

ELEKTRISITET OG MAGNETISME

(62)

Hovedinndeling:

YF		TM	LHL
21-24	I. Elektrostatikk. Ledere og isolatorer.	21-24	19-20
25-26	II. Elektrisk strøm. Likestrømkretser.	25	21-22
27-28	III. Magnetostatikk. Magnetisme.	26-27	23, 26
29-31	IV. Elektromagnetisk induksjon. Vekselstrømkretser.	28-29	24, 25, 27

Motivasjon / Plan:

Følge en sammenhengende vei fra Coulombs lov til virkemåten til kretselementene motstand (R), kondensator (C) og spole (L).

I. Elektrostatikk [TM 21-24; LHL 19-20] [YF 21-24]

Elektrisk ladning [TM 21.1; LHL 19.1] [YF 21.1]

Materie = Atomer = Atomkjerne + Elektroner

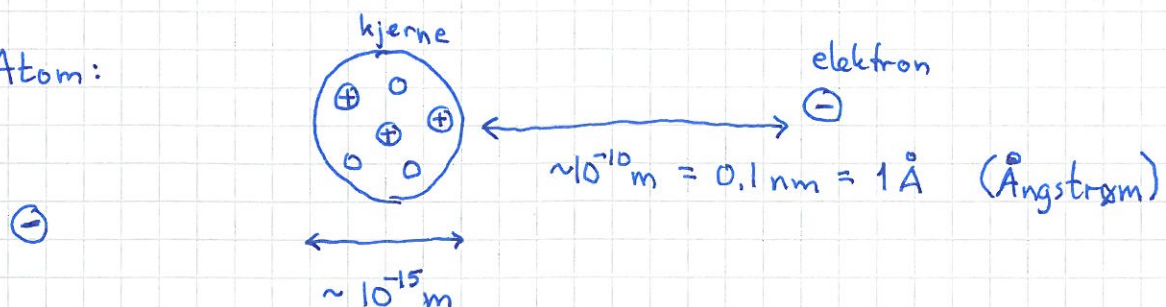
Atomkjerne = Protoner + Nøytroner

Proton, Nøytron = Kjernepartikler (←)

(1 kjernepartikkel = 3 kvarker)

Elementærpartikler

Atom:



⊖

Elementærpartiklene har kvantisert ladning og masse: (63)

$$\oplus \text{ proton} \quad q_p = +e \quad m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$0 \text{ nøytron} \quad q_n = 0 \quad m_n \approx \text{---''---}$$

$$\ominus \text{ elektron} \quad q_e = -e \quad m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

[Kvarker: $q_k = \pm \frac{e}{3}, \pm \frac{2e}{3}$] Her er $e = \text{elementærladningen}$.

Ekspérimentelt ble kvantisert ladning først påvist av R. Millikan, i hans berømte oljedråpeforsøk. [Nobelpris 1923]

Nøytrale atomer (og molekyler):

$$Z \text{ protoner og } Z \text{ elektroner} \Rightarrow Q = Z \cdot (+e) + Z \cdot (-e) = \underline{0}$$

Ioner: Atomer/molekyler med overskudd eller underskudd på elektroner.

$$\text{Eks: } O^{2-} = \text{oksygenatom med 2 ekstra elektroner, } Q = -2e$$

$$O_2^- = O_2\text{-molekyl med 1 ---''---, } Q = -e$$

Ladningsbevarelse:

Ekspérimentell erfaring: Netto ladning i lukket system er konstant.

Eks: Radioaktivitet (β -decay)

nøytron \longrightarrow proton + elektron + antineutrino

$$Q: \quad \underline{0} \longrightarrow +e + (-e) + 0 = \underline{0}$$

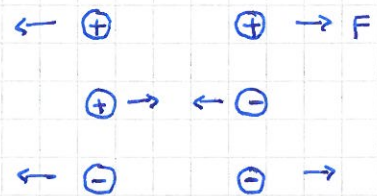
Påvisning av ladning:

Ballongforsøk viser både tiltrekning og frastøtning:



Slutninger:

- To typer ladning: positiv og negativ
- Samme type \Rightarrow Frastøtning
- Ulik type \Rightarrow Tiltrekning



Coulombs lov [TM 21.3; LHL 19,3] [YF 21.3]

Ekspenimenter av Coulomb med ladde kuler (ca 1785):



Observasjoner: [\sim betyr her "proporsjonal med"]

- $F_{12} \sim q_1 \cdot q_2$
 - $F_{12} \sim 1/r_{12}^2$
 - $\vec{F}_{12} \sim \hat{r}_{12}$
- } absoluttverdien
- } retningen

Dvs:

$$\vec{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Coulombs lov

Samme form som Newtons gravitasjonslov:

(65)

$m_1 \odot \leftarrow \odot m_2$ $\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$ (se s. 10)

N3 gjelder også for Coulomb-krefter:

$\vec{F}_{21} \leftarrow \odot q_1$ $\odot q_2 \rightarrow \vec{F}_{12}$ $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

Enhet for ladning [TM 21.1; LHL 19.1] [YF 21.3]

$[q] = C$ (coulomb)

Med utgangspunkt i grunnenheten A (ampere) for strømstyrke:

$1 C = 1 A \cdot s$ = mengden ladning som passerer et tverrsnitt av en leder pr sekund når strømstyrken i lederen er 1 A

Med utgangspunkt i egenskaper til vakuum (tomt rom):

$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, der $\epsilon_0 = 8.854 \dots \cdot 10^{-12}$ er den såkalte permittiviteten til vakuum. [Mer om dette senere!]

Da blir $K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.98755 \dots \cdot 10^9 \approx 9 \cdot 10^9$, og

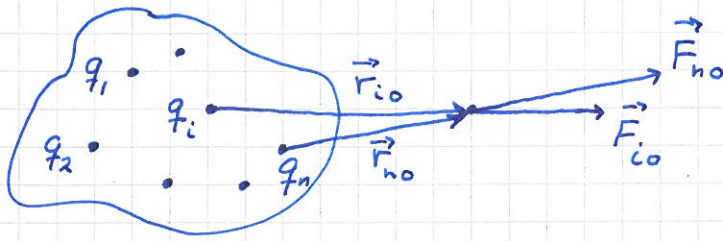
$1 C$ = ladningen til hver av to like ladninger som i innbyrdes avstand på 1 m frastøter hverandre med en kraft $8.98755 \dots \cdot 10^9$ N.

Elementarladningen har verdien: $e = 1.602 \dots \cdot 10^{-19}$ C

Enheten til permittivitet: $[\epsilon_0] = [q^2 / r^2 \cdot F] = C^2 / m^2 \cdot N$

$[K_e] = [1/\epsilon_0] = N \cdot m^2 / C^2$

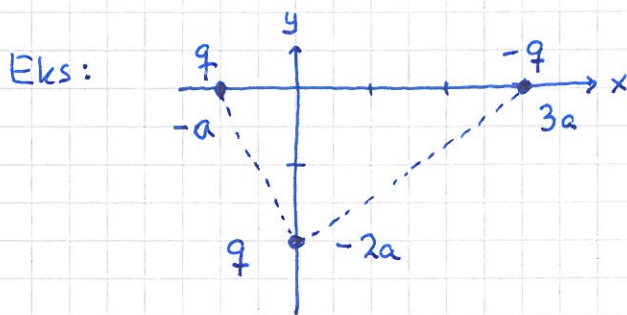
Elektrisk kraft fra flere ladninger [TM 21.3; LHL 19.3] [YF 21.3] (66)



Superposisjonsprinsippet ("SPP"): Kraftene adderes (vektorielt) for å finne total kraft.

⇒ Total kraft på q_0 fra $\{q_1, \dots, q_n\}$:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + \dots + \vec{F}_{n0} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i \cdot q_0}{r_{i0}^2} \hat{r}_{i0}$$



Finn kraften \vec{F} på q som er i $(0, -2a)$ fra de to andre.

Løsning:

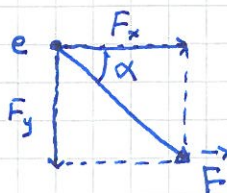
$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q^2}{5a^2} \cdot \frac{a\hat{x} - 2a\hat{y}}{\sqrt{5}a} + \frac{q \cdot (-q)}{13a^2} \cdot \frac{(-3a\hat{x} - 2a\hat{y})}{\sqrt{13}a} \right\} \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left\{ \left(\frac{1}{5\sqrt{5}} + \frac{3}{13\sqrt{13}} \right) \hat{x} - \left(\frac{2}{5\sqrt{5}} - \frac{2}{13\sqrt{13}} \right) \hat{y} \right\} \end{aligned}$$

Anta f.eks. at $q=e$ og $a=1\text{\AA} = 10^{-10}\text{m}$:

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1.6^2 \cdot 10^{-38}}{10^{-20}} = 23 \cdot 10^{-9}\text{N}; \quad \vec{F} = (3.53\hat{x} - 3.13\hat{y})\text{nN}$$

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{3.53^2 + 3.13^2}\text{nN} = \underline{4.72\text{nN}}$$

Retning:

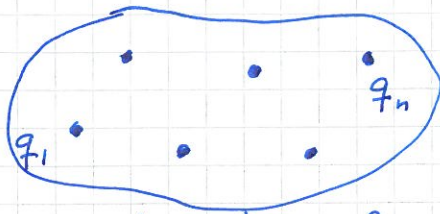


$$\alpha = \arctan \frac{F_y}{F_x} = \arctan \frac{3.13}{3.53} \approx \underline{41.6^\circ}$$

Elektrisk felt

[TM 21.4; LHL 19.4] [YF 21.4]

(67)



område A med
"referanseladninger"



punkt B med
"testladning" q_0

\vec{F} = kraft på q_0 fra $\{q_1, \dots, q_n\}$

Da er det elektriske feltet \vec{E} i punkt B fra
ref. l. $\{q_1, \dots, q_n\}$ i område A:

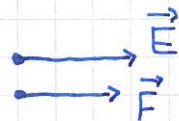
$\vec{E} \stackrel{\text{def.}}{=} \text{kraft } \vec{F} \text{ pr ladningsenhed}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{F} / q_0}$$

Enhet: $[E] = \text{N/C}$

Retning på \vec{F} og \vec{E} :

$q_0 > 0 \Rightarrow \vec{F}$ samme retn. som \vec{E}



$q_0 < 0 \Rightarrow \vec{F}$ modsatt retn. av \vec{E}



\vec{E} fra punktladning

[TM 21.4; LHL 19.5] [YF21.4] (68)

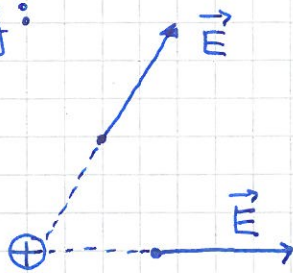


Elektrisk felt fra q i avstand \vec{r} :

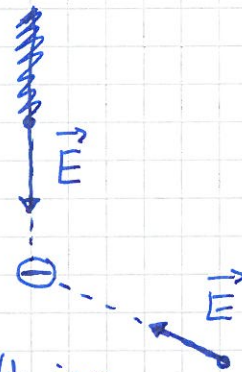
$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

(Uavhengig av q_0 !)

Retning:

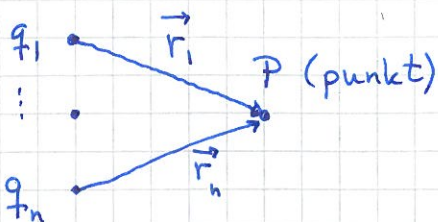


radielt ut fra positiv ladning



radielt inn mot negativ ladning

\vec{E} fra flere punktladninger:



Med testladn. q_0 i P:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_0}{r_i^2} \hat{r}_i$$

= kraft på q_0 fra $\{q_1, \dots, q_n\}$

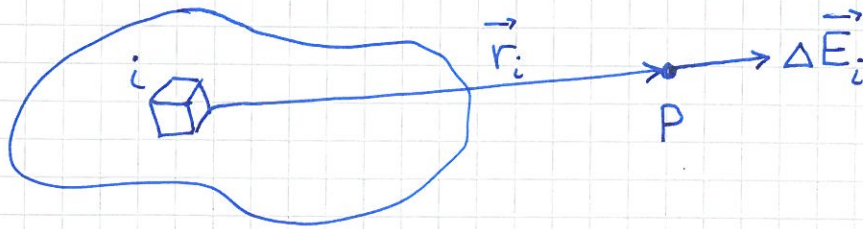
\Rightarrow El. felt fra $\{q_1, \dots, q_n\}$ i P:

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

Dvs: $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$; når SPP gjelder for \vec{F} , gjelder det også for \vec{E} .

\vec{E} fra kontinuerlig ladningsfordeling [TM 22.1; LHL 19.5] (69)

[YF 21.5]



Deler inn i små volum ΔV_i (evt. areal ΔA_i , evt. lengder Δl_i) med liten ladning Δq_i (\approx punktladning), som gir bidrag

$$\Delta \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

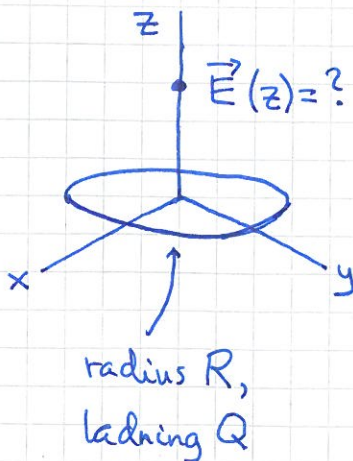
til totalt felt i P.

\Rightarrow Totalt felt i P:

$$\vec{E} = \sum_i \Delta \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \xrightarrow{\Delta q_i \rightarrow dq} \int \frac{dq \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

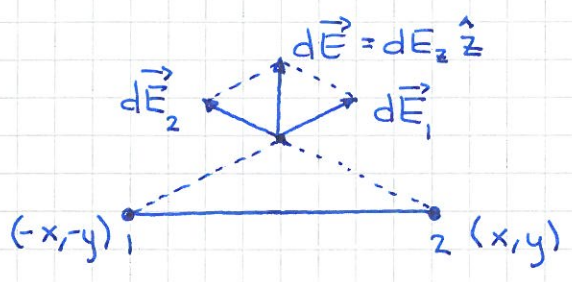
[Samme "oppskrift" som med kont. massefordeling, ved beregning av \vec{R}_{cm} (s.36) og I (s.39).]

Eks: \vec{E} på aksen til jevnt ladet ring

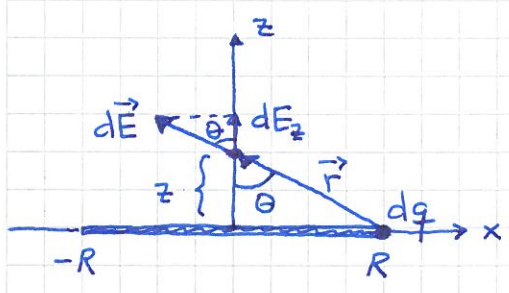


Løsning:

Symmetri $\Rightarrow \vec{E}(z) = E_z \hat{z}$ ($E_x = E_y = 0$)



Bidrag til E_z fra liten bit med ladning dq :



$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = dE \cdot \hat{r}$

$dE_z = dE \cdot \cos\theta = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{z}{r}$

$r = \sqrt{z^2 + R^2}$

$\Rightarrow E_z = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int dq = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$

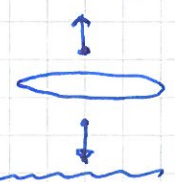
Sjekker svaret:

$[E_z] = [Qz/\epsilon_0 z^3] = [Q/\epsilon_0 z^2]$ (enhet OK)

$E_z(0) = 0$; OK (symmetri)

$z \gg R \Rightarrow E_z \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$; OK (ser punktladning Q i origo)

$z \rightarrow -z \Rightarrow E_z \rightarrow -E_z$; OK

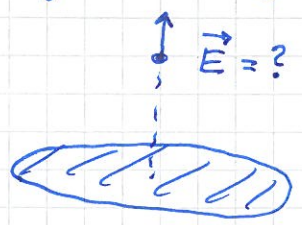


Øring 8: Tynn stav, jevnt ladet.



$\downarrow \vec{E} = ?$

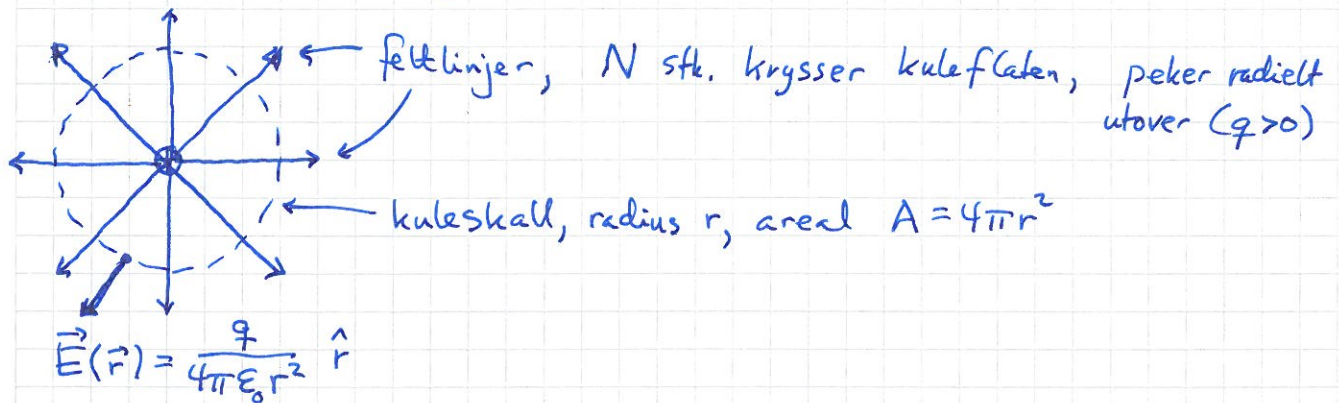
Tynn skive, jevnt ladet.



Feltlinjer for \vec{E} [TM 21.5; LHL 19.6] [YF 21.6] (71)

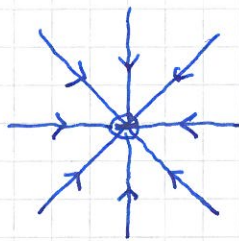
- gir et "bilde" av \vec{E} i et område
- $\vec{E} \parallel$ feltlinjene
- feltstyrken $E = |\vec{E}|$ prop. med feltlinjetettheten (dvs antall feltlinjer som krysser en flate, pr flateenhet)

Eks: Punktladning q



$$\left. \begin{array}{l} \text{Feltlinjetetthet p\aa kuleskallet: } \frac{N}{A} = \frac{N}{4\pi r^2} \sim \frac{1}{r^2} \\ \text{Feltstyrke } \text{---"---} = E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sim \frac{1}{r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{E \sim \frac{N}{A}}; \text{ OK!}$$

Negativ ladning:



radielt innover

Med andre ord:

Feltlinjer starter p\aa \oplus , (evt. ∞ langt borte)
og ender p\aa \ominus . (---"---)

Elektrisk dipol. Dipolmoment [TM 21.4; LHL 19.10] (72)

[YF 21.7]

Veldig viktig:

De fleste molekyler er dipoler. (H_2O etc.)

Alle molekyler (og atomer) blir dipoler i ytre \vec{E} -felt.

\Rightarrow relevant for å forstå materialers elektriske egenskaper.

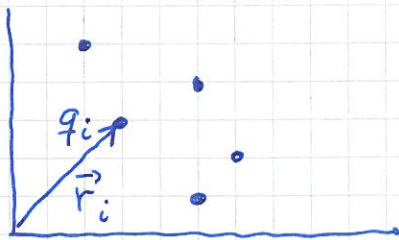
Enkleste dipol:

To punktladninger, q og $-q$, i innbyrdes avstand d :



Dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$ (Netto ladd: $Q = q - q = 0$)

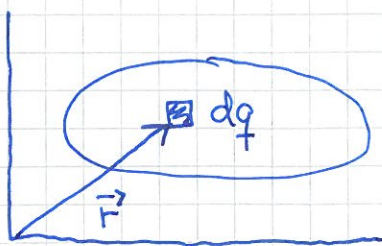
Hvis flere punktladninger:



$$\vec{p} = \sum_i \vec{r}_i q_i \quad (Q = \sum_i q_i = 0)$$

$$[\text{Jf CM i MekFys: } \vec{R}_{\text{cm}} = \sum_i \vec{r}_i m_i / M]$$

Hvis kontinuerlig ladningsfordeling:

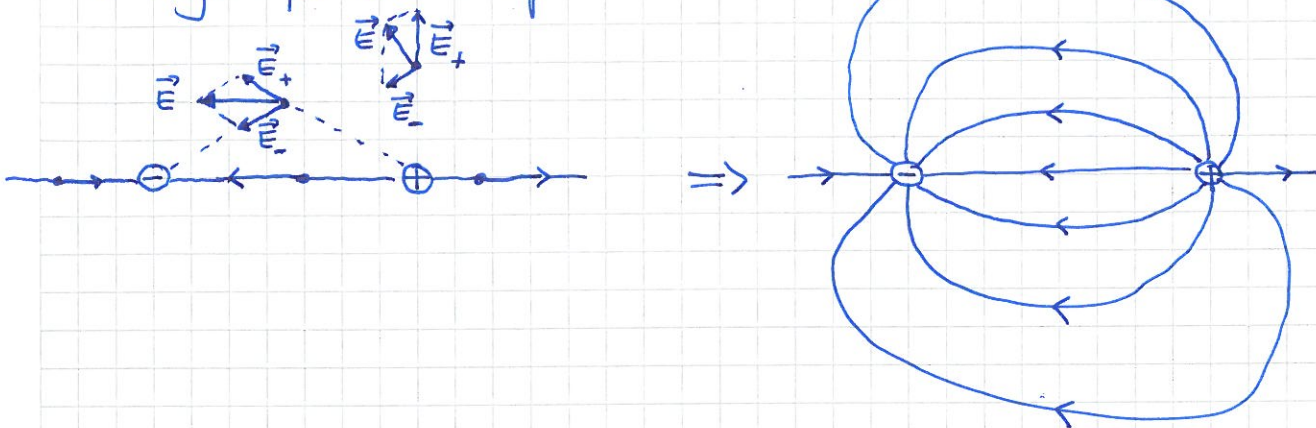


$$\vec{p} = \int \vec{r} dq$$

$$(Q = \int dq = 0)$$

Enhet for dipolmoment: $[p] = [q \cdot r] = C \cdot m$

Feltlinjer for enkel dipol:



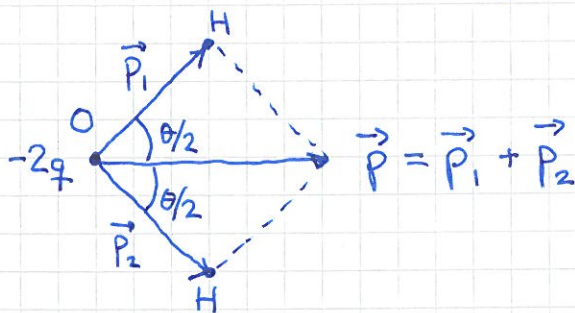
Eks: H_2O . $\vec{p} = ?$

Løsn:



$$\left. \begin{aligned} d &= 0.96 \text{ \AA} \\ \theta &= 104.5^\circ \end{aligned} \right\} \text{exp.}$$

Modell med punktladninger:



$q \sim 0.4e$
 (modell; estimat;
 har egentlig en
 kontinuerlig fordelet
 "sky" av "elektronetthet"
 i hele molekylet)

Dermed: $p = 2qd \cos \frac{\theta}{2}$
 $= 2 \cdot 0.4 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot 0.96 \cdot 10^{-10} m \cdot \cos 52.25^\circ$
 $\approx \underline{7.5 \cdot 10^{-30} C \cdot m}$

(Eksperimentet gir ca $6.2 \cdot 10^{-30} C \cdot m$)

Eks: "Stardipol"

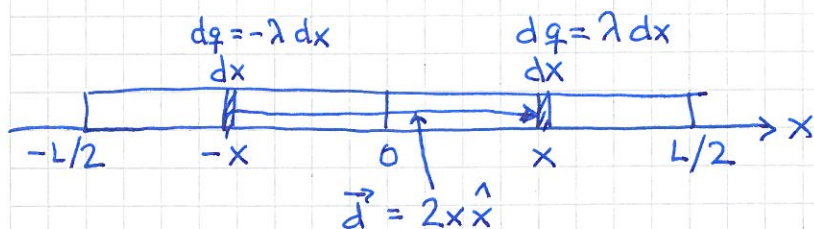
(74)



$\pm \lambda =$ ladning pr lengdeenhet

Bestem dipolmomentet p .

Løsning: Legg f.eks. staven langs x -aksen



Ladningsparet $\pm dq = \pm \lambda dx$ i innbyrdes avstand $2x \hat{x}$ har dipolmoment $d\vec{p} = \lambda dx \cdot 2x \hat{x}$

\Rightarrow Hele staven:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \int d\vec{p} = \int_0^{L/2} \lambda dx \cdot 2x \hat{x} = 2\lambda \hat{x} \int_0^{L/2} x dx \\ &= 2\lambda \hat{x} \left| \frac{1}{2} x^2 \right|_0^{L/2} = \underline{\underline{\frac{1}{4} \lambda L^2 \hat{x}}}\end{aligned}$$

Sjekk enheten:

$$[p] = [\lambda L \cdot L] = \left(\frac{C}{m} \cdot m\right) \cdot m = C \cdot m, \quad \text{OK!}$$

Elektrisk potensial

[TM 23; LHL 19.9]
[YF 23.2]

(75)

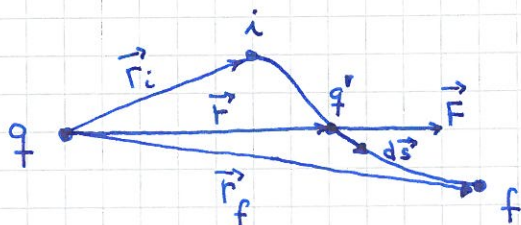
Coulombkraften $\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$



har samme form som tyngdekraften,

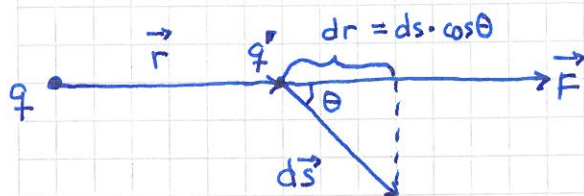
og er dermed konservativ, $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ (se s. 19).

Potensiell energi for q' i det elektriske feltet fra q :



$$\Delta U = U_f - U_i = - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (s.20)$$

= endring i pot. energi når q' flyttes fra i til f (q står fast)



$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos\theta = F \cdot dr$$

$$\Rightarrow \Delta U = - \int_{r_i}^{r_f} \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_f} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_i} = U_f - U_i$$

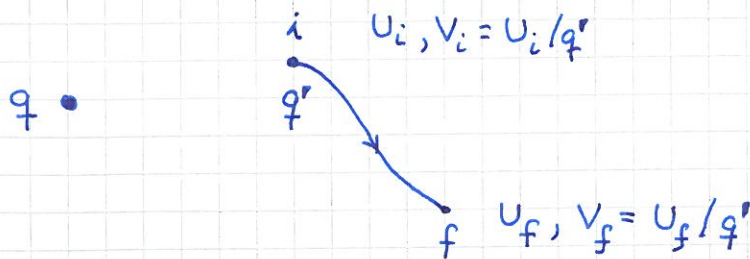
Fra før: $\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q'$

Tilsvarende defineres potensialet V :

$$V \stackrel{\text{def}}{=} U/q'$$

Dvs: elektrisk potensial $V = \text{pot. energi } U \text{ pr ladningsenhet}$

SI-enhet: $[V] = [U/q] = J/C = V$ (volt)



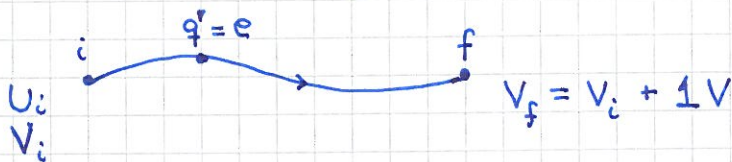
$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{U_f - U_i}{q'} = - \int_i^f \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{q'} = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\boxed{\Delta V = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \text{potensialforskjellen mellom } i \text{ og } f$$

\Rightarrow Alternativ enhet for el. felt: $[E] = [\Delta V/\Delta s] = \underline{V/m}$

Energienheten elektronvolt, eV: (Nyttig i fysikk.)

Se på elementær ladning som flyttes fra i til f :



Endringen i pot. energi blir:

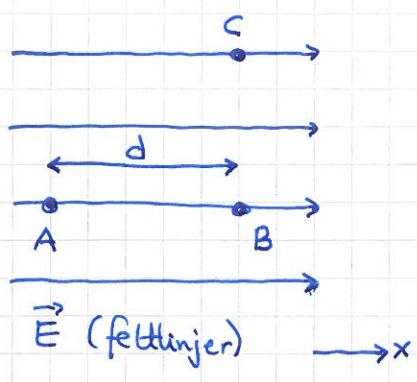
$$\Delta U = U_f - U_i = V_f \cdot e - V_i \cdot e = 1V \cdot e = \underline{\underline{1eV}}$$

$$1eV = \underbrace{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}_e \cdot \underbrace{1 \text{ J/C}}_{V \text{ (volt)}} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Eks: LHC ved CERN akselererte i 2012 protoner opp til energi $4 \text{ TeV} = 4 \cdot 10^{12} \text{ eV}$, for å produsere Higgs-partikkelen. Protonets hastighet er da $v \approx c - 8 \text{ m/s}$!

[Der $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =$ lysets hastighet i vakuum]

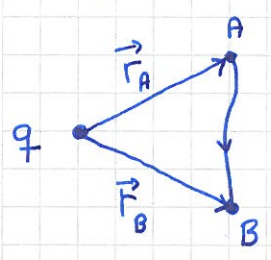
Eks: ΔV i uniformt E -felt



$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E \int_{x_A}^{x_B} dx = \underline{\underline{-E \cdot d}}$$

$$V_C - V_B = - \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{da } \vec{E} \perp d\vec{s})$$

Eks: $V(r)$ for punktladning [TM 23.2; LHL 19.9] [YF 23.2]



Med q' (som flyttes fra A til B):

$$\Delta U = U_B - U_A = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

$$\Rightarrow \Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

(uafhængig af q' , som ventet. Kjekt!)

Velg "referansested" A ∞ langt borte: $r_A \rightarrow \infty \Rightarrow V_A \rightarrow 0$
 Og sett $r_B = r$:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Coulombpotensialet: Potensialet i afstand r fra punktladning q

Generalisering til flere punktladninger, evt. kontinuert ladn.fordeling:



$$\begin{aligned} \text{Potensial i P: } V_P &= - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^P (\sum_i \vec{E}_i) \cdot d\vec{s} = \sum_i \left(- \int_{\infty}^P \vec{E}_i \cdot d\vec{s} \right) \\ &= \sum_i V_P^i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \end{aligned}$$

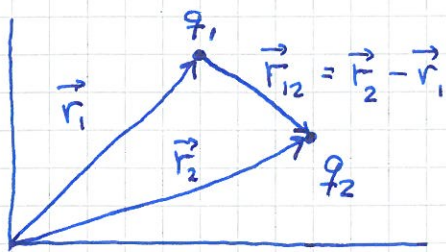
Kontinuert fordeling: $q_i \rightarrow \Delta q_i \rightarrow dq$; $\sum_i \rightarrow \int \Rightarrow V(r) = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$

Potensiell energi for l adningssystem

[TM 23.6; LHL 19.9
20.3]

(78)

[YF 23.1]



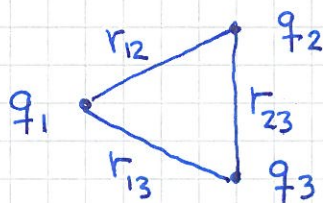
Potensial fra q_1 i \vec{r}_2 : $V_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

----- " ----- q_2 i \vec{r}_1 : $V_2(\vec{r}_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

Pot. energi for l adningsparet : $U_{12} = q_2 V_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

ert: ----- " ----- : $U_{21} = q_1 V_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = U_{12}$

Hvis flere l adninger :



L adningene vekselvirker parvis.

⇒ Total potensiell energi, relativt "referansesystemet" der alle q_1, q_2, \dots, q_n er ∞ langt fra hverandre (og dermed har null pot. energi) :

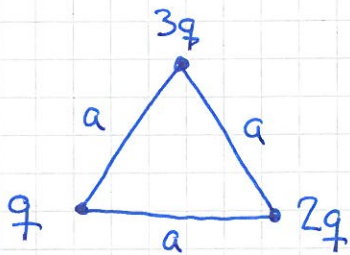
$$U = U_{12} + U_{13} + \dots + U_{1n} + U_{23} + \dots + U_{2n} + \dots + U_{n-1,n}$$
$$= \sum_{i < j} U_{ij} = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

[Her betyr $\sum_{i < j}$ dobbeltsummen $\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i) \\ (j > i)}}^n$]

U for ladningssystem [TM 23.6; LHL 19.9, 20.3] [YF 23.1] (79)

$$\text{Fra rest: } U = \sum_{i < j} U_{ij} = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Eks:



$$q = e, \quad a = 4 \text{ \AA}$$

Finn U i J og eV.

$$\text{Løsn: } U = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \{1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3\} = \frac{11 q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot 11 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2 / 4 \cdot 10^{-10} \text{ J} = \underline{\underline{6.3 \cdot 10^{-18} \text{ J}}}$$

$$= \frac{6.3 \cdot 10^{-18} \text{ J}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} \approx \underline{\underline{40 \text{ eV}}}$$

Beregning av \vec{E} fra V [TM 23.3; LHL 19.9] [YF 23.5]

$$V = V(\vec{r}) = V(x, y, z)$$

$$\Rightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

(et såkalt totalt differensial, se Matematikk 2)

Med

$$\nabla V = \hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} = \text{gradienten til } V$$

$$\text{og } d\vec{s} = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz = \text{veielementet}$$

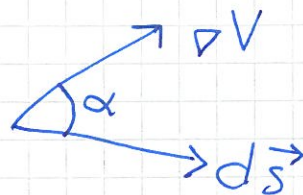
kan vi skrive:

$$\boxed{dV = \nabla V \cdot d\vec{s}}$$

Hva betyr ∇V ?

80

$$dV = |\nabla V| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos \alpha$$



\Rightarrow max verdi på dV når forflytningen er i en retning slik at $d\vec{s} \parallel \nabla V$ (dvs $\alpha=0$)

$\Rightarrow \nabla V$ er en vektor som peker i den retningen som V øker raskest.

Og absoluttverdien av ∇V er "hellingen", dvs "stigningstallet", dvs endringen i V pr lengdeenhet

Fra før har vi: $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$

Dermed må vi kunne skrive:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

Dvs: $E_x = -\partial V / \partial x$ etc.

Dermed: $\vec{F} = q' \vec{E} = -q' \nabla V = \underline{\underline{-\nabla U}}$

(siden $V = U/q'$)

Ekvipotensialflater [TM 23.5; LHL 19.11] [YF 23.4] (81)

= flater med $V = \text{konst.}$ (evt. kurver med $V = \text{konst.}$)

Dvs: $dV = 0$



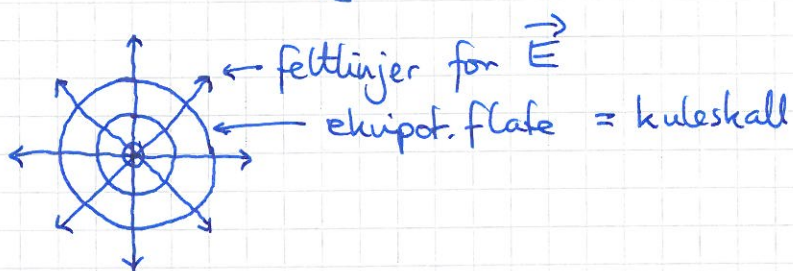
$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$



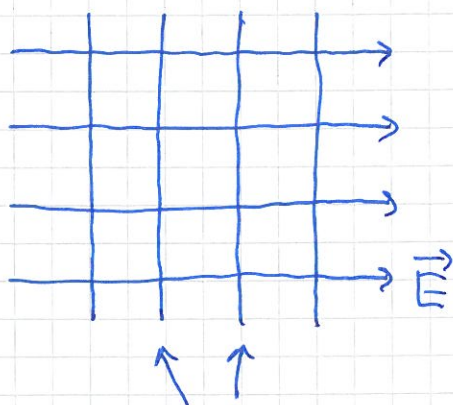
$\vec{E} \perp d\vec{s}$ når forflytningen $d\vec{s}$ foregår på en ekvipot. flate

\Rightarrow $\vec{E} \perp$ ekvipotensialflater

Eks 1: Punktladning

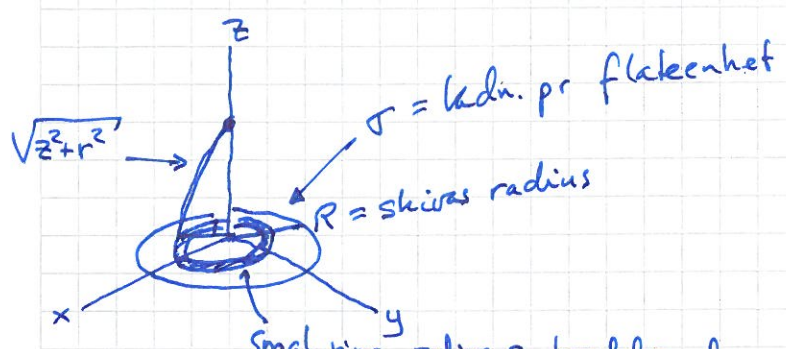


Eks 2: Uniformt \vec{E} -felt



ekvipot. flater = plan $\perp \vec{E}$

Eks: $V(z)$ og $\vec{E}(z)$ på aksen til uniformt ladet skive
(Jf. øving 8)



Smal ring, radius r , bredde dr , areal $dA = 2\pi r \cdot dr$,
ladning $dq = \sigma dA = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$, afstand $\sqrt{z^2 + r^2}$ til
punkt på z -aksen, bidrag $dV = dq / 4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}$ til
potensialet $V(z)$.

$$\Rightarrow V(z) = \int dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^R$$
$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ \sqrt{z^2 + R^2} - z \right\}$$

I grensen $z \ll R$ (dvs stort plan): $\sqrt{z^2 + R^2} \approx R$

$$\Rightarrow V(z) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R - z)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = -\hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \approx \underline{\underline{\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}}} \quad (\text{som funnet i øving 8})$$

Materialers elektriske egenskaper

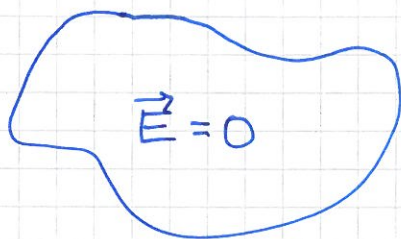
Metaller/Ledere: TM 21.2, 22.5; LHL 19.8 (YF 22.5)

Isolatorer/Dielektrika: TM 24.4, 24.5; LHL 20.5 (YF 24.4, 24.5)

Metaller/Ledere

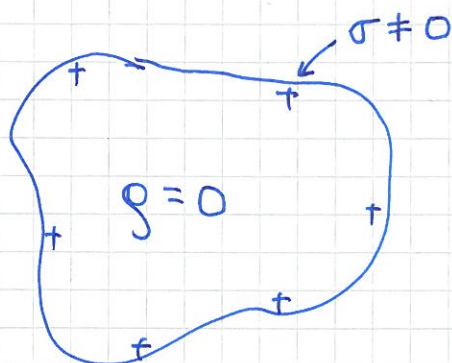
Har frie (mobile) ladninger som kan bevege seg i metallet hvis de utsettes for krefter.

Elektrostatiske egenskaper for metaller:



Inni metallet er $\vec{E} = 0$

(Hvis ikke \vec{E} er lik null, er heller ikke kraften $\vec{F} = q\vec{E}$ lik null på en fri ladning q , og da har vi ikke likevekt!)

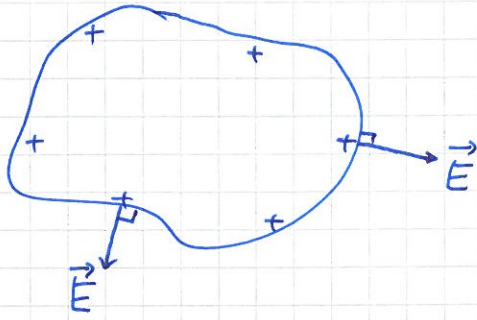


Hvis metallbiten har netto ladning, må all netto ladning ligge på overflaten.

(Forklares ofte med at enkeltladningene frastøter hverandre, og derfor velger å ligge på overflaten, "lengst mulig unna hverandre". Dette er bare delvis riktig! At ledningsfaktoren $\rho = 0$ overalt inni metallet skyldes at $F \sim 1/r^2$ (og ikke f.eks. $1/r^{1.5}$ e.l.))

På metallens overflate er $\vec{E} \perp$ overflaten.

(84)



(Hvis \vec{E} hadde komponent $E_{||}$ tangentielt til overflaten, ville $F_{||} \neq 0$ på frie ladninger på overflaten. Men da har vi ikke lenger likevekt, og ladninger ville flytte på seg, inntil $E_{||} = 0$.)

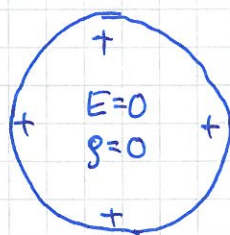
[Det kan vises at $|\vec{E}| = \sigma / \epsilon_0$ på metallens overflate når den lokale ladning pr flateenhet er σ . Vi beviser ikke dette her.]

På og inni en metallbit er $V = \text{konstant}$, dvs en metallbit er et equipotensial i elektrostatisk likevekt.

($dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$; inni er $\vec{E} = 0$, på overflaten er $\vec{E} \perp d\vec{s}$ når $d\vec{s}$ er "i overflaten". Uansett blir $dV = 0$, dvs $V = \text{konst.}$)

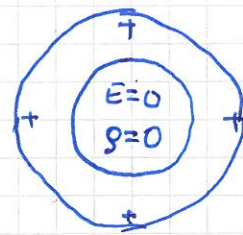
Leder med hulrom har $E = 0$ i hulrommet, og all netto ladning på ytre overflate.

Bevis:

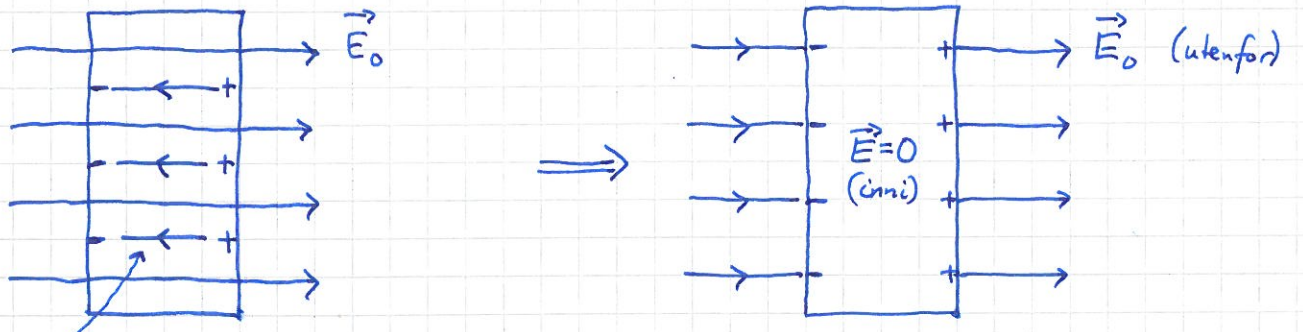


Komplett metall

Tabort
nøytral bit
inn; gjør
da ingen endring,
verken på \vec{E} eller
 ρ



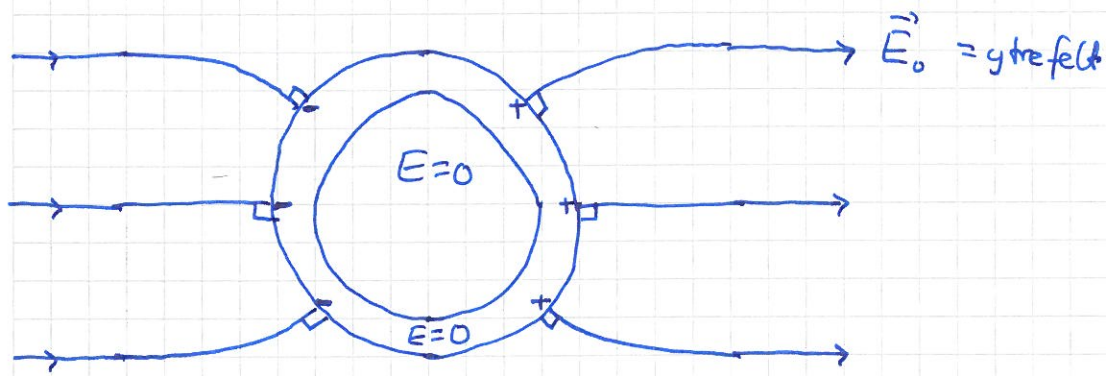
Leder i ytre felt \vec{E}_0 :



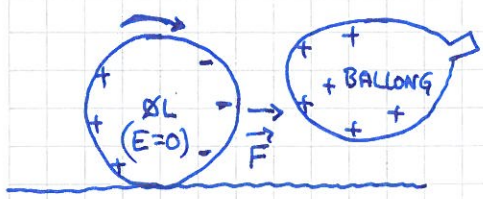
Feltlinjer for induert felt
 $\vec{E}_{ind} = -\vec{E}_0$ inni
 lederen

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ind} = 0 \text{ inni lederen}$$

Faradaybur: Leder med hulrom



Demo med ølboks (tom!) og ballong:



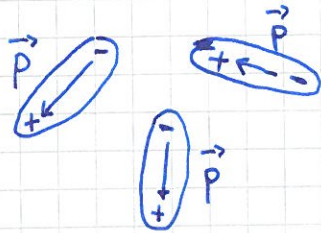
- Gnist ballong og tilfører den netto ladning.
- \vec{E} -feltet fra ladd ballong (anta f.eks. pos. ladning) tiltrekker elektronene i metallet og inducerer overflateledning som vist i figuren.
- $E=0$ inni ølboksen (Faradaybur!).
- Kortest avstand fra pos. ladd, på ballongen til negativ ladd, på boksen
 \Rightarrow netto tiltrekning
 \Rightarrow boksen ruller mot høyre!

Isolatorer / Dielektrika

[TM 24.4, 24.5; LHL 20.5] [YF 24.4, 24.5] (86)

Har ikke frie ladninger, men polariseres av et ytre felt \vec{E}_0 :

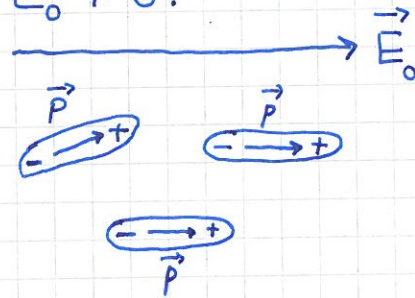
$$E_0 = 0:$$



$$\sum_i \vec{P}_i \approx 0$$

(Molekylære dipoler med dipolmoment \vec{p} . Vorden; \vec{p} i tilfeldige retninger.)

$$\vec{E}_0 \neq 0:$$

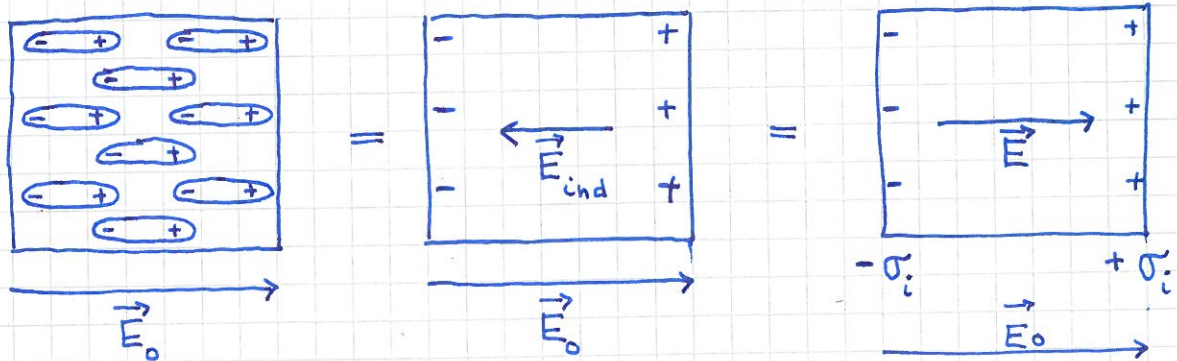


$$\sum_i \vec{P}_i \neq 0$$

(Molekylære dipoler med tendens til orientering slik at \vec{p} peker i samme retning som \vec{E}_0 .)

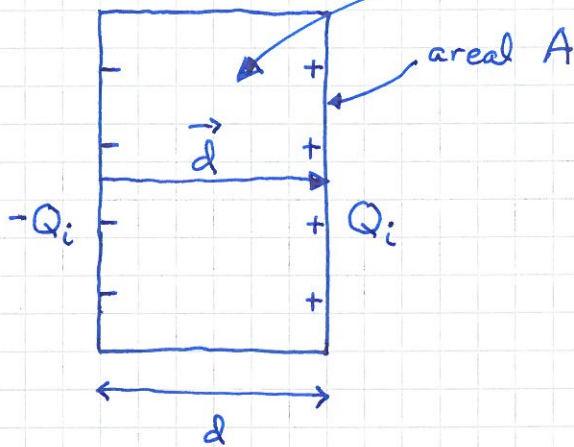
[Jf. øving 9]

Netto makroskopisk effekt av ytre felt \vec{E}_0 :



- ytre $\vec{E}_0 \Rightarrow$ innretning av dipoler ("polarisering")
- induert nettoladning på dielektrikumets overflate;
ingen nettoladning inni dielektrikumet
- induert nettoladning ($\pm \sigma_i$ pr flateenhet) gir opphav til induert felt \vec{E}_{ind} inni dielektrikumet, motsatt retning det ytre feltet, men $|\vec{E}_{ind}| < |\vec{E}_0|$ [Jf metall, der $|\vec{E}_{ind}| = |\vec{E}_0|$]
- får svekket feltet inni diel: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ind}$; $|\vec{E}| = |\vec{E}_0| - |\vec{E}_{ind}|$

Polarisering \vec{P} :



dielektrikum med volum $V = A \cdot d$

Dette er en dipol, med dipolmoment (s. 72)

$$\vec{p} = Q_i \vec{d},$$

ders

$$p = |\vec{p}| = \sigma_i A d = \sigma_i \cdot V$$

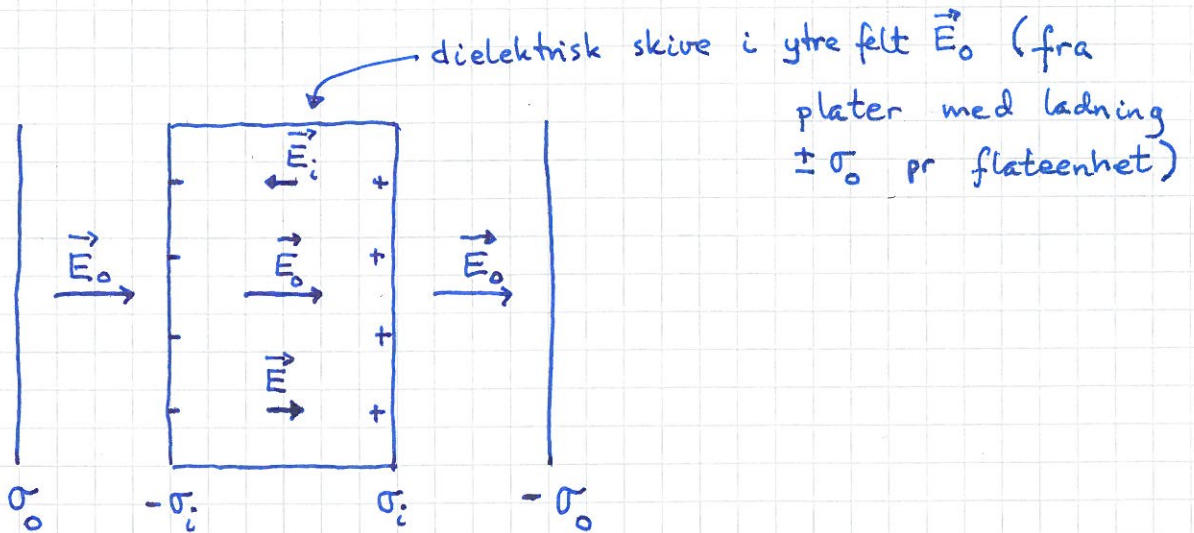
$\vec{P} \stackrel{\text{def}}{=} \text{dipolmoment pr volumenhet}$:

$$\vec{P} = \vec{p} / V$$

$\Rightarrow P = |\vec{P}| = \sigma_i = \text{indusert overflateledning pr flateenhet}$

Enhet: $[P] = [p/V] = \text{C} \cdot \text{m} / \text{m}^3 = \underline{\text{C} / \text{m}^2}$ (= $[\sigma]$; ok!)

Indusert elektrisk felt \vec{E}_i :



dielektrisk skive i ytre felt \vec{E}_0 (fra plater med ladning $\pm \sigma_0$ pr flateenhet)

- Felt fra ett stort uniformt ladet plan: $\sigma / 2\epsilon_0$ (s. 82 og Øving 8)
- Felt mellom to store plan med ladning $\pm \sigma$ pr flateenhet: σ / ϵ_0 (SPP!)
- Felt utenfor $\text{---} \parallel \text{---}$: 0 (SPP!)
- Dermed: $E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$, $E_i = \sigma_i / \epsilon_0$
- Totalt felt inni dielektrisk skive: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$, $E = E_0 - E_i = \sigma_0 / \epsilon_0 - \sigma_i / \epsilon_0$

Lineær respons:

(88)

Med "ikke for sterkt" ytre felt \vec{E}_0 er polariseringen \vec{P} proporsjonal med \vec{E}_0 , og dermed også prop. med \vec{E} :

$$\boxed{\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}} \quad \text{Lineær respons}$$

χ_e = isolatorens elektriske susceptibilitet; $[\chi_e] = 1$ (dim.løs)

Dermed:

$$E = E_0 - E_i \quad \begin{matrix} P = \sigma_i \\ \implies \end{matrix} \quad \frac{\sigma_i}{\chi_e \epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\epsilon_0} \implies \sigma_i = \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \sigma_0$$

$$\implies \underline{E} = \frac{1}{\chi_e \epsilon_0} \sigma_i = \frac{1}{\chi_e \epsilon_0} \cdot \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \sigma_0 = \frac{1}{1 + \chi_e} \cdot \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \underline{\frac{1}{\epsilon_r} E_0}$$

Dvs: Feltet inni isolatoren, E , er svekket med faktoren $1/\epsilon_r$, der

$\epsilon_r \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \chi_e =$ isolatorens relative permittivitet
(evt. dielektrisitetskonstant); $[\epsilon_r] = 1$ (dim.løs)

[TM: dielectric constant ϵ ; LHL: ϵ]

Kommentarer:

- Vakuum: $\epsilon_r = 1$. Tørr luft: $\epsilon_r = 1.00054$. Plast: $\epsilon_r \sim 2-6$.
Rent vann: $\epsilon_r = 80$. Perfekt metall: $\epsilon_r \rightarrow \infty \implies E = E_0 / \epsilon_r = 0$, $\sigma \neq 0$!
- Kan skrive $E = \sigma_0 / \epsilon$, med $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 =$ mediets permittivitet.
Dermed blir vakuum (= tomt rom) et "medium", med permittivitet $\epsilon = 1 \cdot \epsilon_0 = \epsilon_0$.
- Lysets hastighet i et stoff bestemmes av stoffets elektriske og

magnetiske egenskaper. I vakuum: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$ (89)

[$\mu_0 =$ vakuumpermeabiliteten $= 4\pi \cdot 10^{-7}$; mer om det senere]

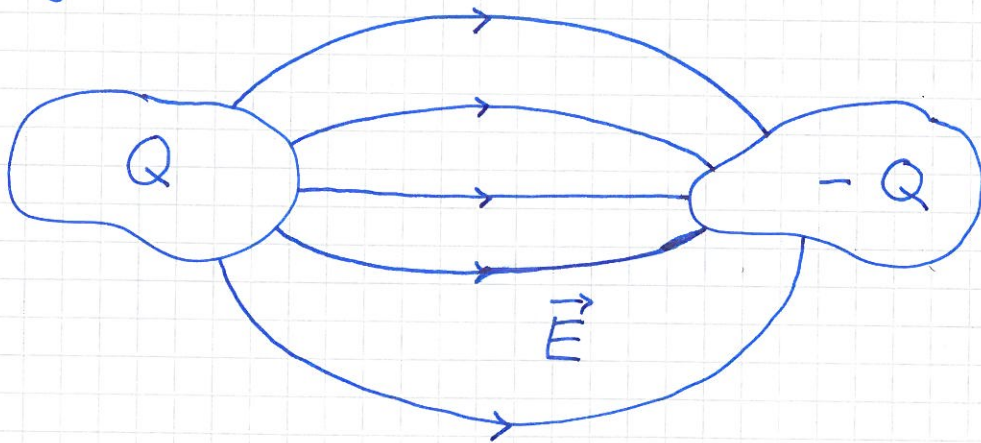
I isolator med permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 > \epsilon_0$ (og $\mu = \mu_0$)

blir lysfarten $v = 1/\sqrt{\epsilon \cdot \mu} = 1/\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0} = c/\sqrt{\epsilon_r} < c$,
dvs redusert med faktoren $1/\sqrt{\epsilon_r}$.

[Brytningsindeksen: $n = \sqrt{\epsilon_r}$ for umagnetisk stoff med $\mu = \mu_0$]

Kondensator og kapasitans [TM 24; LHL 20] [YF 24]

en kondensator består av to adskilte ledere, med
ladning $\pm Q$:



Coulombs lov $\Rightarrow E$ prop. med Q

$$\Rightarrow V = V_+ - V_- = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$\Rightarrow V$ er også prop. med Q

Kondensatoren har kapasitans C , definert slik:

$$C = \frac{Q}{V}$$

($C > 0$ pr def.)

Enhet: $[C] = \frac{C}{V} = F$ (farad)

Merknader:

90

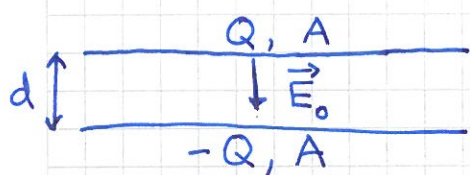
• Kretssymbol: 

• Lagrer ladning og energi.

• Verdien på C avhenger av geometri (utforming) og type medium mellom lederne. C er uavhengig av Q og V .

• Beregning av C : Anta ladning $\pm Q$ på de to lederne. Regn ut $V = V_+ - V_- (= -\int \vec{E} \cdot d\vec{s})$. Da er $C = Q/V$.

Eks 1: Platekondensator (luftfylt)

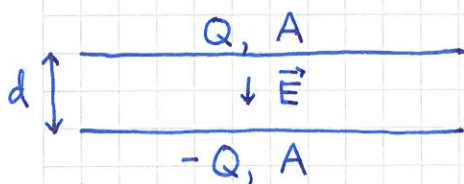


$d \ll \sqrt{A} \Rightarrow$ konstant \vec{E}_0 mellom platene,
 $E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0 = Q / A \epsilon_0$

$$V = E_0 \cdot d = (Q / A \epsilon_0) \cdot d \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}}{\quad}$$

(medium) (geometri)

Eks 2: Platekondensator fylt med isolator (dielektrikum)



$$E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0 = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Q/A}{\epsilon_0}$$

$$V = E \cdot d = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Q \cdot d}{A \cdot \epsilon_0} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}}{\quad}$$

(medium) (geometri)

Dvs: C er økt med faktor ϵ_r

[Alternativ enhet for permittivitet: $[\epsilon] = [C \cdot d / A] = F \cdot m / m^2 = F/m$]

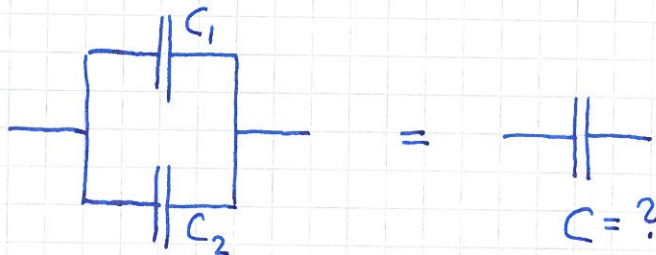
Kobling av flere kapasitanser [TM 24.3; LHL 20.2] [YF 24.2] (91)

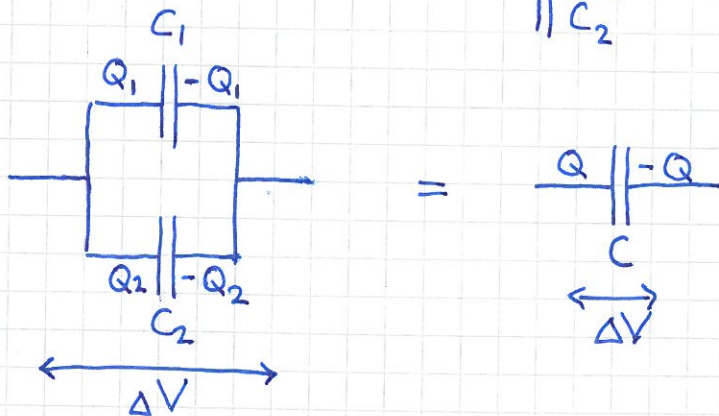
Seniekobling: 



$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = \Delta V \Rightarrow \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

N stk i serie:
$$\boxed{C^{-1} = \sum_{j=1}^N C_j^{-1}}$$

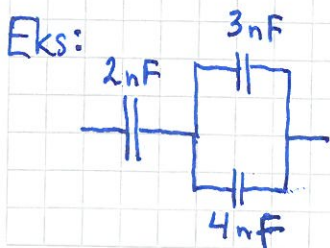
Parallellkobling: 



$$Q_1 + Q_2 = Q, \quad \Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

$$\Rightarrow C_1 \Delta V + C_2 \Delta V = C \Delta V \Rightarrow \boxed{C = C_1 + C_2}$$

N stk i parallell:
$$\boxed{C = \sum_{j=1}^N C_j}$$

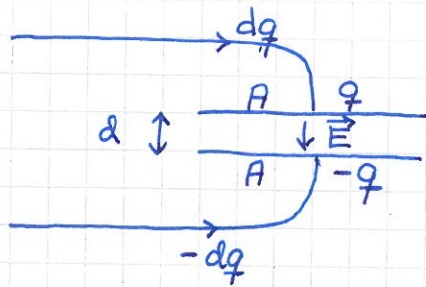


Total kapasitans:
$$C = \left\{ \frac{1}{2 \text{ nF}} + \frac{1}{3 \text{ nF} + 4 \text{ nF}} \right\}^{-1} = \left(\frac{7+2}{2 \cdot 7} \right)^{-1} \text{ nF}$$

$$= \underline{\underline{14/9 \text{ nF}}}$$

Energi lagret i elektrisk felt [TM 24.2; LHL 20.4] [YF 24.3] (92)

Pot. energi lagret i \vec{E} -feltet i kondensator må tilsvare arbeidet påkrevd for å lade opp kondensatoren til ladning $\pm Q$:



$\downarrow v(q) = q/C =$ potensialforskjellen mellom platene når ladn. er $\pm q$

Økning fra $\pm q$ til $\pm(q+dq)$ tilsvarer at vi flytter dq fra negativt til positivt ladd plate, krever et arbeid

$dW = v(q) dq$, og gir økning $dU = v(q) dq$ i pot. energi

\Rightarrow Opplading, fra $q=0$ til $q=Q$, gir pot. energi

$$U = \int dU = \int_0^Q v(q) dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \underline{\underline{\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}}$$

Med $C = Q/V$: $U = Q^2/2C = QV/2 = CV^2/2$

Fra s. 90, Eks 1: $C = \epsilon_0 A/d$, $V = E \cdot d$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} \cdot (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot \underbrace{(A \cdot d)}$$

= volumet mellom platene (der $E \neq 0$)

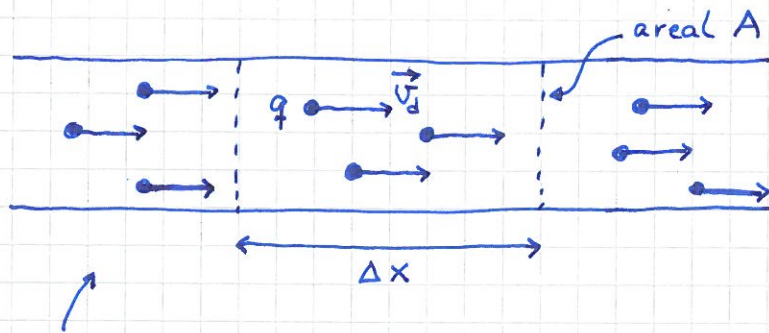
\Rightarrow Energi pr volumenhet i elektrisk felt er:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

(som gjelder generelt)

Elektrisk strøm [TM 25; LHL 21,22] [YF 25,26] (93)

Strøm I og strømteethet \vec{j} [TM 25.1; LHL 21.1] [YF 25.1]



Leder med frie (mobile) ladninger q med midlere driftshastighet \vec{v}_d langs lederen.

Elektrisk strømstyrke:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dQ}{dt} = \text{ladning som passerer et tverrsnitt av lederen (areal } A) \text{ pr tidsenhet}$$

$$[I] = C/s = A \text{ (ampere)}$$

$$\Delta N = \text{antall mobile ladn. i volum } \Delta V = A \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow n = \frac{\Delta N}{\Delta V} = \text{antall mobile ladn. pr volumenhet; } [n] = m^{-3}$$

$$\Rightarrow \Delta Q = q \cdot \Delta N = nq \Delta V = nqA \Delta x = \text{mobil ladn. i } \Delta V$$

$$\Rightarrow I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqA \frac{\Delta x}{\Delta t} = nqA v_d$$

[På tiden $\Delta t = \frac{\Delta x}{v_d}$ passerer alle ΔN (i snitt) (som er i ΔV) flaten med areal A .]

Strømteethet: $\vec{j} = I/A = \text{strøm pr flateenhet; } [j] = A/m^2$

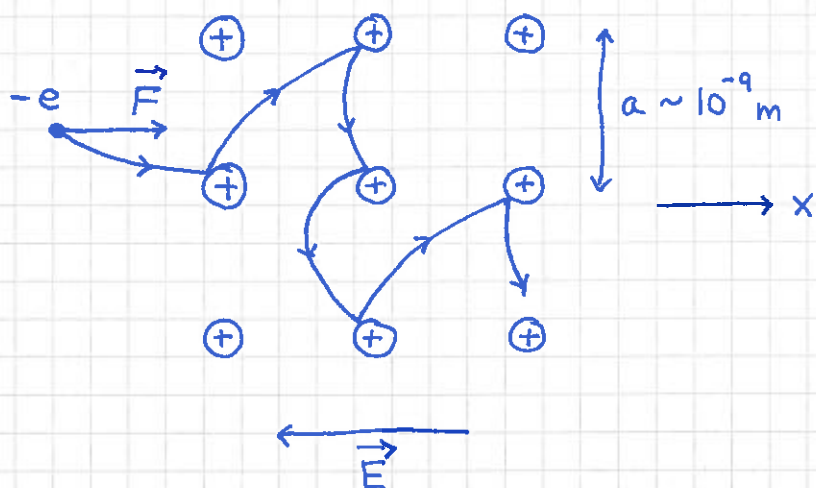
$$\Rightarrow \vec{j} = nq\vec{v}_d \Rightarrow \boxed{\vec{j} = nq\vec{v}_d}$$

$$I \text{ metall: } q = -e \Rightarrow \vec{j} = -ne\vec{v}_d \Rightarrow$$



Ohms lov [TM 25.2, 38.2; LHL 21.2, 21.4] [YF 25.2, 25.6] (94)

Enkel mikroskopisk modell: [P.K. Drude, 1900]



Fri elektroner kolliderer (ustanselig!) på sin vei gjennom metallet.

⊕ = gitter av ioner

Partikkelhastighet v_T ved temperatur T :

$$\frac{1}{2} m_e v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K}}{9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \sim 10^5 \text{ m/s}$$

Midlere tid τ mellom kollisjoner (for gitt elektron):

$$\tau \sim a/v_T \sim 10^{-9} \text{ m} / 10^5 \text{ m/s} = 10^{-14} \text{ s}$$

Anta $\langle v_x \rangle = 0$ etter kollisjon, dvs tilfeldig retning etter kollisjon.

Newtons 2. lov:

$$-eE_x = m_e \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow \int_0^{v_x} dv_x = -\frac{eE_x}{m_e} \int_0^\tau dt \Rightarrow \langle v_x \rangle \approx -\frac{e\tau}{m_e} E_x$$

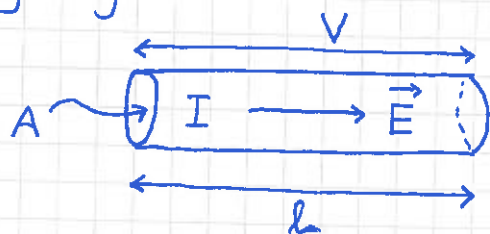
$$\Rightarrow \text{Driftshastighet langs } (-) \vec{E}: \vec{v}_d = -\frac{e\tau}{m_e} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{Strømtetthet: } \vec{j} = -ne\vec{v}_d = \frac{ne^2\tau}{m_e} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{Ohms lov: } \boxed{\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}} \quad \leftarrow \text{"Drude konduktivitet"}$$

med $\sigma = ne^2\tau/m_e = \underline{\text{elektrisk ledningsevne}}$ (konduktivitet)

For leder (eller motstand!) med tverrsnitt A og lengde l :



$$V = E \cdot l \quad [\text{s. 77}; V = \text{pot. forskjell}]$$

$$I = j \cdot A \quad [\text{s. 93}]$$

$$j = \sigma E \Rightarrow \frac{I}{A} = \sigma \frac{V}{l} \Rightarrow I = G \cdot V$$

med $G = \sigma A / l =$ lederens konduktans

$$\Rightarrow \boxed{V = R \cdot I}$$

med $R = G^{-1} = \frac{l}{\sigma \cdot A} =$ lederens resistans (motstand)

Evt. $R = g \cdot \frac{l}{A}$, med $g = \sigma^{-1} =$ ledermaterialets resistivitet

Enheter:

$$[R] = V/A = \Omega \text{ (ohm)}$$

$$[G] = \Omega^{-1}$$

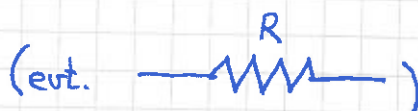
$$[g] = \Omega \cdot m$$

$$[\sigma] = \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$$

Merk:

σ og g er materielspesifikke størrelser, mens G og R dessuten avhenger av lederens dimensjoner

Kretssymbol for motstand:



Eks: Anslå resistiviteten ρ i sølv (Ag)

(96)

Løsn: Volum pr Ag-atom er ca $(4\text{\AA})^3 \sim 6 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$.

Med 1 fritt elektron pr atom blir tettheten av frie elektroner dermed $n \sim 2 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

Med elektr. ledneene fra s. 94:

$$\sigma = ne^2 \tau / m_e \sim 2 \cdot 10^{28} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 10^{-14} / 10^{-30} \\ \sim 5 \cdot 10^6 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$\Rightarrow \rho = 1/\sigma \sim 2 \cdot 10^{-7} \text{ } \Omega \text{ m}$$

[Eksperimentelt er $\rho_{\text{Ag}} \approx 1.5 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega \text{ m}$ ved 0°C]

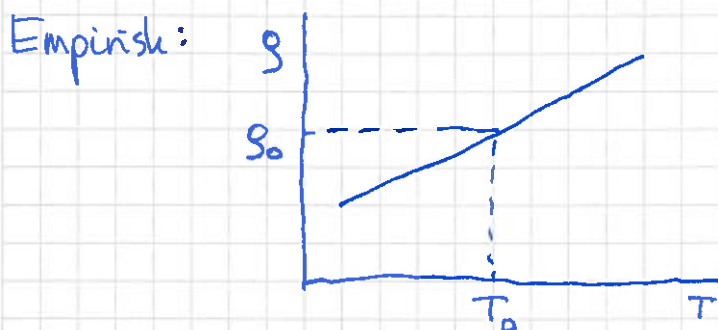
Noen omtrentlige tallverdier for ulike materialtyper:

<u>Materiale</u>	<u>ρ ($\Omega \text{ m}$)</u>
Gode ledere (Metaller)	10^{-8}
Isolatorer (Dårlige ledere)	$10^{10} - 10^{14}$
Perfekt leder	0
Perfekt isolator	∞

Temperaturhengigheten til ρ [YF 25.2; TM 25.2; LHL 21.2+21.5]

Metaller:

Økt $T \Rightarrow$ Flere kollisjoner \Rightarrow Økt ρ



$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$$

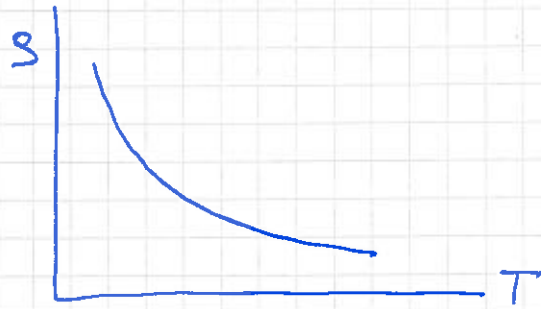
$$\alpha_{\text{Al}} = 0.004 \text{ K}^{-1}$$

($[T] = \text{K} = \text{kelvin}$)

Halvedere: [TM 38.6]

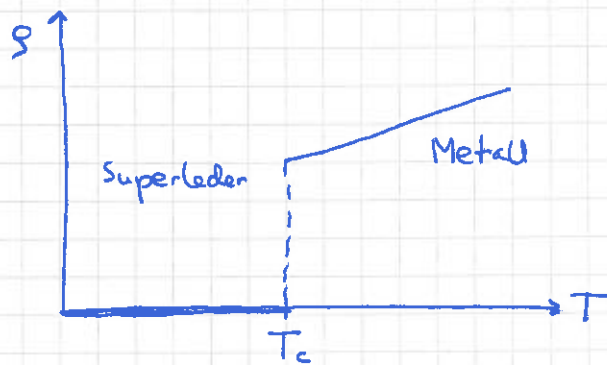
(97)

- Isolator ved $T=0$
- Økt $T \Rightarrow$ Flere mobile ladninger \Rightarrow Redusert ρ



Superledere: [TM 38.8]

- $\rho=0$ for $T < T_c =$ "kritisk temperatur"



H. Kammerlingh-Onnes (1911):

Kvikksølv (Hg), $T_c \approx 4.12$ K

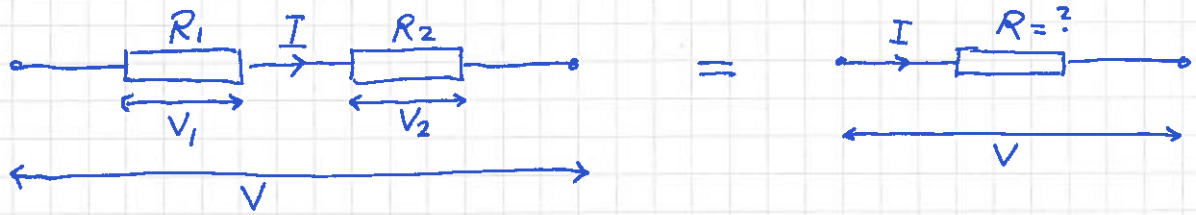
I dag: "High- T_c superconductivity"

T_c opp mot 130-140 K

for noen materialer

Kobling av flere motstander [TM 25.4; LHL 21.3] [YF 26.1] (98)

Seri kobling:



$$V = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I ; \quad V = \underline{R} I$$

$$\Rightarrow \boxed{R = R_1 + R_2}$$

$$\boxed{N \text{ stk i serie: } R = \sum_{j=1}^N R_j}$$

Parallellkobling:

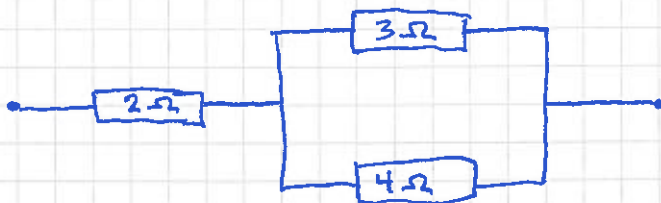


$$I = I_1 + I_2 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) ; \quad I = V \cdot \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

$$\boxed{N \text{ stk i parallell: } R^{-1} = \sum_{j=1}^N R_j^{-1}}$$

Eks:



Total motstand:

$$R = 2 \Omega + \left\{ \frac{1}{3 \Omega} + \frac{1}{4 \Omega} \right\}^{-1} = 2 \Omega + \left\{ \frac{4+3}{3 \cdot 4 \Omega} \right\}^{-1} = 2 \Omega + \frac{12}{7} \Omega$$
$$= \underline{\underline{\frac{26}{7} \Omega}}$$

Likestrømkretser [TM 25; LHL 22] [YF 26 (25)] (99)

Likespenningskilde:



Sørger for spenning (potensialforskjell)

$$\mathcal{E} = V_+ - V_-$$

mellom polene. \mathcal{E} er en såkalt elektromotorsk spenning (ems). \mathcal{E} representerer tilført energi pr ladningsenhet.

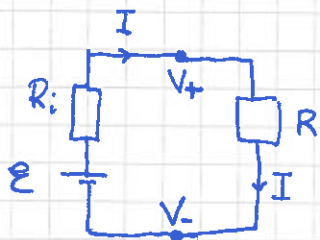
Eksempler på spenningskilder: kjemisk batteri, solcelle



R_i = indre motstand i spenningskilden

Ideell kilde har $R_i = 0$.

Eks: Reell kilde koblet til ytre motstand R (feks. lyspære)



$$\mathcal{E} = R_i I + R I$$

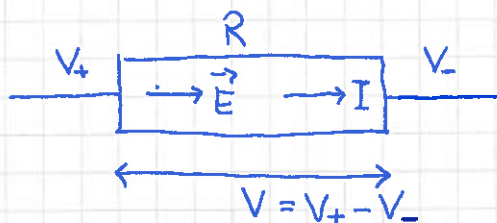
$$\Rightarrow \mathcal{E} - R_i I \text{ er spenningen } (V_+ - V_-)$$

som "leveres" av den reelle kilden

(dvs mindre enn \mathcal{E} hvis $I > 0$)

Elektrisk effekt [TM 25.3; LHL 22.2] [YF 25.5]

100



Effekttap: $\mathcal{P} = \frac{dU}{dt}$ = tapt pot. energi pr tidsenhet
når strømmen I går gjennom motstanden,
som har spenningen V mellom den ene og
den andre siden.

Spenningen / Potensialforskjellen V er pr def

$$V = \frac{dU}{dQ}$$

ders tapt pot. energi pr ladningsenhet. Med andre ord:

I løpet av tiden dt passerer en mengde ladning dQ et
tverrsnitt av lederen. På venstre side av motstanden går dQ
inn i motstanden ved potensialet V_+ , samtidig går dQ
ut av motstanden på høyre side, ved potensialet V_- .

Pot. energi for dQ som går inn er $V_+ \cdot dQ$, pot. energi for
 dQ som går ut er $V_- \cdot dQ$, så tapt pot. energi blir

$$dU = V_+ dQ - V_- dQ = V \cdot dQ$$

Dermed:

$$\mathcal{P} = \frac{dU}{dt} = \frac{V \cdot dQ}{dt} = \underline{\underline{V \cdot I}}$$

Energien tapes i motstanden pga kollisjoner (\Rightarrow varme!)

Med såkalt ohmsk motstand er $V = R \cdot I$ (Ohms lov),
da har vi alternative uttrykk:

$$\mathcal{P} = RI^2 \quad \text{ent.} \quad \mathcal{P} = V^2/R$$

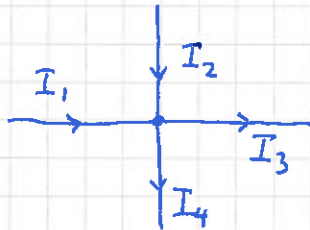
Kirchhoffs regler [TM 25.5; LHL 22.3] [YF 26.2] (101)

$$\sum_j I_j = 0 \quad \text{i alle knutepunkt}$$

(rett og sløtt pga ladningsbevarelse)

Kirchhoffs
strømregel /
knotepunktregel

Eks:



La oss velge positive I
inn mot et knutepunkt.

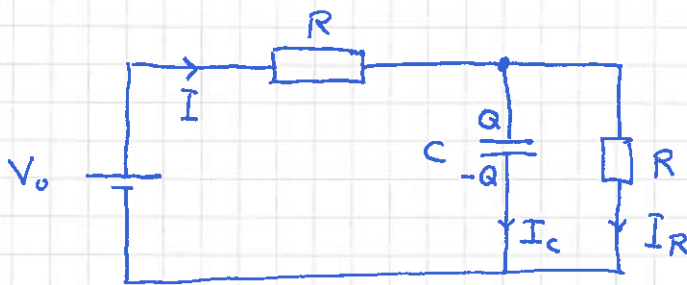
$$\Rightarrow I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

$$\sum \text{potensialendringer} = 0 \quad \text{for alle sløyfer}$$

(rett og sløtt pga energibevarelse)

Kirchhoffs spenningsregel / sløyferegul

Eks:



Ytre sløyfe: $+V_0 - RI - RI_R = 0$

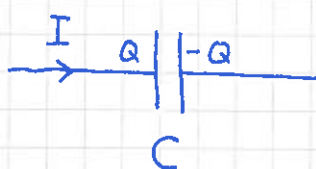
"Venstre" sløyfe: $+V_0 - RI - \frac{Q}{C} = 0$

"Høyre" sløyfe: $-RI_R + \frac{Q}{C} = 0$

[Samt $I - I_C - I_R = 0$]

TM kaller sløyferegelen ("loop rule") for "first rule" og knutepunktregelen ("junction rule") for "second rule".

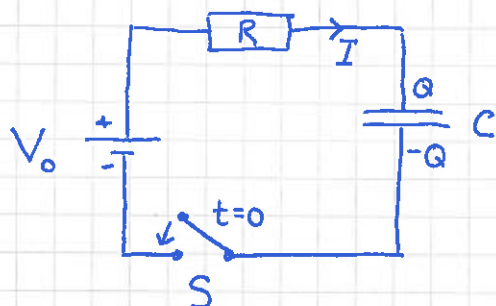
Personlig pleier jeg å gjøre omvendt; "K1" og "K2" for hhv. strømregel og spenningsregel.



$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} ; \quad V = \frac{Q}{C}$$

[Råd: Velg fortegn som her, dvs I inn mot plate med ~~+~~ Q, slik at $I = dQ/dt$ (og ikke med minustegn).]

Opplading av kondensator i RC-krets.



Bryter S lukkes ved $t=0$.
 $Q(t) = ? \quad I(t) = ?$
 $[Q(0) = 0]$

$$K2 \Rightarrow V_0 - RI - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow R \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{C} + V_0 = -\frac{Q - V_0 C}{C}$$

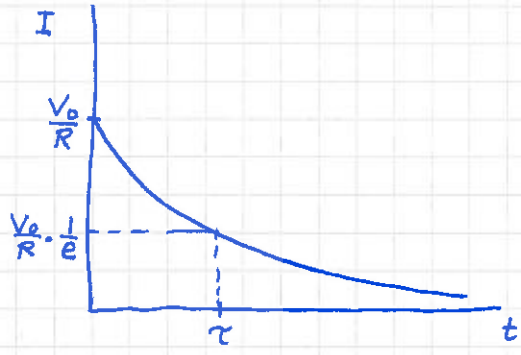
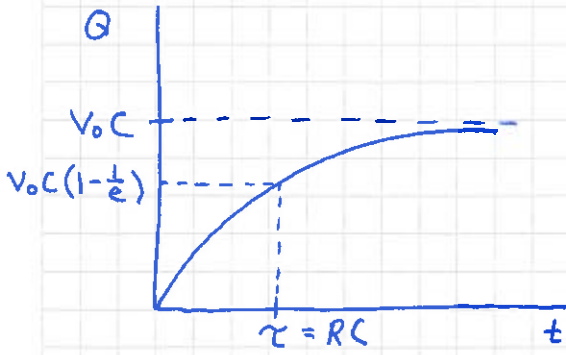
$$\Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{Q - V_0 C}{-V_0 C} \right\} = -\frac{t}{RC}$$

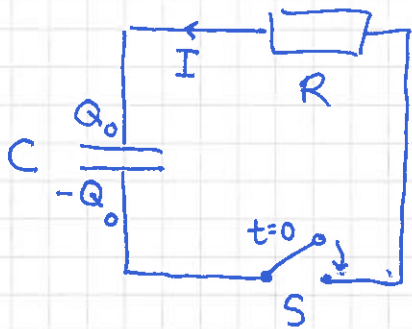
$$\Rightarrow \underline{Q(t) = V_0 C \{ 1 - e^{-t/RC} \}}$$

$$\Rightarrow \underline{I(t) = \dot{Q} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}}$$

Produktet av R og C, "tidskonstanten" $\tau = RC$, forteller hvor lang tid det tar å lade opp kondensatoren. F.eks. når det har gått en tid $3 \cdot \tau = 3 \cdot RC$, har Q blitt $V_0 C (1 - e^{-3}) \approx 0.95 V_0 C$, dvs 95% av maxverdien $V_0 C$.



Utlading av en oppladet kondensator i en RC-krets (uten andre komponenter som spenningskilde etc) blir enda enklere:



$Q(0) = Q_0$

$Q(t) = ? \quad I(t) = ?$

$K2 \Rightarrow -\frac{Q}{C} - R\dot{Q} = 0$

$\Rightarrow \int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$

$\Rightarrow \ln \frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$

$\Rightarrow \underline{Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}} \quad ; \quad \underline{I(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}}$

Merk at utregnet $I(t)$ fikk negativt fortegn. Det visste vi egentlig på forhånd: Vi valgte I inn mot positivt ladet plate, for å kunne bruke $I = +dQ/dt$. Her ser vi at strømmen må gå andre veien når kondensatoren lades ut.

Magnetostatikk [TM 26+27; LHL 23] [YF 27+28] (104)

Aller først litt om magnetisme som et relativistisk fenomen. (Ikke pensum.) Vi skal se at hvis vi "tror på" Coulombs lov og Einsteins spesielle relativitetsteori, så må det være slik at en elektrisk strøm I gir opphav til en kraft \vec{F}_m på en ladning q som er i bevegelse, med hastighet \vec{v} .

Denne kraften \vec{F}_m kan uttrykkes ved hjelp av et vektorfelt \vec{B} , som nettopp er magnetfeltet.

Vi gjør følgende eksperiment:



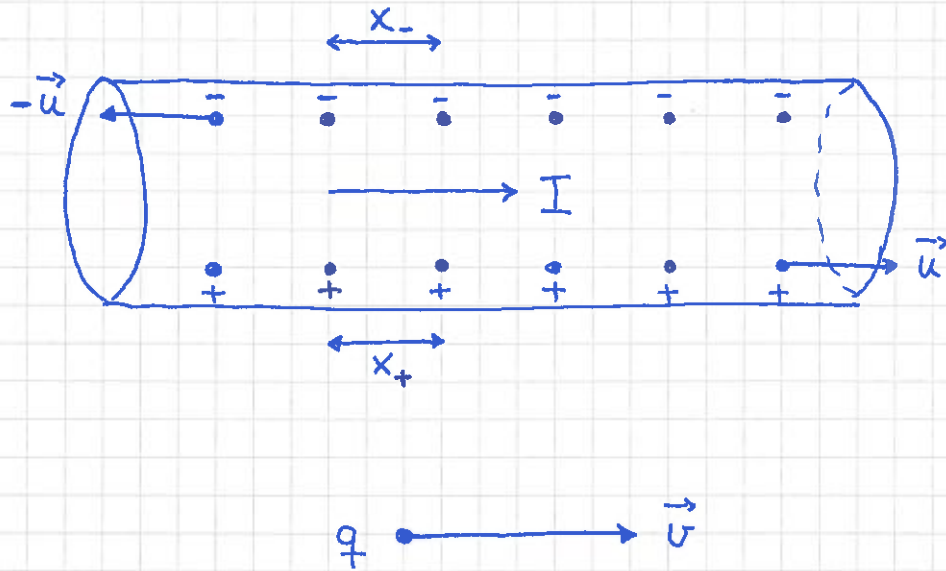
Dvs: Ledningen q , som har hastighet \vec{v} , trekkes mot den nøytrale strømførende lederen, med kraft \vec{F}_m !

Hvor kom \vec{F}_m fra?

Einstein: "Objekter i bevegelse er kortere enn når de er i ro."

(såkalt lengdekontraksjon)

Anta (f.eks.) at strømmen I skyldes både negative og positive ladningsbærere: (105)



\vec{u} (som står i ro på laben) og ladningen q (som har hastighet \vec{u}) er i ulike referansesystem (ert. inertialsystem).

x_- og x_+ : avstand mellom hlv. neg. og. pos. ladninger, målt av oss; $x_- = x_+$; dvs vi ser en elektrisk neutrale leder.

\tilde{x}_- og \tilde{x}_+ : tilsvarende, men målt av ladningen q ; $\tilde{x}_- < \tilde{x}_+$; dvs q ser en leder med netto negativ ladning, fordi q ser negative ladn. med større hastighet enn de positive, slik at lengdekontraksjonen blir størst for avstanden mellom de negative ladningene! For q ser det da ut som om negative lada. i ledere ligger tettere enn de positive, dvs q ser en negativt ladet leder!

Coulombs lov, brukt av q , tilsier dermed at q trekkes mot lederen pga en elektrisk kraft.

106

[Frastøtes hvis q , \vec{v} eller I skifter fortegn.]

Einstein: "Fysikkens lover gjelder i alle inertialsystemer."

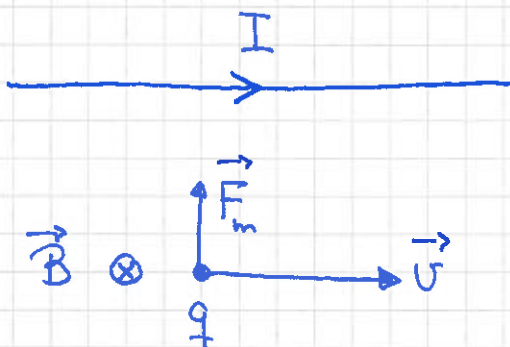
Dermed: Hvis q måler en kraft på seg selv, må også vi måle en kraft på q .

Vi måler en magnetisk kraft, som kan uttrykkes ved hjelp av et nytt vektorfelt,

\vec{B} = magnetfeltet.

Det er strømmen I som er årsaken til magnetfeltet.

Vi innser at eksperimentet på side 104 ~~er~~ er i tråd med at vi lar \vec{B} peke inn i planet der q befinner seg, og samtidig uttrykker \vec{F}_m som et kryssprodukt mellom \vec{v} og \vec{B} :



$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

[\otimes : inn i planet
 \odot : ut av ""]

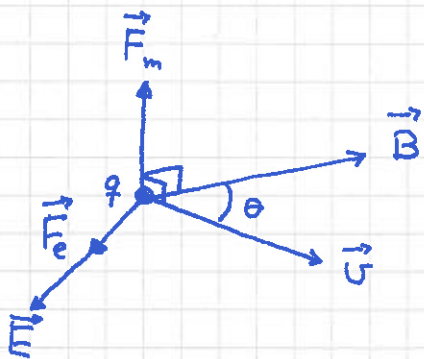
[Sidene 104-106 er ikke pensum, kun orienteringsstoff.]

Lorentzkraften [LHL 23.4] [YF 27.2]

Ladninger er opphav til elektrisk felt \vec{E} ,
og resulterer i en elektrisk kraft $\vec{F}_e = q\vec{E}$
på en (annen) ladning q . (Enten q er i ro eller i bevegelse.)

Strøm (dvs ladninger i bevegelse) er opphav til
magnetfelt \vec{B} , og resulterer i en magnetisk kraft
 $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ på en (annen) ladning q . (I bevegelse.)

Med både \vec{E} og \vec{B} til stede (der q er):



$$\vec{F}_e = q\vec{E} ; F_e = |\vec{F}_e| = qE$$

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} ;$$

$$F_m = |q\vec{v} B \sin \theta| = |\vec{F}_m|$$

Total kraft på q :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

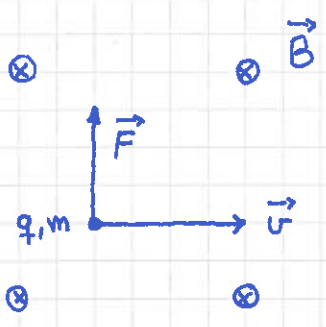
Lorentzkraften

Enhet for \vec{B} :

$$[B] = [F/qr] = \frac{N}{C \cdot m/s} = \frac{N}{A \cdot m} = T \text{ (tesla)}$$

Ladet partikkel i uniformt magnetfelt [FM 26.2; LHL 23.1+4]

[⊗ inn i planet; ⊙ ut av planet]

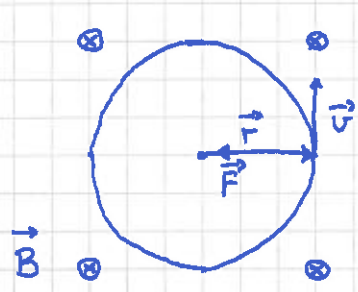


$$\vec{\Pi} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$F = qvB \sin \theta \quad \vec{v} \perp \vec{B} = qvB$$

⇒ sirkelbevegelse med konstant v:
 $\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{F} \perp d\vec{s}/dt \Rightarrow dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$

Dvs: Magnetisk kraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ utfører null arbeid
 ⇒ $K = \frac{1}{2}mv^2 = \text{konst.} \Rightarrow v = \text{konst.}$



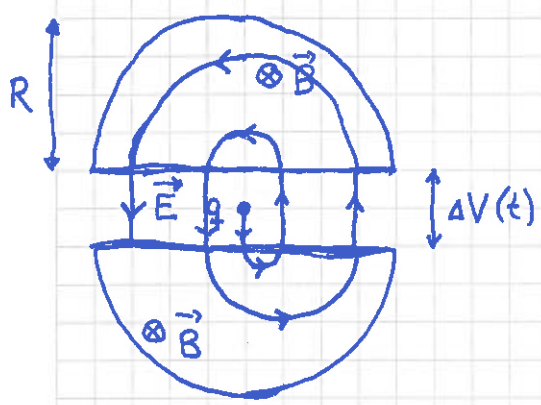
$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \hat{r} \quad (\text{sentripetalaksel.})$$

$$\Rightarrow qvB \stackrel{N^2}{=} mv^2/r$$

$$\Rightarrow r = mv/qB$$

⇒ $\omega_c = v/r = \underline{qB/m = \text{syklotronfrekvensen}}$

Eks: Prinsipp for partikkelakselerator (CERN; LHC)



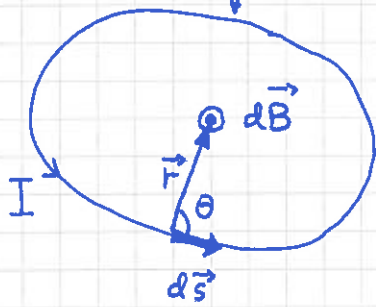
- Når q er i \vec{B} : Sirkelbevegelse, $r = mv/qB$, $\omega_c = qB/m$
- Spenning $\Delta V(t) = V_0 \cos \omega_c t$ over "gap" i midten ⇒ $\vec{E}(t) \Rightarrow \text{\Okt } v$ for hver passasje
- $V_{\text{max}} = qBR/m$ [ikke-relativistisk]

• LHC: $R \approx 4\text{km}$, $B \approx 8\text{T}$, $K_{\text{proton}} \sim 7\text{TeV} \Rightarrow V_{\text{proton}} \approx c$

\vec{B} fra elektrisk strøm [TM 27.2; LHL 23.5] [YF 28.2]

(109)

(Lukket) Strømsløjfe

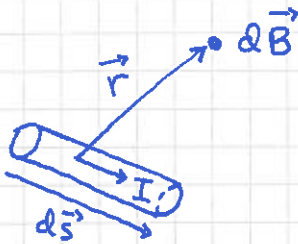


Empirisk lov:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Biot-Savarts lov

Bidraget $d\vec{B}$ fra "strømelement" $I \cdot d\vec{s}$:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Sammenlign med bidrag $d\vec{E}$ (til elektrisk f(t)) fra "ladningselement" dq :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{dq \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (\text{Coulombs lov})$$

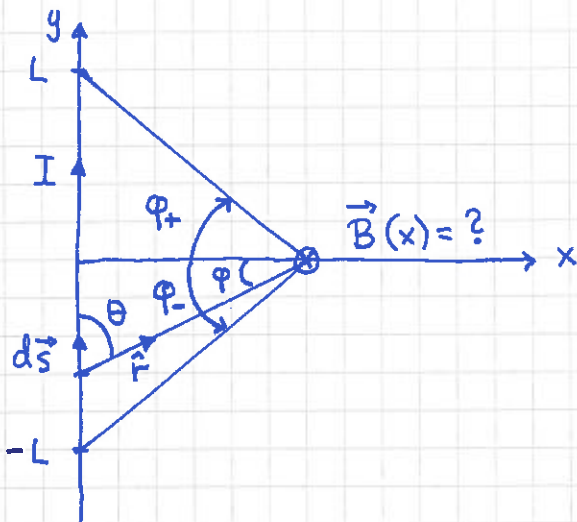
Vakuumpermeabiliteten: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$ (evt. $\frac{V \cdot s}{A \cdot m}$)

[Fra s. 89: $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$; $c =$ lysets hastighed i vakuum]

3 vigtige eksempler følger!

[Mål: Forstå kretselementet spole, jf. s. 62!]

Eksempel 1: \vec{B} fra rett strømførende leder [TM 27.2; LHL 23.5] [YF 28.3]



Fra figuren:

$$\sin \varphi_+ = L / \sqrt{x^2 + L^2}$$

$$\sin \varphi_- = -L / \sqrt{x^2 + L^2}$$

$$\sin \theta = \frac{x}{r} = \cos \varphi$$

$$\tan \varphi = y/x$$

Bidrag $d\vec{B}$ fra $I d\vec{s}$:
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$d\vec{s} \times \hat{r} = dy \cdot 1 \cdot \sin \theta \cdot (-\hat{z}) ; \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{x^2}$$

$$y = x \tan \varphi \Rightarrow dy = x \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(x) = \int d\vec{B} = - \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \underbrace{\frac{x d\varphi}{\cos^2 \varphi}}_{dy} \cdot \underbrace{\cos \varphi}_{\sin \theta} \cdot \underbrace{\frac{\cos^2 \varphi}{x^2}}_{1/r^2}$$

$$= - \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi x} \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \cos \varphi d\varphi = - \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi x} \left\{ \sin \varphi_+ - \sin \varphi_- \right\}$$

$$= - \frac{\mu_0 I L \hat{z}}{2\pi x \sqrt{x^2 + L^2}} \quad (= \text{felt fra langde } 2 \cdot L)$$

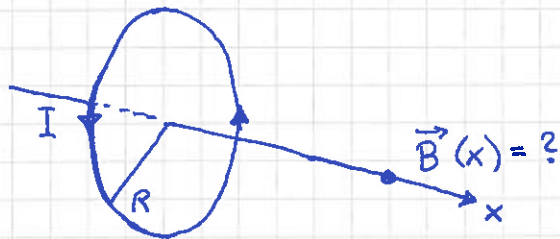
Hvis ∞ lang: $\sqrt{x^2 + L^2} \approx L$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(x) = - \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{z}}$$

Eks 2: \vec{B} på aksen til sirkulær strømsløyfe

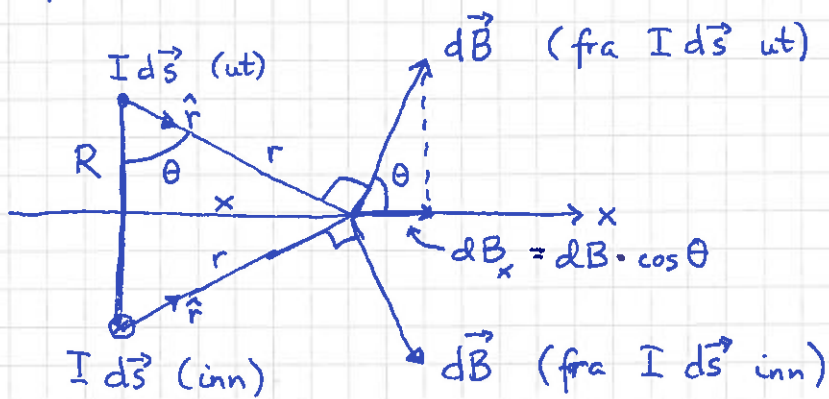
(111)

[TM 27.2; LHL 23.6] [YF 28.5]



- Strøm I i ring, radius R , sentrum i origo, ligger i yz -planet.
- Hva er $\vec{B}(x)$ på x -aksen?

Sett fra siden:

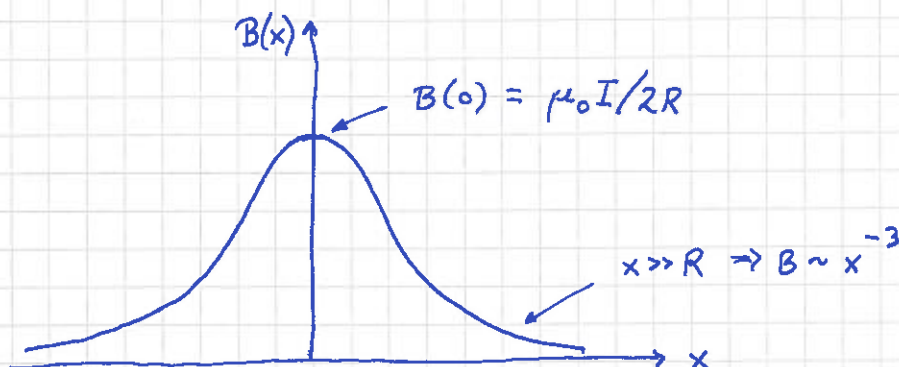


- symmetri $\Rightarrow \vec{B}(x) = B(x) \hat{x}$ (for alle x)

$$dB = \left| \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi (x^2 + R^2)} \cdot \underbrace{ds \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2}}_{|d\vec{s} \times \hat{r}|}$$

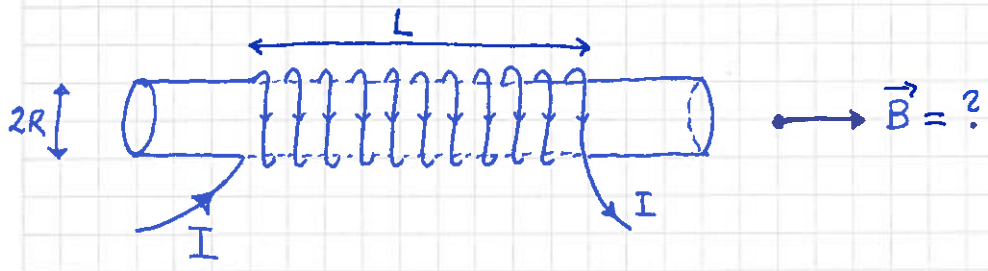
$$\cos \theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{(x^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow B(x) = \int dB_x = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \underbrace{\int ds}_{= 2\pi R} = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$



Eks 3: \vec{B} på akse til strømførende spole

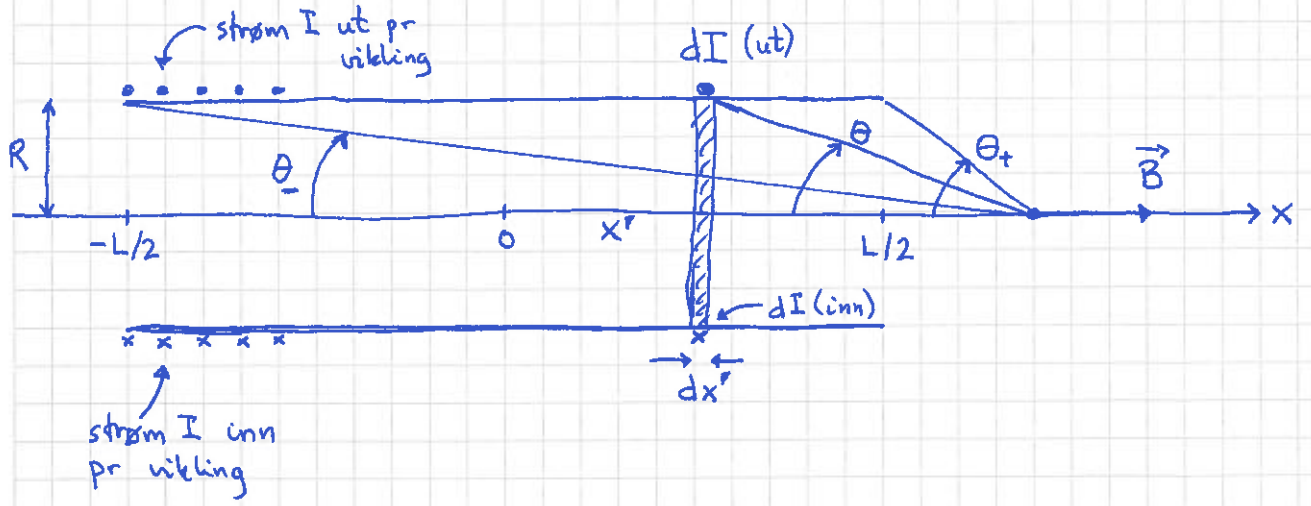
[TM 27.2 ; LHL 23.6] [YF 28.7]



- spole med N tettliggende viklinger på lengde L ($N=11$ i figuren over); viklethet $n = N/L$
- hva blir \vec{B} på spolens akse?

Løsning:

Med tettliggende viklinger kan vi betrakte dette som N strømførende ringer fordelt på lengden L :



viklinger på lengde dx' = dN (# betyr her "antall")

$L = N$

$$\Rightarrow \frac{dN}{N} = \frac{dx'}{L} \Rightarrow dN = \frac{N}{L} dx' = n \cdot dx'$$

Braker resultatet s. 111 til å skrive ned bidraget dB fra strøm dI i ring med bredde dx' ved x' :

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot dI \cdot R^2}{2 \{ (x-x')^2 + R^2 \}^{3/2}}$$

Med dN viklinger på lengden dx' , med strøm I i hver vinding, fås:

$$dI = I \cdot dN = I \cdot n \cdot dx' \quad (n = N/L)$$

Dermed:

$$B(x) = \int dB = \frac{\mu_0 I n R^2}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{\{ (x'-x)^2 + R^2 \}^{3/2}}$$

Fra figuren s. 112 ser vi at

$$\cos \theta = \frac{x-x'}{\{ (x-x')^2 + R^2 \}^{1/2}} = \cos \theta_{\pm} \quad \text{for } x' = \mp \frac{L}{2}$$

Og siden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left\{ \frac{y}{\sqrt{y^2+c}} \right\} &= \frac{1}{\sqrt{y^2+c}} + \frac{y \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 2y}{(y^2+c)^{3/2}} = \frac{y^2+c}{(y^2+c)^{3/2}} - \frac{y^2}{(y^2+c)^{3/2}} \\ &= c / (y^2+c)^{3/2}, \end{aligned}$$

er det klart at

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{\{ (x'-x)^2 + R^2 \}^{3/2}} &= \left| \frac{x'-x}{R^2 \sqrt{(x'-x)^2 + R^2}} \right|_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{\frac{L}{2} - x}{R^2 \sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + R^2}} + \frac{\frac{L}{2} + x}{R^2 \sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + R^2}}, \end{aligned} \quad \text{og dermed er}$$

$$B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left\{ \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + R^2}} + \frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + R^2}} \right\}$$

(PUH!)

Alternativt kan vi skrive

$$B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \{ \cos \theta_- - \cos \theta_+ \}$$

Lang spole: $L \gg R$ (og $\frac{L}{2} \gg R$)

- Med x nær enden av spolen:

Da er enten $x = L/2$, dvs $\theta_- = 0$ og $\theta_+ = \pi/2$,
eller $x = -L/2$, dvs $\theta_- = \pi/2$ og $\theta_+ = \pi$.

I begge tilfeller blir

$$B(|x| \approx \frac{L}{2}) = \underline{\underline{\frac{1}{2} \mu_0 n I}}$$

- Med x inni spolen og langt unna begge ender:

Da er $\theta_- = 0$ og $\theta_+ = \pi$, slik at

$$\boxed{B = \mu_0 n I} \quad (\text{inni lang spole})$$

Det kan vises (ved å bruke den såkalte Amperes lov, som ikke er pensum her) at

$$B = \mu_0 n I$$

overalt inni en lang spole, dvs ikke bare på spolens akse (men under forutsetning av at det er "dypt" inni spolen, dvs langt unna begge ender)

Dette er vårt hovedresultat, som vi skal bruke som en tilnærming også for "reelle spoler".

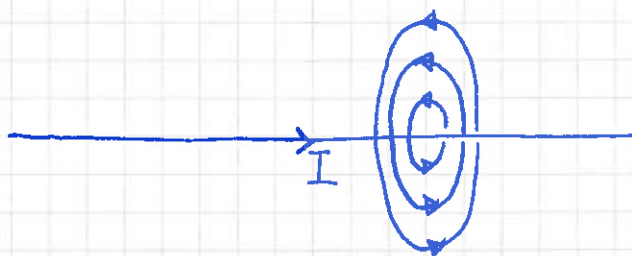
På utsiden av en slik lang og tettviklet spole kan vi anta $B \approx 0$, da det her er mye svakere enn inni spolen.

Feltlinjer for \vec{B} [TM 26.1; LHL 23.1] [YF 27.3]

Som for \vec{E} (se s. 71):

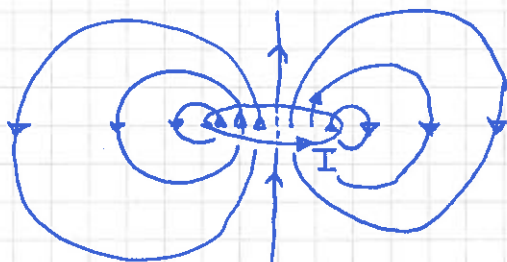
- Retning: Feltlinjene $\parallel \vec{B}$
- Absoluttverdi: $|\vec{B}|$ prop. med feltlinjetettheten

Eks 1: \vec{B} fra lang rett strømførende leder

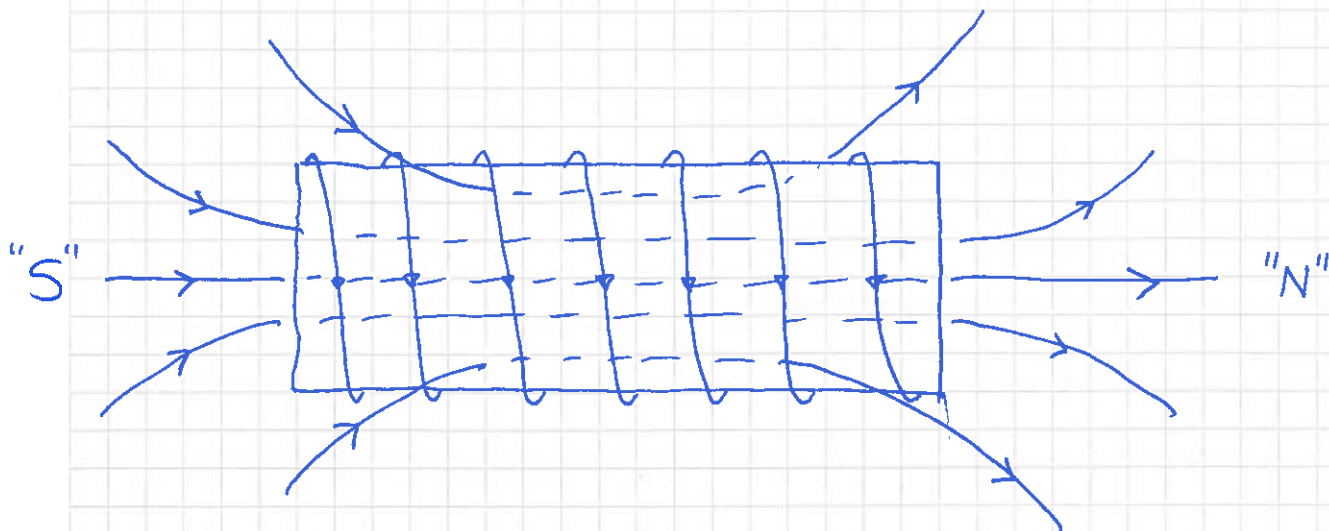


sirkler med sentrum på lederen

Eks 2: \vec{B} fra strømførende ring

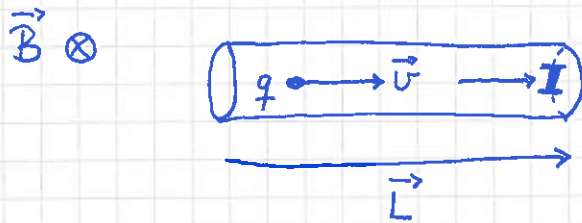


Eks 3: \vec{B} fra lang, tettviklet spole



MERK: Alltid lukkede feltlinjer for \vec{B} . [Ingen "magnetisk ledning."]

Magnetisk kraft på elektrisk strøm [TM 26.1; LHL 23.2] [YF 27.6]



Bit av strømførende leder,
 N frie ladninger q med
 driftshastighet \vec{v} , lengde L

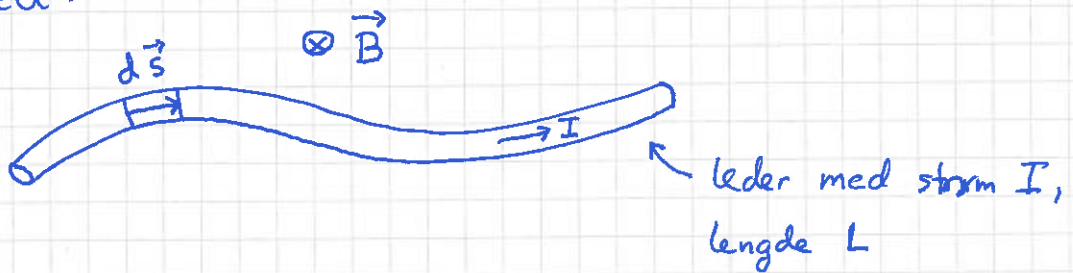
Kraft på de N frie ldn: $\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B}$

Strøm i ledaren: $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Nq}{L/v} = \frac{Nqv}{L}$

$\Rightarrow I\vec{L} = Nq\vec{v}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}}$

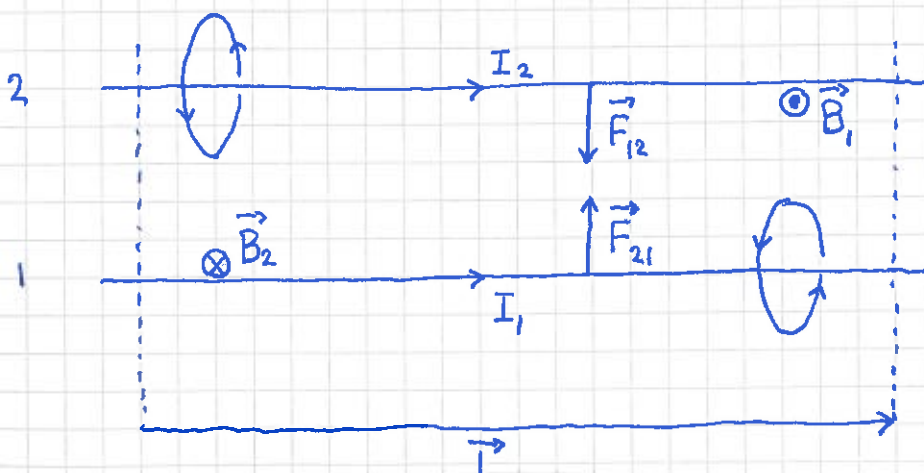
Generelt:



Kraft på $d\vec{s}$: $d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$

\Rightarrow Total kraft på lengde L : $\boxed{\vec{F} = \int_L d\vec{F} = I \int_L d\vec{s} \times \vec{B}}$

Eks: Kraft mellom to parallelle strømførende ledere [TM 27.2 ; LHL 23.5] [YF 28.4]



Magnetfelt fra 2 ved 1: $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x}$ (inn i planet)

———— " ———— 1 ved 2: $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$ (ut av planet)

Kraft på lengde \vec{L} av 1: $\vec{F}_{21} = I_1 \vec{L} \times \vec{B}_2$; $F_{21} = L \cdot \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi x$

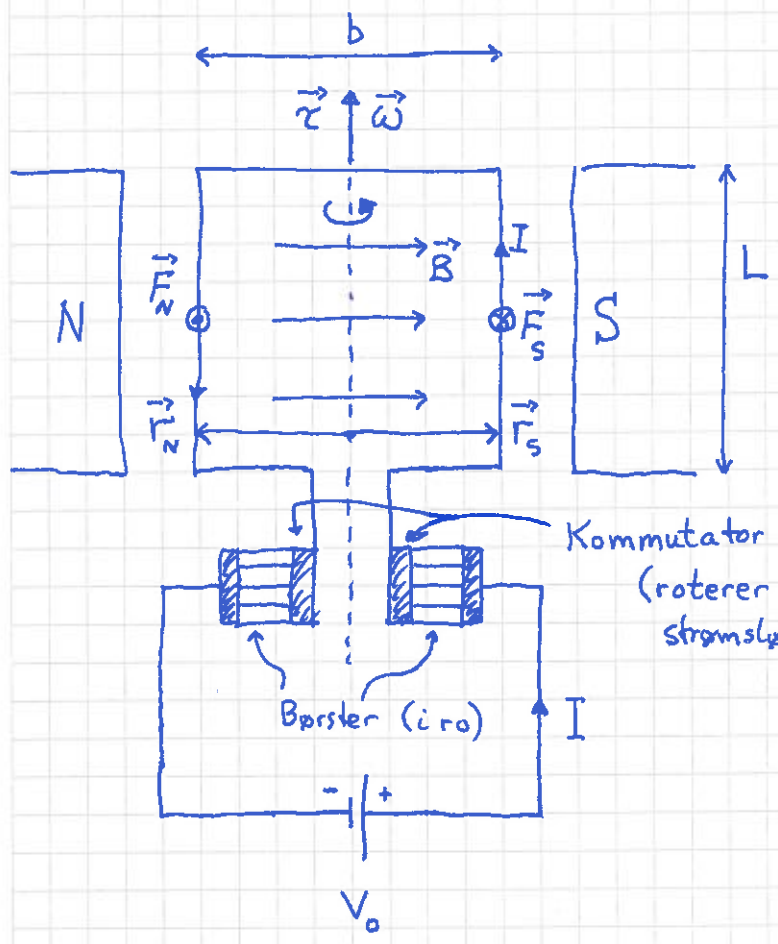
———— " ———— 2: $\vec{F}_{12} = I_2 \vec{L} \times \vec{B}_1$; $F_{12} = L \cdot \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi x = F_{21}$

Kraft pr lengdeenhet:

$$f_{21} = F_{21} / L = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} = F_{12} / L = f_{12}$$

Hvis $I_1 \parallel I_2$: Tiltrekning; Hvis $I_1 \parallel -I_2$: Frastøtning

Eks: Likestrømsmotor, prinsipp [TM 26.3; LHL 23.3] [YF 27.8]



$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

$$F_s = ILB \text{ (inn)}$$

$$F_n = ILB \text{ (ut)}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau_s = \frac{b}{2} ILB \sin\phi \text{ (opp)}$$

$$\tau_n = \text{————} \text{ (opp)}$$

(ϕ = vinkel mellom \vec{r} og \vec{F} ; i figuren er $\phi = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \tau = \tau_s + \tau_n = IAB \sin\phi$$

med $A = b \cdot L = \text{sløyfas areal}$

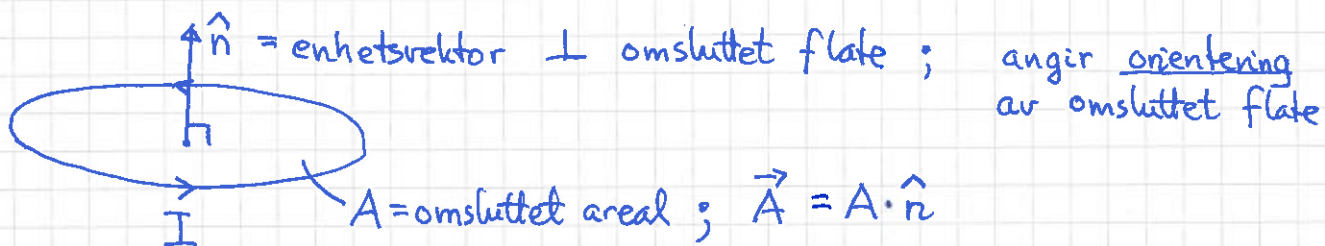
(DC spenningskilde)

Magnetiske dipoler og dipolmoment [TM 26.3; LHL 23.3, 26.2]

(118)

[YF 27.7]

Strømsløyfe = Magnetisk dipol



H.h.regel: 4 fingre i strømmens retning gir \hat{n} i tommelens retning.

Sløyfas magnetiske dipolmoment er:

$$\vec{m} \stackrel{\text{def}}{=} IA \hat{n} = I \vec{A}$$

[Notasjon i TM: $\vec{m} \rightarrow \vec{\mu}$]

Enhet: $[m] = A \cdot m^2$

Generell def:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j} dV ; \vec{j} = \text{strømtetthet}, dV = \text{volumement}$$

Sammenligning med elektrostatikk: (se s. 72)

A diagram of an electric dipole. Two points are shown: $-q$ on the left and q on the right. A horizontal arrow labeled \vec{d} points from $-q$ to q . To the right of the diagram, text reads: $\vec{p} = q\vec{d} = \text{elektrisk dipolmoment}$.

Generell def: $\vec{p} = \int \vec{r} dq = \int \vec{r} \rho dV ; \rho = \text{ladn. tetthet}$

I de generelle def av \vec{m} og \vec{p} skal det integreres over alle steder der hvor \vec{j} og ρ er forskjellig fra null.

Materiales magnetiske egenskaper

(med ref. til elektriske egenskaper, s. 86-89 + s. 72-74)

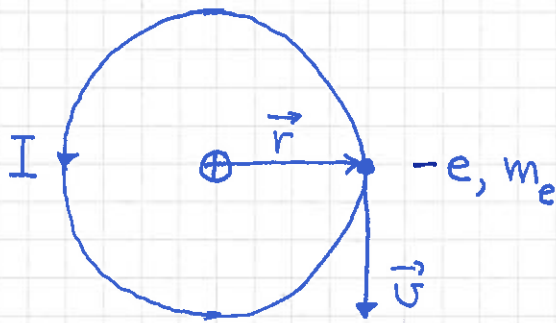
[TM 27.5;

LHL 26]

(119)

[YF 28.8]

Atom (forenklet modell):



$$v = 2\pi r / T$$

$$\Rightarrow I = \frac{e}{T} = \frac{e \cdot v}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow m = IA = \frac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} e v r$$



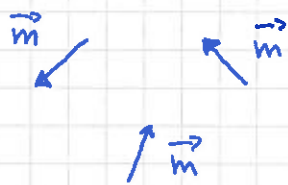
Atom = kjerne + elektron(er) = liken magnetisk dipol,

noen med $\vec{m} \neq 0$, andre med $\vec{m} = 0$.

[s. 72: noen molekylar har $\vec{p} \neq 0$, andre har $\vec{p} = 0$. (H_2O vs O_2 , f.eks.)]

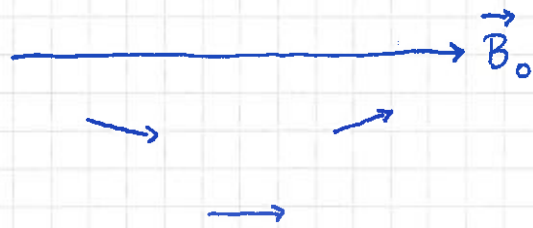
\Rightarrow Materialer kan magnetiseres av ytre felt \vec{B}_0 : [ref. s. 86]

$$B_0 = 0:$$



$$\sum_i \vec{m}_i \approx 0$$

$$\vec{B}_0 \neq 0:$$



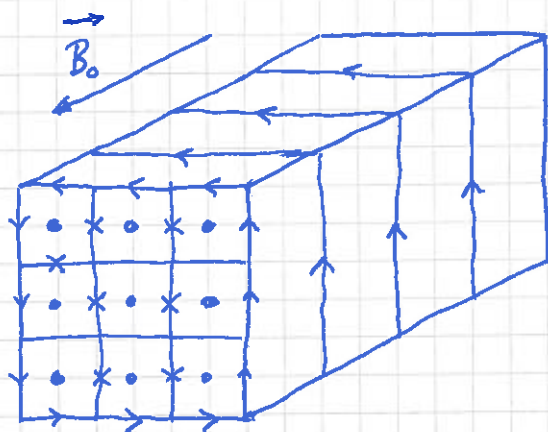
$$\sum_i \vec{m}_i \neq 0$$

$$\text{Øving 13: } \vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0, \quad U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

$$[\text{Ref. øving 9: } \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0, \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0]$$

Netto makroskopisk effekt av ytre felt \vec{B}_0 :

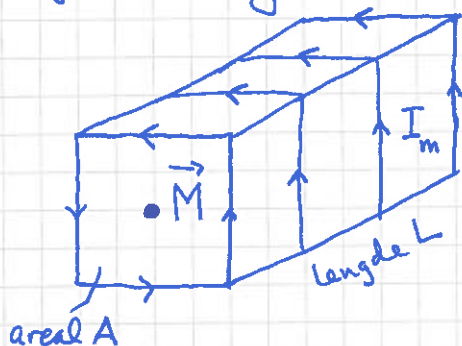
(120)



[ref. s. 86]

- innretting av \vec{m} langs \vec{B}_0
- alle indre atomære strømmar kansellerer
- induert strøm på overflaten : I_m
- før styrket feltet inni materialet : $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$

Magnetisering \vec{M} : [ref. s. 87: Polarisering \vec{P}]



$\vec{M} \stackrel{\text{def}}{=} \text{magn. dipolmoment pr volumenh.}$

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V}$$

$I_m = \text{indusert overflatestrøm på lengde } L$

$i_m = I_m / L = \text{overflatestrøm pr lengdeenhet}$

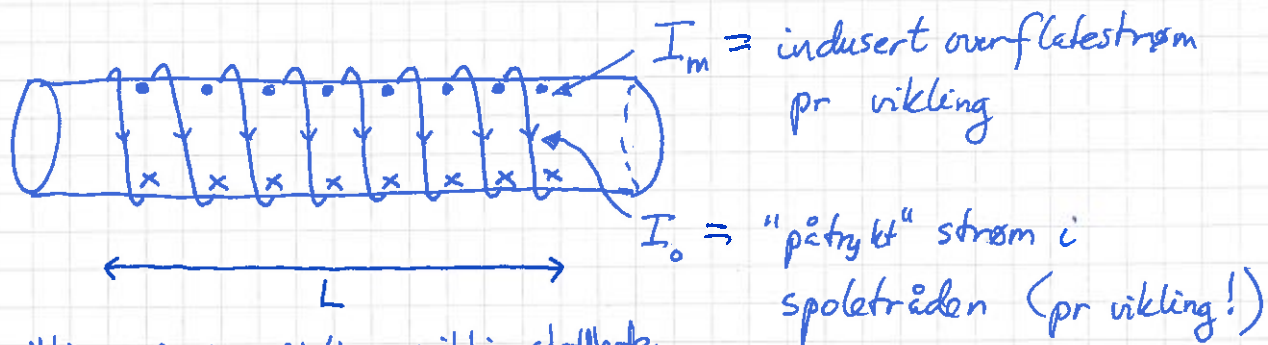
$$m = I_m \cdot A$$

$$\Rightarrow M = m/V = \frac{I_m \cdot A}{L \cdot A} = \frac{I_m}{L} = i_m$$

Dvs: $M = |\vec{M}| = i_m = \text{indusert overflatestrøm pr lengdeenhet}$

[Jf $P = \sigma_i = \text{ind. overfl. ledn. pr flateenhet, s. 87}$]

Indusert magnetfelt \vec{B}_m :



N viklinger ; $n = N/L =$ vikleings tettheden

\Rightarrow Totalt magnetfelt inni spolen :

$$\vec{B} = \mu_0 n I = \mu_0 n (I_0 + I_m)$$

Her har vi $M = i_m = \frac{N \cdot I_m}{L} = n \cdot I_m$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 n I_0 + \mu_0 n I_m$$

$$= \vec{B}_0 + \mu_0 M$$

dvs

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

Lineær respons : [ref. s. 88]

$$\vec{M} = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \cdot \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \quad [\text{jf. } \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}]$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{B} \left\{ 1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \right\} = \vec{B}_0 \Rightarrow \vec{B} = (1 + \chi_m) \vec{B}_0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= \frac{1}{1 + \chi_m}}$

Her er

$\chi_m =$ magnetisk susceptibilitet,

og

$1 + \chi_m \equiv \mu_r =$ relativ magnetisk permeabilitet

[jf. $1 + \chi_e \equiv \epsilon_r =$ relativ permittivitet]

Dermed:

$$\vec{B} = \mu_r \vec{B}_0 \quad ; \quad \text{jf.} \quad \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_0$$

Dus:

Styrket \vec{B} -felt pga \vec{M} (vel å merke: hvis $\chi_m > 0$)

Svekket \vec{E} -felt pga \vec{P}

[Se også nederst side 124!]

Ulike typer magnetisme:

1. Paramagnetisme

Atomer med permanent $\vec{m} \neq 0$, men "uorden" uten ytre felt $\Rightarrow \vec{M} = 0$ uten ytre felt.

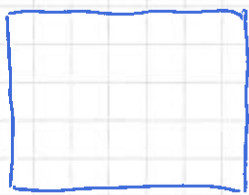
Svak innretning i ytre felt; $\chi_m > 0$ men liten.

Eks: Al, Mg, ...

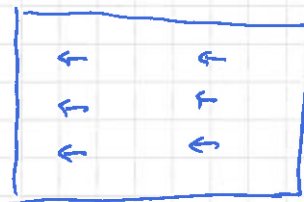
2. Diamagnetisme

Ytre $\vec{B}_0 \Rightarrow$ endret banebevegelse for elektronene \Rightarrow induisert \vec{m} motsatt rettet \vec{B}_0 [a la Lenz' lov!]

Målbart kun hvis $\vec{m}_{atom} = 0$ i null ytre felt.



$B_0 = 0; M = 0$



\vec{B}_0

\vec{M}

Dvs: $\chi_m < 0$ (men svært liten)

[Unntak: Superledere, da er $\chi_m < 0$ og slik at $\vec{B} = 0$ inni superlederen]

3. Ferromagnetisme

Vekselvirkende \vec{m}_i :

Hvis \vec{m}_i "opp", ønsker også $\vec{m}_{i\pm 1}$ å peke opp!

\Rightarrow $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \dots$ Ferromagnet

eller $\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \dots$ Antiferromagnet

Stor χ_m for ferromagneter.

(124)

Tallverdier :

Diamagn: $\chi_m \sim -10^{-5}$

Paramagn: $\chi_m \sim 10^{-4}$

Ferromagn: $\chi_m \sim 10^3 - 10^4$

\Rightarrow Kun ferromagn. materialer regnes som magnetiske !

Eks: Fe, Co, Ni, ...

Et par ekstra kommentarer vedrørende lineær respons og totalt felt inni spole fylt med magnetisk materiale :

Siden $B = B_0 + B_m$, har vi også $B_m = B - B_0 = \mu_r B_0 - B_0 = (\mu_r - 1) B_0 = \chi_m B_0$

Dermed er: $\mu_0 n I_m = \chi_m \mu_0 n I_0$, dvs $I_m = \chi_m I_0 = (\mu_r - 1) I_0$

Totalt felt inni spolen kan derfor skrives slik:

$$B = \mu_0 n I_0 + \mu_0 n I_m = \mu_0 n I_0 + \mu_0 n (\mu_r - 1) I_0 = \mu_0 \mu_r n I_0$$

Hvis vi nå definerer $\mu \equiv \mu_0 \mu_r =$ materialets permeabilitet, så

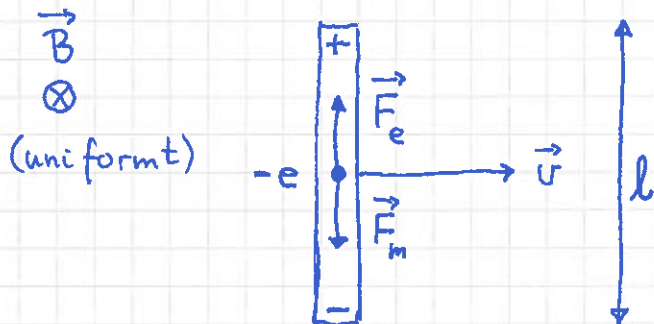
blir: $B = \mu n I_0$. Dette kan med fordel sammenlignes

med nest siste kulepunkt s. 88, der elektrisk felt mellom to store motsatt ladede plater ($\pm \sigma_0$ pr flatenhet) blir $E = \sigma_0 / \epsilon$ når rommet mellom platene er fylt med et dielektrikum med perm. $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$.

ELEKTRODYNAMIKK [TM 28,29; LHL 24,25,27] [YF 29-31] (125)

Faradays induksjonslov [TM 28.2+4; LHL 24.1] [YF 29.1+2+4]

Leder i bevegelse i \vec{B} -felt:



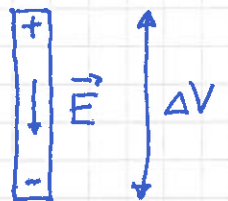
Magn. kraft $\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}$ på frie elektroner i lederen

⇒ Indusert ladning på endene

⇒ — " — el. felt \vec{E} i lederen

⇒ — " — el. kraft $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ på elektronene

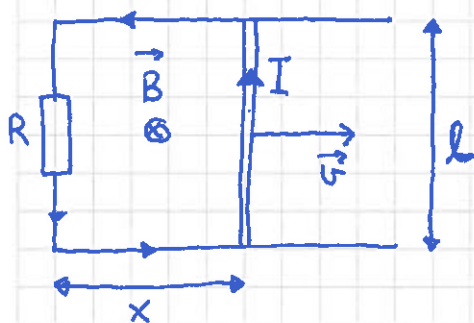
⇒ — " — spenning $\Delta V = E \cdot l$ i lederen



Likevekt når $\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0 \Rightarrow eE = evB \Rightarrow E = vB$

$$\Rightarrow \underline{\Delta V} = E \cdot l = \underline{vBl}$$

Lag lukket krets ⇒ strøm I : [TM 29.1; LHL 23.7] [YF 27.3]



Magnetisk fluks gjennom areal

$A = l \cdot x$ omsluttet av lukket krets:

$$\Phi = B \cdot A = Blx$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{d\Phi}{dt}} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv = \underline{\Delta V}$$

som er Faradays lov

[Generelt: $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$
 $d\vec{A} = dA \cdot \hat{n}$]

The diagram shows a small surface element dA with a normal vector \hat{n} pointing upwards. A magnetic field vector \vec{B} is shown pointing downwards and to the left, making an angle with the normal vector.

Egentlig:

$$\Delta V = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Lenz' lov

Lenz' lov [TM 28.3; LHL 24.1] [YF 29.3]

Fortegn (retning) på ΔV er slik at

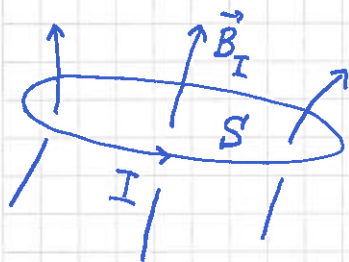
$\Delta V \Rightarrow I \Rightarrow \vec{B}_I \Rightarrow \Phi_I = \int_S \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$ (gjennom flaten S som omslutes av kretsen) slik at $-\dot{\Phi}_I$ motvirker påtvinget endring $\Delta\Phi$ (der $-\Delta\Phi$ skapte ΔV i utgangspunktet)

Kortversjon: Naturen motarbeider påtvingne endringer.

Induktans [TM 28.6; LHL 25.1] [YF 30.2]

(selvinduktans)

$I \Rightarrow \vec{B}_I \Rightarrow$ fluks gjennom sløyfa :



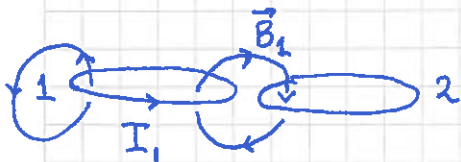
$$\Phi = \int_S \vec{B}_I \cdot d\vec{A} = \int_S \left\{ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \right\} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{B}_I \cdot d\vec{A} \quad (\text{Biot-Savart, s. 109})$$

$$\Rightarrow \Phi = L \cdot I$$

der $L \stackrel{\text{def}}{=} \Phi / I =$ sløyfas (selv-)induktans

Enhet: $[L] = T \cdot m^2 / A \equiv H$ (henry)

[Gjensidig induktans (idea pensum) :



$I_1 \Rightarrow \vec{B}_1 \Rightarrow$ fluks Φ_2 gjennom sløyfe 2

$M_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_2 / I_1 =$ sløyferes gjensidige induktans

Anvendelse : Transformator etc.]

(Selv-) Induksjon:

$$\dot{I} \neq 0 \Rightarrow \dot{\Phi} \neq 0 \Rightarrow \Delta V = -\dot{\Phi} = -L \dot{I}$$

Som kretselement:



$$\Delta V = -L \frac{dI}{dt}$$

Med Lenz' lov:



Eks: Lang spole, $N=500$ vikt. på lengde $l=10$ cm, tverrsnitt $A=5$ cm². Hva er spolens induktans L , (a) luftfylt; (b) jernkjerne med $\mu_r = 1000$.

Løsning:

$$B = \mu n I = \mu \frac{NI}{l}$$

$$\text{Total omsluttet fluks: } \Phi = NBA = \frac{\mu N^2 A}{l} \cdot I$$

$$\Rightarrow \underline{L = \mu N^2 A / l}$$

$$(a) \text{ Luftfylt: } L = \mu_0 N^2 A / l = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} / 0.10 = \underline{\underline{1.6 \text{ mH}}}$$

$$(b) \text{ Jernkjerne: } L = \mu_r \mu_0 N^2 A / l = 1000 \cdot 1.6 \text{ mH} = \underline{\underline{1.6 \text{ H}}}$$

Spm: Hvis spoletråden er av kobber, med tverrsnitt 0.1 mm², hvor stor blir da spolens resistans? (Se s.94-96.)

Bruk bok eller google til å finne resistiviteten til kobber.

Energi lagret i magnetfelt [TM 28.7; LHL 25.3] [YF 30.3] (128)



Påkrevd arbeid/energi for å øke strømmen fra i til $i+di$:

$$dW = P \cdot dt = -v \cdot i dt = L \frac{di}{dt} i dt = Li di$$

↑
arbeid mot industert v

For å øke fra $i=0$ til $i=I$:

$$W = \int dW = \int_0^I Li di = \underline{\underline{\frac{1}{2} LI^2}}$$

dvs: $U = \frac{1}{2} LI^2 =$ energi lagret i spolen

Anta lang spole, lengde l , tverrsnitt A , N viklinger:

$$B = \mu_0 n I$$

$$\phi = NAB = NA \frac{\mu_0 N}{l} I = LI$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} LI \cdot I = \frac{1}{2} \cdot NAB \cdot \frac{B}{\mu_0 n} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot \underbrace{(Al)}_{\text{volumet inni spolen (der } B \neq 0)}$$

\Rightarrow Energi pr volumenet i magnetfelt er:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Fra før (s.92): Energi pr volumenet i elektrisk felt: $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

Dermed: Total energi pr volumenet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

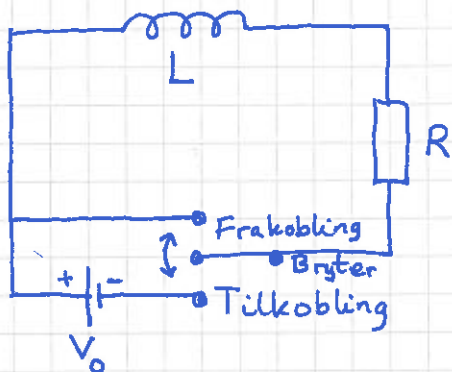
Elektriske kretser; DC og AC; R, L og C

(129)

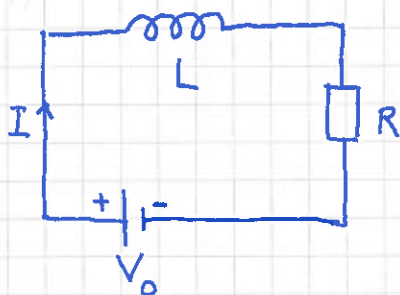
[TM 28.8, 29.1+2+4+6; LHL 25.2, 27.1+2+3+5] [YF 30.4+5+6, 31.5]

① RL-krets; DC

[DC = direct current = likestrøm]



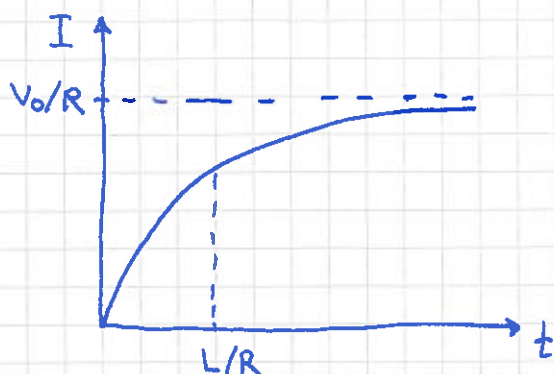
(a) Tilkobling af V_0 ved $t=0$:



$$K2 \Rightarrow V_0 - L \frac{dI}{dt} - RI = 0$$

Samme ligning, her for I , som for Q i RC-krets s 102, da med $Q(0)=0$, her med $I(0)=0 \Rightarrow$ Samme løsning!

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-R \cdot t / L} \right)$$



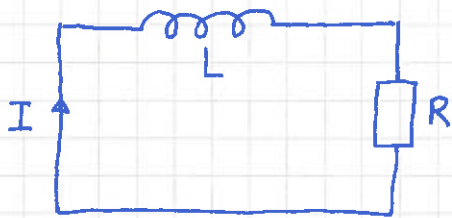
RL-kretsens tidskonstant:

$$\tau = L/R$$

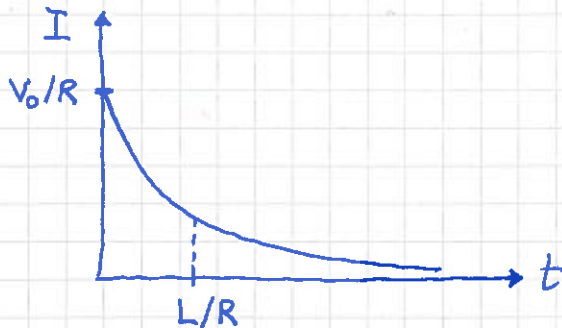
[Hf. $\tau = RC$ for RC-krets]

(b) Frakobling av V_0 (etter lang tid $\hat{=}$ nytt $t=0$):

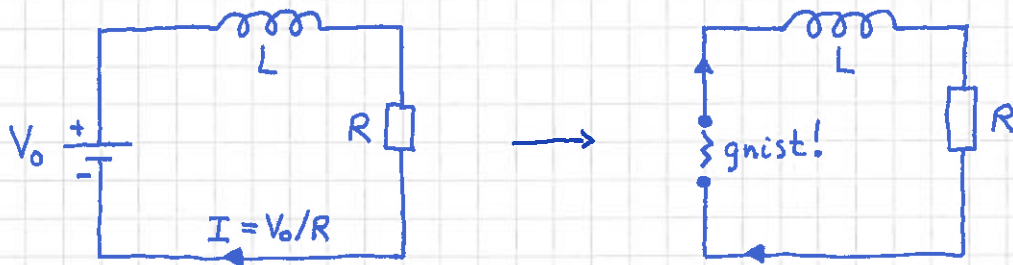
(130)



$$K2 \Rightarrow -L \frac{dI}{dt} - RI = 0; I(0) = \frac{V_0}{R}$$
$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}; \tau = L/R$$



(c) "Dra ut støpselet"



Strøm I raskt fra V_0/R til 0

\Rightarrow stor $|\frac{dI}{dt}| \Rightarrow$ stor induisert spenning $|L \frac{dI}{dt}|$

(selv med liten L) \Rightarrow kortvarig strøm over luftgapet

(selv om motstanden der er stor) \Rightarrow gnist! ("overslag")

AC-kretser [AC = alternating current = vekselstrøm] (31)

AC spenningskilde:



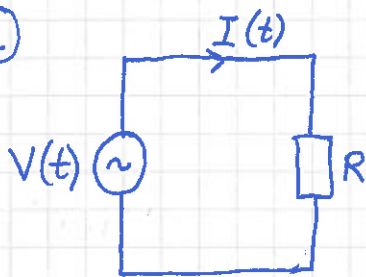
$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$\text{Frekvens: } f = \frac{\omega}{2\pi}$$

[Strømnettet her: $f = 50 \text{ Hz}$]

$$[V_0 = 311 \text{ V}; V_{\text{rms}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = 220 \text{ V}]$$

(2)



$$K2 \Rightarrow V_0 \cos \omega t - RI(t) = 0$$

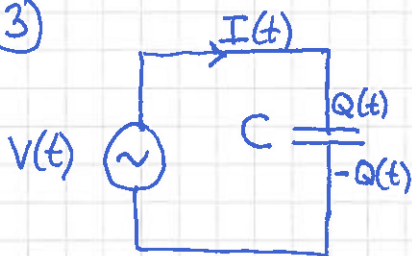
$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t$$

Dvs $V(t)$ og $I(t)$ svinger i fase.

Strømmens amplitude: $I_0 = V_0 / R$

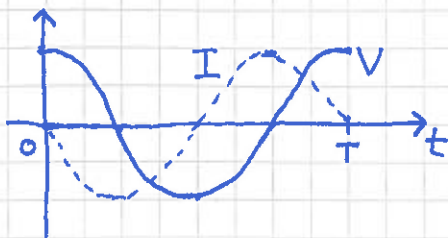
(uavh. av ω)

(3)



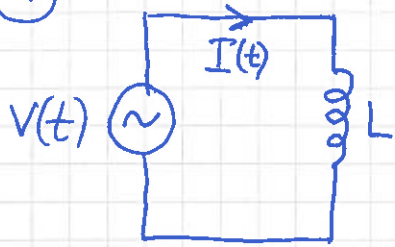
$$K2 \Rightarrow V_0 \cos \omega t - \frac{Q(t)}{C} = 0 \Rightarrow Q(t) = V_0 C \cos \omega t \quad [V(t) \text{ og } Q(t) \text{ i fase}]$$

$$\Rightarrow I(t) = dQ(t)/dt = -V_0 \omega C \sin \omega t = V_0 \omega C \cos(\omega t + \pi/2)$$



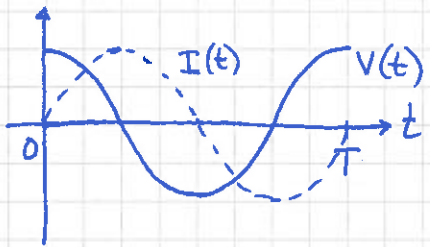
Dvs faseforskjell $\pi/2$ mellom $V(t)$ og $I(t)$; $I_0(\omega) = V_0 \omega C$
øker med økende frekvens

④



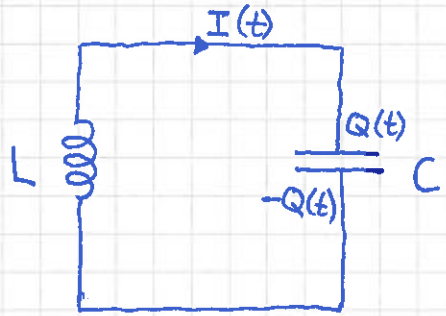
$$K2 \Rightarrow V_0 \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{V_0}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$



Dvs faseforskjell $-\pi/2$ mellom $V(t)$ og $I(t)$; $I_0(\omega) = V_0/\omega L$
avtar med økende frekvens

⑤ LC-krets

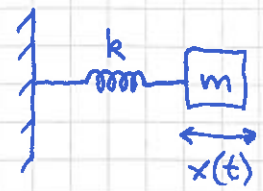


Anta (f.eks.) $Q(0) = Q_0$,
 dvs $V_c(0) = Q_0/C =$ spenning over C ved $t=0$.

$$K2 \Rightarrow -L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \quad ; \quad I(t) = dQ/dt$$

$$\Rightarrow \ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Enkel harmonisk oscilator, se s. 22 \rightarrow :



$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$x(t) = x(0) \cos \omega_0 t \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{k/m} \quad ; \quad x(0) = x_0$$

$$E = K + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 = \text{konst.} \quad (s. 24)$$

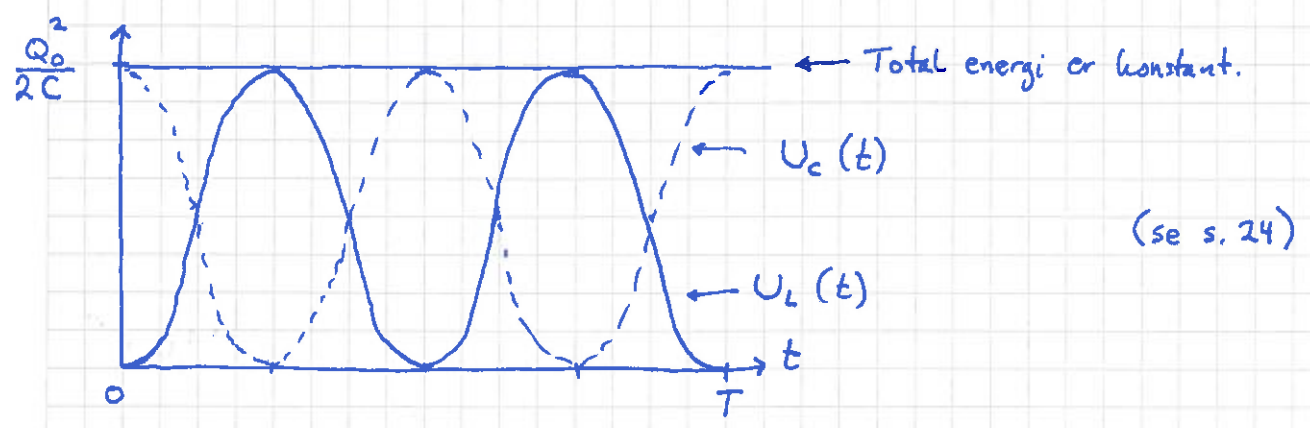
Analoge størrelser i LC-kretsen (se s. 27 B) :

$Q \leftrightarrow x, I \leftrightarrow \dot{x}, L \leftrightarrow m, 1/C \leftrightarrow k, Q_0 \leftrightarrow x_0,$
 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{k/m}$

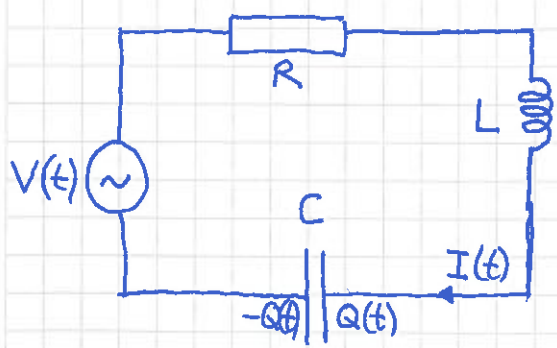
$\Rightarrow Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t, I(t) = -\omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t$

$U_C = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t$ (s. 92)

$U_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_0^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2 \omega_0 t$

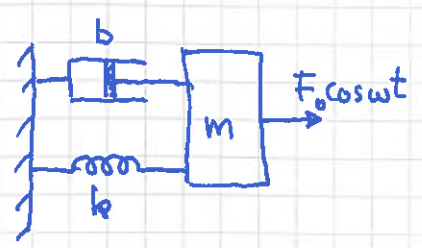


⑥ RLC resonanskrets [se s. 26-27 B] [og LAB!]



$V(t) = V_0 \cos \omega t$
 K2: $V(t) - RI - L\dot{I} - Q/C = 0$
 $\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \cos \omega t$

Mekanisk analogi:



$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$
 $\Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$
 (dvs $b \leftrightarrow R$)

Fant for mekanisk system:

$$x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{med } A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\gamma = b/m$$

Dermed:

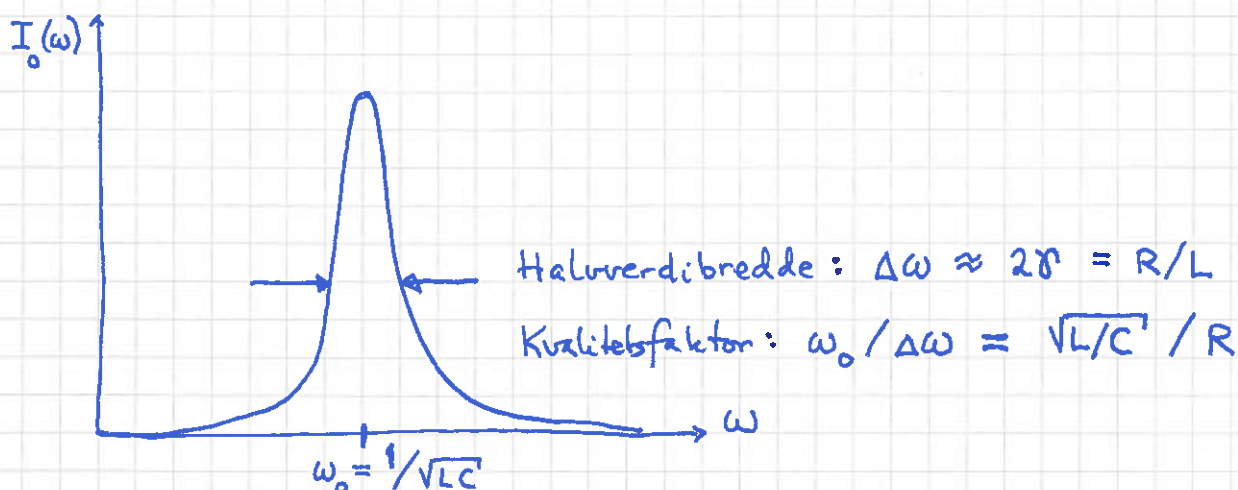
$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{med } Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\gamma = R/L$$

$$\text{Dvs: } I(t) = \dot{Q}(t) = \omega Q_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi) = I_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

med strøamplitude

$$I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega) = \frac{\omega V_0/L}{\sqrt{(\omega^2 - \frac{1}{LC})^2 + (R\omega/L)^2}}$$



Kan nå måle $I_0(\omega)$ ved å måle spenningen V_R over motstanden:

$$I(t) = V_R(t)/R = V_{R_0}(\omega) \cos(\omega t + \varphi) / R, \quad \text{dvs } I_0(\omega) = V_{R_0}(\omega) / R.$$