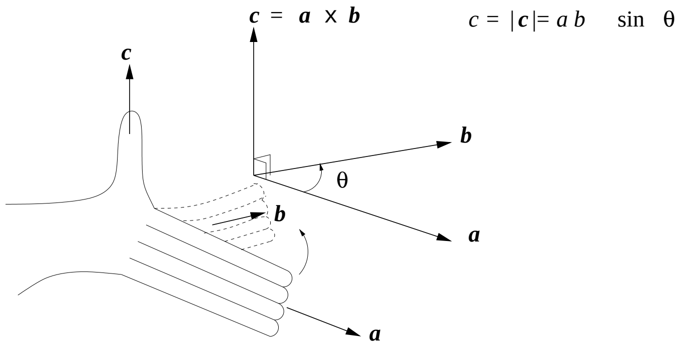
ettersom U ikke avhenger av r i vårt tilfelle. (Vi har fast $r = a/2$ for dipolen.)

Kommentar: En elektrisk isolator, et såkalt *dielektrikum*, består typisk av molekyler med null nettoladning, men med en intern ladningsfordeling (dvs plassering av atomkjerner og elektroner) som er "skjev". Sagt på en annen måte: Ladningsmiddelpunktetfor molekylets positive ladning (dvs atomkjernene) er ikke i samme posisjon som ladningsmiddelpunktet for molekylets negative ladning (dvs elektronene). Slike *polare* molekyler er dermed elektriske dipoler. Eksempel: Vann, H_2O.

Kryssprodukt mellom vektorer (kun litt repetisjon)

Kryssproduktet mellom to vektorer er en tredje vektor med retning normalt på begge de to første, og med absoluttverdi lik produktet av absoluttverdien av de to første multiplisert med sinus til vinkelen mellom disse.

Fortegnet på vinkelen mellom de to vektorene regnes som positivt når vi går *fra* den første vektoren *til* den andre. Denne fortegnskonvensjonen er det samme som det dere kanskje kjenner som høyrehåndsregelen:



La høyre hånds fire fingre (unntatt tommelen) peke langs den første vektoren. Bøy dem deretter slik at de peker langs den andre vektoren. (Vi bøyer fingrene den retningen som gir en vinkel mindre enn 180 grader.) Tommelen peker nå i kryssproduktets retning. Altså:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

har absoluttverdi

$$c = |\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\theta = a \cdot b \cdot \sin\theta$$

Eksempel 1: $\boldsymbol{a} = 10\,\hat{x}$ og $\boldsymbol{b} = 5\,\hat{y}$ gir

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 50\,\hat{z}$$

Eksempel 2: $\boldsymbol{a} = 5\,\hat{y}$ og $\boldsymbol{b} = 10\,\hat{x}$ gir

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -50\,\hat{z}$$

Av dette ser vi at

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

Eksempel 3: $\boldsymbol{a} = 2\,\hat{x} - 3\,\hat{y}$ og $\boldsymbol{b} = 5\,\hat{x} + 2\,\hat{y}$ gir

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 2 \cdot 2\,\hat{z} + 3 \cdot 5\,\hat{z} = 19\,\hat{z}$$

I disse eksemplene har vi brukt at

$$\begin{aligned} \hat{x} \times \hat{x} &= 0 \\ \hat{y} \times \hat{y} &= 0 \\ \hat{x} \times \hat{y} &= \hat{z} \\ \hat{y} \times \hat{x} &= -\hat{z} \end{aligned}$$