

KLASSISK MEKANIKK

[YF 1-10,14 ; TM 1-10,14 ; LL 1-6,9 ; HS 1-6]

Størrelser og enheter. SI-systemet. [YF1, TM1, HS1]

Fysisk størrelse = målbar størrelse for fysisk fenomen

Eks: Tid. $\tau = 1.0167 \text{ ns}$

↑ symbol ↑ måltall ↑ enhet, inkl. dekadisk prefiks
 (n = nano = 10^{-9})

$[\tau] = s$ "enheten til tau er sekund"

SI : 7 grunnenheter + div. sammensatte og avledete

Navn	Symbol(er)	Enhet	
lengde	$l, s, \Delta x, \dots$	m	} Mekanikk
masse	m, M, \dots	kg	
tid	t, τ, \dots	s	
elektrisk strømstyrke	I	A	ELmag
temperatur	T	K	Termisk
stoffmengde	n	mol	— " — (Kjemi)
lysstyrke	I	cd	Lite brukt
<hr/>			
hastighet	v	m/s	} avledete
akselerasjon	a	m/s^2	
kraft	F	$kg \cdot m/s^2 \equiv N$	
energi	E, K, U, W, ...	$Nm \equiv J$	
effekt	P	$J/s \equiv W$	
⋮			

Eks: Hvor lang tid bruker lyset på å gå 1 fot, i vakuum? (2)

Løsn: $c = 299792458 \text{ m/s}$, $l = 1 \text{ fot} = 12 \text{ in} = 12 \cdot 25.4 \text{ mm}$

$$\tau = l/c = 12 \cdot 25.4 \cdot 10^{-3} \text{ m} / 299792458 \text{ m/s}$$

$$\approx 1.0167 \cdot 10^{-9} \text{ s} = \underline{1.0167 \text{ ns}}$$

Eks: Hvor mye er en (engelsk!) pint i SI-enheter?

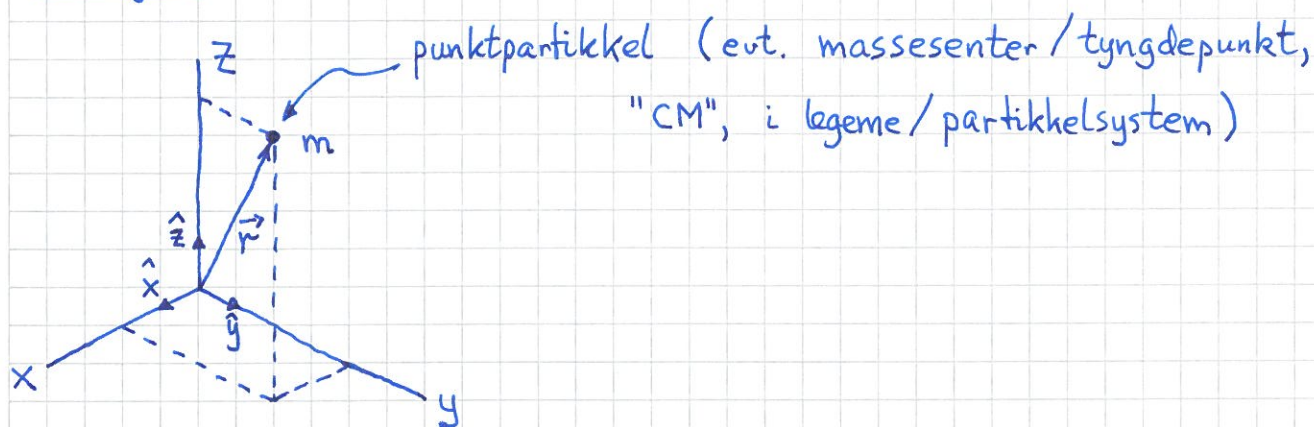
Løsn: 1 pint = 0.56826125 L \approx 0.568 dm³

$$= 0.568 \cdot (10^{-1} \text{ m})^3 = \underline{5.68 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}$$

Kinematikk [YF 2,3 ; TM 2,3 ; LL1 ; HS 2.1]

= beskrivelse av bevegelse

Posisjon:



$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$$

= posisjonen til m ved tid t (i kartesiske koord.)

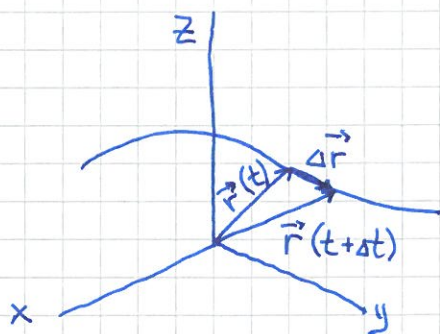
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ = enhetsvektorer i hver x-, y-, z-retning

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1 ; \quad [\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dimensjonsløse})$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1, \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

m's bevegelse beskrives ved banen $\vec{r}(t)$:

(3)



Forflytning (i løpet av tid Δt):

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

(= posisjonsendring)

Hastighet = forflytning pr tidsenhet:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Δt er (positiv) skalar, så $\vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$, dvs \vec{v} er tangentiell til banen

Akselerasjon = hastighetsendring pr tidsenhet:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Standard notasjon for derivert mhp tid t :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{etc.}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Med kartesiske komponenter:

(4)

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \\ \parallel \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} + \frac{dz}{dt} \hat{z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} \text{ etc.}$$

Tilsvarende: $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ etc.

M.a.o: Finner \vec{v} og \vec{a} fra \vec{r} og \vec{v} med derivasjon (mhp t)

\Rightarrow Må kunne finne \vec{r} og \vec{v} fra \vec{v} og \vec{a} med integrasjon:

Først i én dimensjon (dvs rettlinjet, 1D):

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v(t) dt \Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Tilsvarende:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^t a(t) dt \Rightarrow v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(t) dt$$

Generalisering til 3D: $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

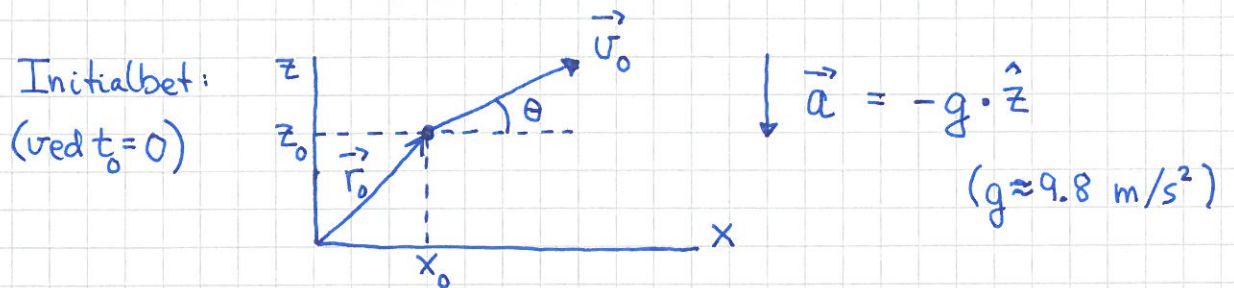
$$\int_{\vec{v}(t_0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt$$

Eks: $\vec{a} = \text{konstant}$, og initialbetingelser $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ (5)

Dermed: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0)$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (t - t_0)^2$$

Eks: Skrått kast i tyngdefeltet.



$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2 = x_0 + v_0 t \cos \theta$$

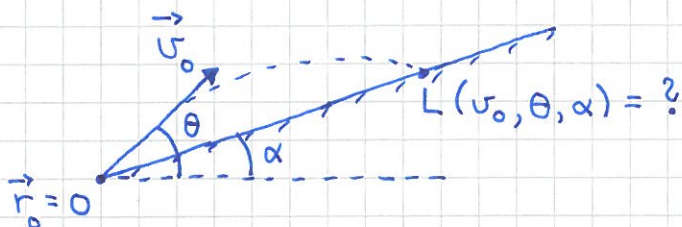
\parallel
 0

$$z(t) = z_0 + v_{0z} \cdot t + \frac{1}{2} a_z t^2 = z_0 + v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$

\parallel
 $-g$

Eliminasjon av t gir banen $z(x)$. [Parabel; vis dette!]

Øving 1: Skrått kast i motbakke.



Eks: Hastighetsavhengig akselerasjon, $a = a(v)$.

Gitt $v(0) = v_0$, bestem $v(t)$.

Løsn: $a(v) = dv/dt \Rightarrow dt = dv/a(v)$

$$\Rightarrow t = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{a(v)} \Rightarrow \dots$$

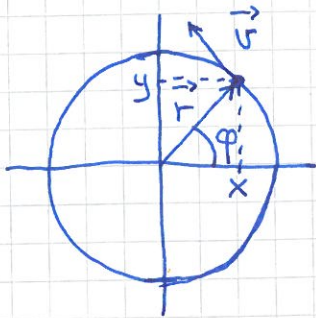
[Øving 1]

Sirkelbevegelse

[YF 3.4; TM 3.3; LL 1.7, 1.8; HS 2.1.2]

⑥

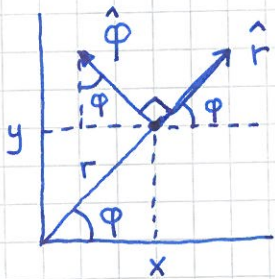
Først: $v = |\vec{v}| = \text{konst.}$ (uniform sirkelbevegelse)



Fra figur: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$
 $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{konst.}$
 $\vec{r} = r \cos \varphi \hat{x} + r \sin \varphi \hat{y}$
 $\tan \varphi = y/x$

Polarkoordinater: $r =$ avstand fra origo

$\varphi =$ vinkel mellom x-aksen og \vec{r}
(positiv mot klokka)



$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$
 $=$ enhetsvektor radiekt (bort fra origo)
 $\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$
 $=$ enhetsvektor angulært (mot klokka)

$$\hat{r} \cdot \hat{\varphi} = 0, \quad \hat{r} \cdot \hat{r} = \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} = 1$$

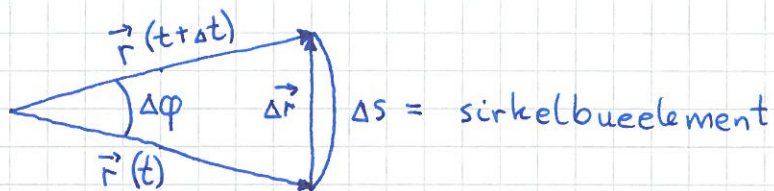
Vinkelhastighet = vinkelendring pr tidsenhet:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Vinkel = buelengde delt på radius:

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{r} \Rightarrow [\varphi] = \left[\frac{s}{r} \right] = \frac{m}{m} = 1 \quad (\text{evt. rad})$$

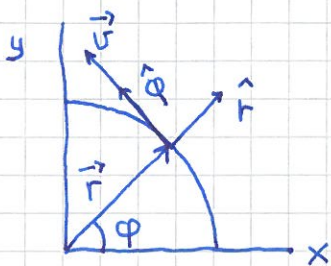
$$\Rightarrow [\omega] = [\varphi/t] = 1/s = s^{-1}$$



Hvis $\Delta t \rightarrow 0$: $\Delta \varphi \rightarrow 0$, $\Delta \vec{r} \perp \vec{r}$, $|\Delta \vec{r}| \approx \Delta s = r \cdot \Delta \varphi$

Dermed:
$$\underline{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta \varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = \underline{r \omega}$$

Retning på \underline{v} : $\underline{v} \parallel \Delta \vec{r}$ og $\Delta \vec{r} \perp \vec{r} \Rightarrow \underline{v} \perp \vec{r}$



$$\underline{v} = v \hat{\varphi} = r \omega \hat{\varphi}$$

$v = \text{konst.} \Rightarrow \omega = \text{konst.} \Rightarrow \varphi$ endres lineært med t :

$$\omega = d\varphi/dt \Rightarrow \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} d\varphi = \int_0^t \omega dt \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + \omega t = \omega t$$

↑ anta $\varphi(0) = 0$

Dermed:

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} = r \cos \omega t \hat{x} + r \sin \omega t \hat{y}$$

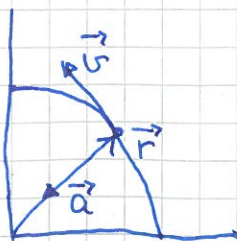
$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t) \hat{x} + \dot{y}(t) \hat{y} = -r\omega \sin \omega t \hat{x} + r\omega \cos \omega t \hat{y}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t) \hat{x} + \ddot{y}(t) \hat{y} = -r\omega^2 \cos \omega t \hat{x} - r\omega^2 \sin \omega t \hat{y}$$

Dvs:

$$\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}}$$

Akselerasjon ved uniform sirkelbevegelse
(sentripetalakselerasjon)



$$\vec{r} = r \hat{r}, \quad v = \omega r$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -r\omega^2 \hat{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$$

Flere nyttige størrelser for sirkelbevegelse:

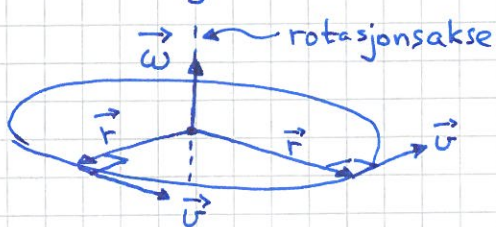
Vinkelakselerasjon: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ $[\alpha] = s^{-2}$

Periode: $T = \text{tid pr omdreining}$ $[T] = s$

Frekvens: $f = \text{antall omdreininger pr tidsenhet}$ $[f] = \text{Hz} = s^{-1}$

Dermed: $v = \frac{2\pi r}{T}$, $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$, $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

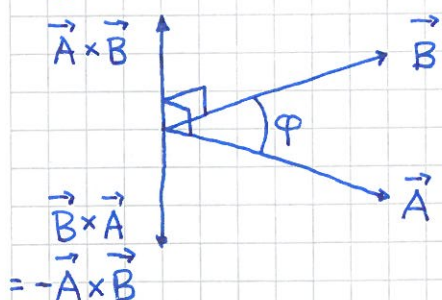
Vinkelhastighet som vektor:



La $\vec{\omega}$ peke langs rot.aksen

\Rightarrow kan da skrive $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Kryssprodukt:



- $\vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{A}$ og \vec{B}
- Fortegn via høyrehandsregel
- $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \varphi$
 $= A \cdot B \cdot \sin \varphi$

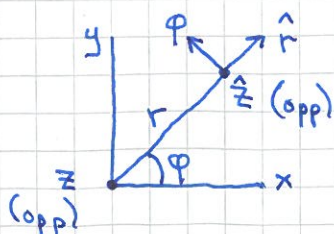
For sirkelbevegelsen:

$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \frac{\pi}{2} = \omega r = v$, OK!

$\vec{\omega}$ opp $\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ mot klokka (og omvendt)

Ehetsvektorer og kryssprodukt:

$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$, $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$, $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$



$\hat{r} \times \hat{\phi} = \hat{z}$, $\hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{r}$, $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\phi}$

Newtons lover [YF 4,5; TM 4,5; LL 2,3; HS 2] (9)

Empiriske lover (ders: basert på eksperimenter, erfaring):

N1: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$

Null netto ytre kraft \Rightarrow legemet forblir i ro eller i rettlinjet bevegelse med uendret hastighet.

N2: $\vec{F} = m\vec{a}$

Netto ytre kraft $\vec{F} \Rightarrow$ legemet får akselerasjon proporsjonal med \vec{F} ; $m =$ legemets masse

N3: $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

Hvis A virker på B med kraft \vec{F}_{AB} , så virker B på A med kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$. Legemene A og B vekselvirker.

Enhet: $[F] = [m \cdot a] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$ (newton)

Fundamentale krefter i naturen

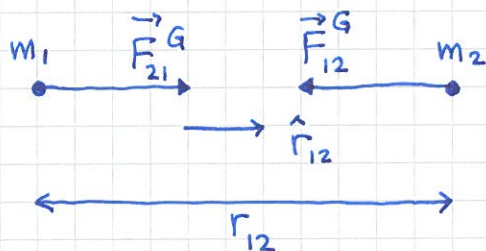
[YF 5.5; TM 4.2; LL 2.1; HS 2.2.2]

- Gravitasjon: Svak tiltrekning mellom legemer pga masse
- Elektromagnetisk: Tiltrekning eller frastøtning pga elektrisk ladning

(• Svake og sterke kjernekrefter: Kort rekkevidde, hvor ca 10^{-18} m og 10^{-15} m, beskriver hvor radioaktivitet og at kjernepartiklene holdes sammen.)

Newton's gravitasjonslov:

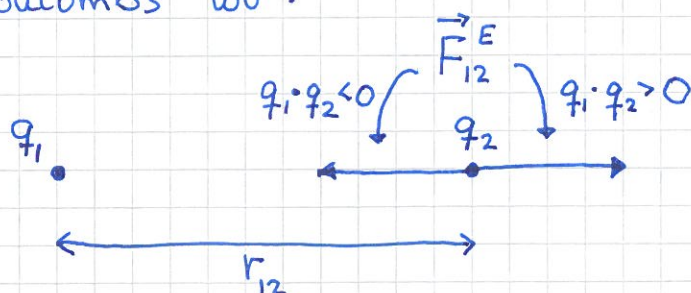
(10)



$$\vec{F}_{12}^G = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2$$

Coulombs lov:



$$\vec{F}_{12}^E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$[q] = \text{C (coulomb)}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2 ; \epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2$$

(vakuumpermittiviteten)

Mellom 2 elektroner: $F^G / F^E \sim 10^{-43}$

[Sjekk selv! $m \sim 10^{-30} \text{ kg}$, $q \sim 10^{-19} \text{ C}$]

Mellom jorda og månen: $F^G / F^E \sim 10^{15}$

[Selv om vi antar netto ladning $q \sim 10^6 \text{ C}$ på begge]

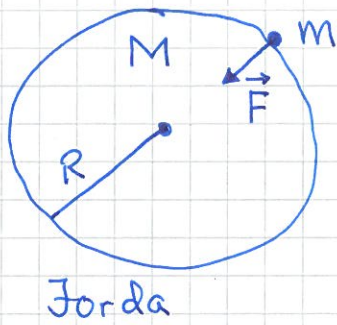
"Dagligdagse" objekter er (omtrent) elektrisk nøytrale

\Rightarrow coulombkreftene er i stor grad nøytralisert

\Rightarrow "hverdagen" styres av både F^G og F^E

Masse og tyngde

[YF 4.4; TM 4.4; LL 2.5; HS 2.2.1] (11)



$$M \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad R \approx 6370 \text{ km}$$

$\Rightarrow m$ ved jordas overflate trekkes mot jordas sentrum med tyngdekraften \vec{F} .

$$F = |\vec{F}| = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot g$$

med $g = G \cdot M / R^2 \approx 9.8 \text{ m/s}^2 =$ tyngdens akselerasjon

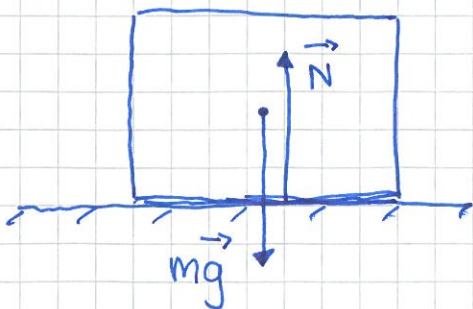
Hvis mg er eneste kraft : fritt fall !

$$\text{Da blir : } mg \stackrel{N2}{=} ma, \quad \text{dvs } \underline{a = g}$$

Coulombkrefter i mekanikken : Kontaktkrefter

[YF 4.1; TM 4.5; LL 3; HS 2.3]

Trykk-kraft (Normalkraft) :

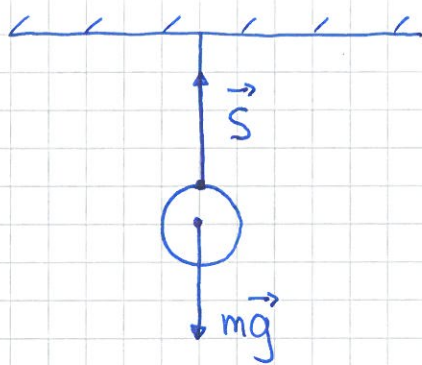


$$\text{kloss i ro} \stackrel{N1}{\Rightarrow} N = mg$$

Normalkraften N er netto frastøtende coulombkraft fra underlaget på klossen.

[Spm: Hva er motkreftene ($N3!$) til \vec{N} og \vec{mg} ?]

Strekk-kraft (Snordrag):

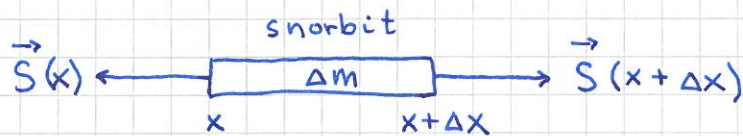


kule i ro $\xrightarrow{N1} S = mg$

Snordraget S er netto tiltrekkende coulombkraft ~~fra snora~~ fra snora på kula

[Spm: Hva er motkraften til \vec{S} ?]

Lett snor/stang antas ofte masseløs, $m_{snor} \approx 0$.

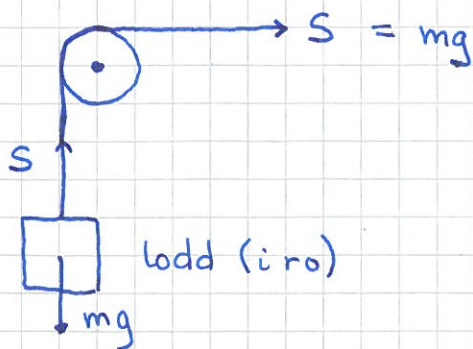


$$N2: \vec{S}(x+\Delta x) + \vec{S}(x) = \Delta m \cdot \vec{a}$$

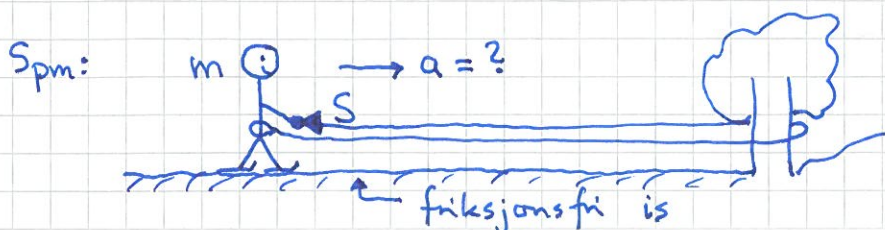
$$\Rightarrow \vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x) \text{ hvis } \Delta m = 0 \text{ (og/eller } \vec{a} = 0)$$

\Rightarrow like stor $S = |\vec{S}|$ langs hele snora

Retningsendring med kant eller trinse:



[Spm: Hva hvis vi har friksjon mellom tau og trinse/sylinder?]

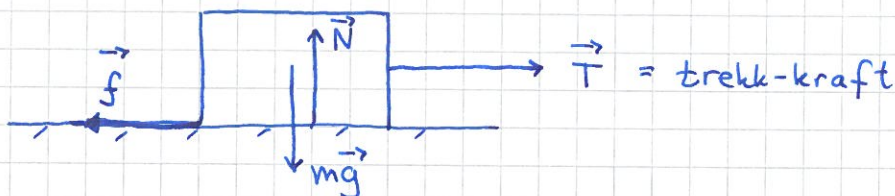


Friksjon [YF 5.3 ; TM 5.1, 5.2 ; LL 3.1 ; HS 2.3]

(13)

coulombkraft / kontaktkraft \vec{f} rettet mot (potensiell) relativ bevegelse

Tørr friksjon :



Statisk (kloss i ro) : $N \Rightarrow f = T$

Empirisk : $f_{\max} = \mu_s N$

Kinetisk (kloss i bevegelse) : $f = \mu_k N$

Friksjonskoeffisienter : μ_s, μ_k Enhet : $[\mu] = 1$

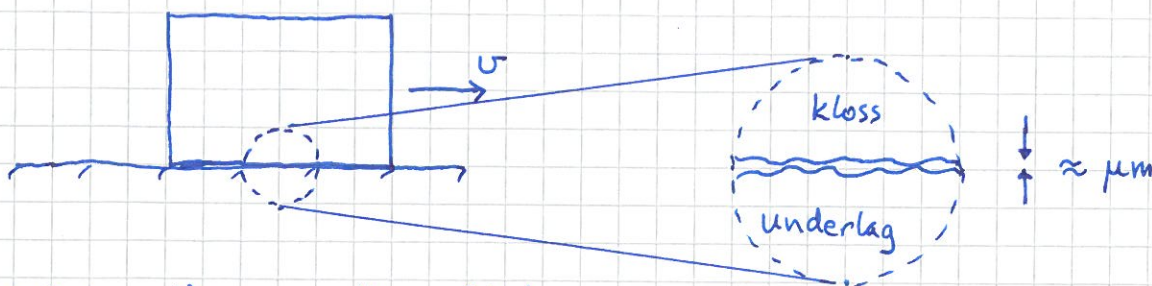
Noen tallverdier :

Tre mot tre : $\mu_s = 0.25 - 0.50$ $\mu_k \approx 0.2$

Gummi mot tørr asfalt : $\mu_s \approx 1.0$ $\mu_k \approx 0.8$

— " — våt — " — : $\mu_s \approx 0.3$ $\mu_k \approx 0.25$

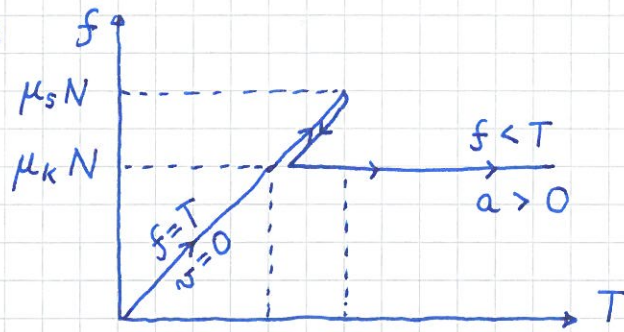
Hvorfor er $\mu_k < \mu_s$?



$v = 0$: godt grep mellom flatene

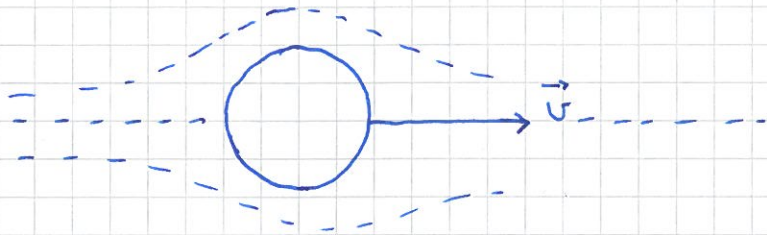
$v > 0$: "flyter" oppå

Dermed:



Friksjon i fluider (Våt friksjon)

[YF 5.3; TM 5.2; (LL 8); HS 2.3.4]



- liten $v \Rightarrow$ pen, laminær strømning av fluidet

$$\vec{f} = -k \vec{v} = -k v \hat{v} \quad \left[\begin{array}{l} \text{kan utledes fra} \\ \text{Newton's lover} \end{array} \right]$$

Kule: $\vec{f} = -6\pi\eta R \vec{v}$ Stokes' lov (Lab nr 1)

$R =$ kulas radius

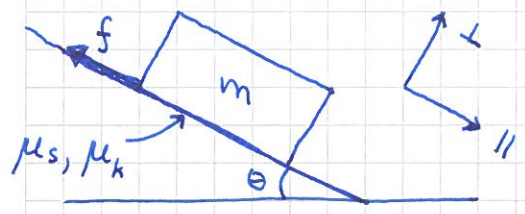
$\eta =$ fluidets viskositet

- stor $v \Rightarrow$ turbulent strømning

$$\vec{f} = -D v^2 \hat{v} \quad (D \text{ for "drag"})$$

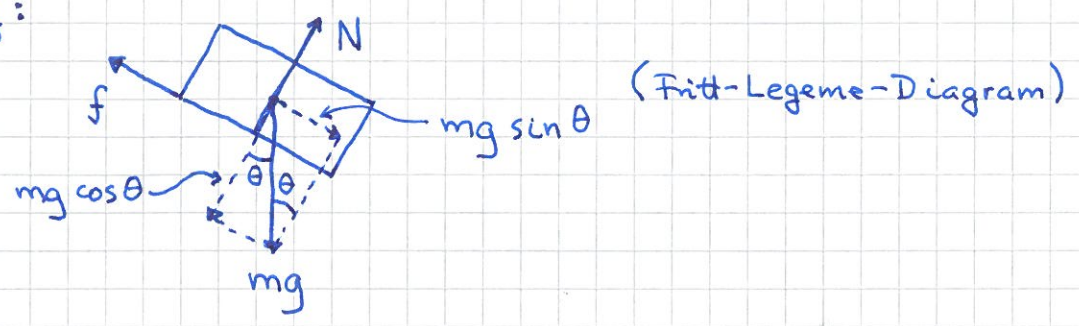
[empirisk]

Lett eks: Kloss på skråplan



- Hva er f, med kloss i ro?
- " — i beregelse?
- Minimal μ_s for kloss i ro?
- $\mu_s < \mu_s^{min} \Rightarrow a_{||} = ?$

Løsning:



• I ro: $\sum F_{||} = 0 \Rightarrow \underline{f = mg \sin \theta}$

I beregelse: $f = \mu_k N = \underline{\mu_k mg \cos \theta}$

(da $\sum F_{\perp} = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta$)

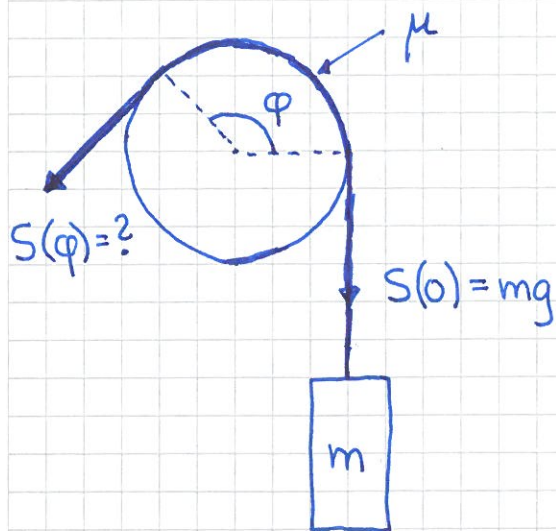
• I ro: $f \leq \mu_s N \Rightarrow$ begynner å gli når $f = \mu_s^{min} \cdot N$
 $\Rightarrow \mu_s^{min} = f/N = mg \sin \theta / mg \cos \theta = \underline{\tan \theta}$

• Hvis $\mu_s < \mu_s^{min}$, dvs $\theta > \arctan \mu_s$:

$$a_{||} = \sum F_{||} / m = (mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta) / m$$

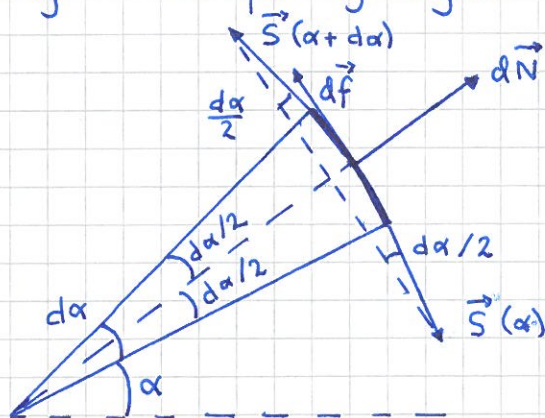
$$= \underline{g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}$$

Vanskelig eks: Tau rundt sylinder



Eksp. med plastrør, hyssing og lodd viser at snordrag $S(\varphi)$ som er nødvendig for å holde lodd oppe, evt. heise opp lodd, avhenger sterkt av φ , der φ = vinkelen med kontakt mellom hyssing og rør.
Bestem $S(\varphi)$.

Løsning: Se på hyssingbit mellom α og $\alpha + d\alpha$:



- \vec{S} = kraft fra resten av hyssingen på hyssingbiten
- $d\vec{N}$ = normalkraft fra rør på hyssingbit
- $d\vec{f}$ = friksjonskraft ————— " ————— ; $df \leq \mu \cdot dN$

Minste nødvendige $S(\varphi)$ finnes når $df = \mu dN$.

Lodd i ro når $\vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$ (N1)

Tangentielt: $S(\alpha + d\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} + df = 0$

Normalt: $S(\alpha + d\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$

Når $d\alpha \rightarrow 0$:

$$\cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

$$S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha) \approx 2S(\alpha)$$

$$S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

Dermed:

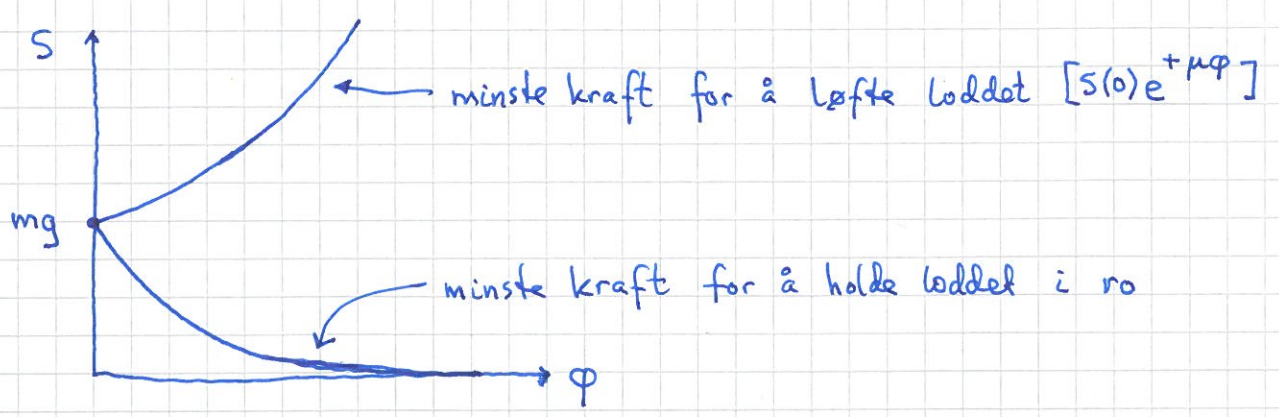
$$dS + \mu dN = 0$$

$$2S \cdot \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

$$\Rightarrow \int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = - \int_0^{\varphi} \mu d\alpha$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln S(\varphi) - \ln S(0)}_{= \ln \frac{S(\varphi)}{S(0)}} = -\mu\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{S(\varphi) = S(0) e^{-\mu\varphi}} \quad S(0) = mg$$

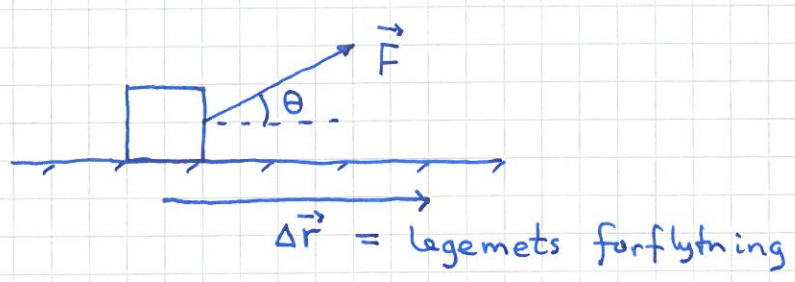


Med $\mu = 0.2$ og $2 \frac{1}{4}$ "omdreining", dvs $\varphi = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} = 9\pi/2$:

$$S(\varphi)/S(0) = \exp(-0.2 \cdot 9\pi/2) \approx 0.06$$

Arbeid og energi [YF 6,7; TM 6,7; LL 4; HS 3]

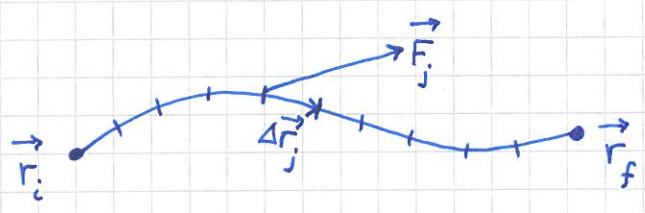
Arbeid [YF 6.1-6.3; TM 6.1-6.3; LL 4.1; HS 3.1]



$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = \text{arbeid utført av kraft } \vec{F} \text{ på legemet}$$

$$[W] = [F \cdot r] = \text{Nm} = \text{J (joule)}$$

Generelt:



Arbeid utført ved forflytning fra \vec{r}_i til \vec{r}_f :

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta \vec{r}_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Effekt [YF 6.4; TM 6.3; LL 4.1; HS 3.1]

effekt $\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{(energi)}}{\text{arbeid pr tidsenhet}}$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

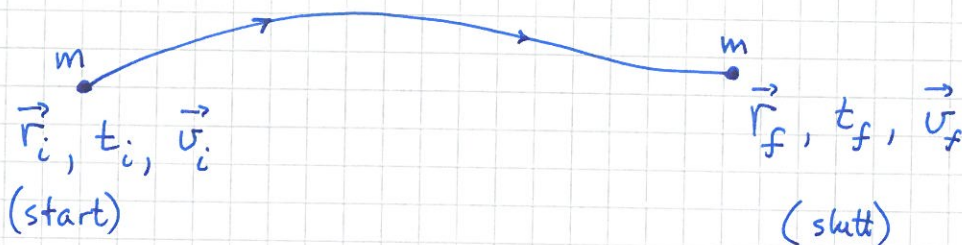
$$[P] = [W/t] = \text{J/s} = \text{W (watt)}$$

Eks: Om på 1000 W står på i 1 time. Energi forbruk = ?

$$\text{Løsn: } \Delta W = P \cdot \Delta t = 1 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h} = \underline{\underline{1 \text{ kWh}}} = 1000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = \underline{\underline{3.6 \text{ MJ}}}$$

Kinetisk energi [YF 6.2; TM 6.1; LL 4.2; HS 3.1]

(19)



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} dt = m \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{=u^2} \right) dt$$
$$= \frac{1}{2} m u_f^2 - \frac{1}{2} m u_i^2$$

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2 = \text{kinetisk energi}$$

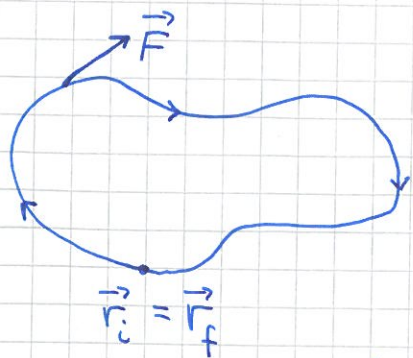
$$\Rightarrow \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

Arbeid W utført av (netto) ytre kraft \vec{F} tilsvarende endringen ΔK i legemets kinetiske energi

Konservativ kraft. Potensiell energi. Energibevarelse.

[YF 7.1-7.4; TM 7.1-7.3; LL 4.3-4.5; HS 3.2.1]

Konservativt system = system uten tap av mekanisk energi (dvs uten dissipasjon) til andre energiformer (som varme)



(rundtur; lukket kurve)

Hvis \vec{F} er konservativ, er $K_f = K_i$ (og $u_f = u_i$); dvs $W = \Delta K = 0$.

$$\text{Dermed: } \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Standard notasjon:

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

\oint : integral rundt lukket kurve

Potensiell energi:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Her er \vec{F} en kons. kraft, og vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0$

Mekanisk energibevarelse:

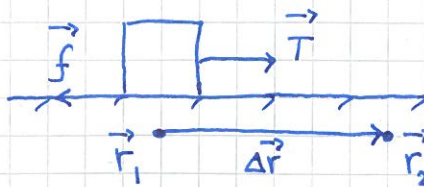


$$U_1 - U_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

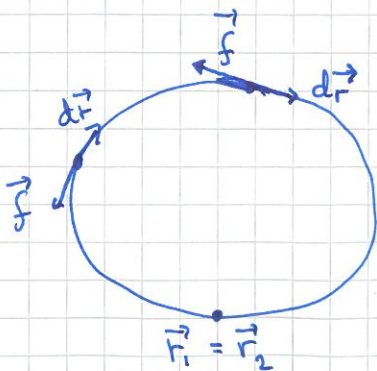
Dvs: Total mekanisk energi, $E = K + U$, er konstant for et konservativt system

Friksjonsarbeid:



$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{fordi } \vec{f} \text{ er rettet mot } d\vec{r}$$

\Rightarrow friksjonsarbeidet W_f "går tapt" (som varme)

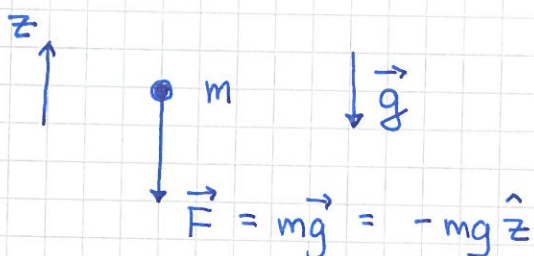


$$\Rightarrow \oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$$

\Rightarrow friksjonskraft \vec{f} er ikke konservativ

Eks: Tyngdefeltet

(21)

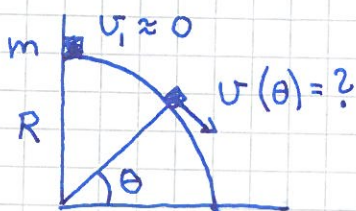


- Velg $U(0) = 0$ og bestem $U(z)$
- Anta $v(0) = 0$ og bestem $v(z)$ ($z < 0$)

Løsning: • $U(z) = - \int_0^z \underbrace{(-mg\hat{z})}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{(\hat{z} dz)}_{d\vec{r}} = \underline{\underline{mgz}}$

• $E(0) = U(0) + K(0) = 0 = U(z) + K(z)$
 $= mgz + \frac{1}{2} m v(z)^2$
 $\Rightarrow v(z) = \underline{\underline{\sqrt{-2gz}}}$ ($z < 0$)

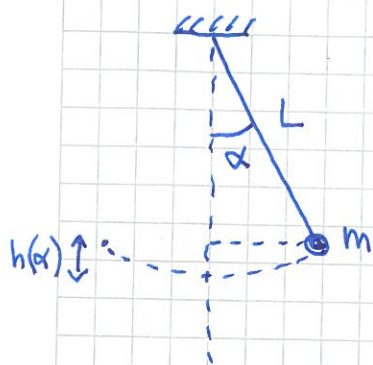
Eks: Gli på kuleflate (uten friksjon)



Løsn: E er bevart
 $\Rightarrow \frac{1}{2} m v(\theta)^2 + mgR \sin \theta = mgR$
 $\Rightarrow v(\theta) = \underline{\underline{\sqrt{2gR(1 - \sin \theta)}}$

[Spm: Fra der hvor normalkrafta N fra underlaget forsvinner ($N=0$) har vi et "skrått kast". Ved hvilken vinkel θ skjer dette?]

Eks: Matematisk pendel



Bestem $E(\alpha, \dot{\alpha})$.

Løsn: $U(\alpha) = mgh(\alpha) = mgL(1 - \cos \alpha)$ [Velgen $U(0) = 0$]
 $K(\dot{\alpha}) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (L\dot{\alpha})^2$

$\Rightarrow E(\alpha, \dot{\alpha}) = \underline{\underline{\frac{1}{2} m L^2 \dot{\alpha}^2 + mgL(1 - \cos \alpha)}}$

Swingninger

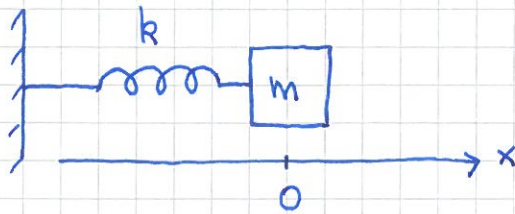
[YF 14; TM 14; LL 9; HS 6]

(22)

= oscillasjoner = periodisk oppførsel omkring likevekt

Eks: masse/fjær, pendel, gitarstreng, vibrerende atomer i krystall, ...

Harmonisk oscillator [YF 14.2; TM 14.1; LL 9.1-9.3; HS 6.1]



Likevekt ($F=0$) med m i $x=0$.

Strukket fjær ($x > 0$):

Sammenpresset fjær ($x < 0$):

$$\vec{F} = -k \times \hat{x}$$

Hookes lov

Ideell fjær: $F \sim |x|$

$$N2: -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\text{Innfør } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Ligning for
harm. osc. i
1D

Generell løsning:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{evt. } x(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t$$

2.ordens diff. lign. \Rightarrow 2 integrasjonskonstanter,

[A og φ fastlegges via 2 initialbetingelser, φ f.eks. $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$]

[$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \Rightarrow$ sammenheng mellom A, φ og B, C]

A = amplitude = max utsving

ω = vinkel-frekvens = vinkelhastighet

$[\omega] = s^{-1}$

T = $2\pi/\omega$ = periode = tid pr svingning

$[T] = s$

f = T^{-1} = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet

$[f] = Hz = s^{-1}$

$\omega t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstant

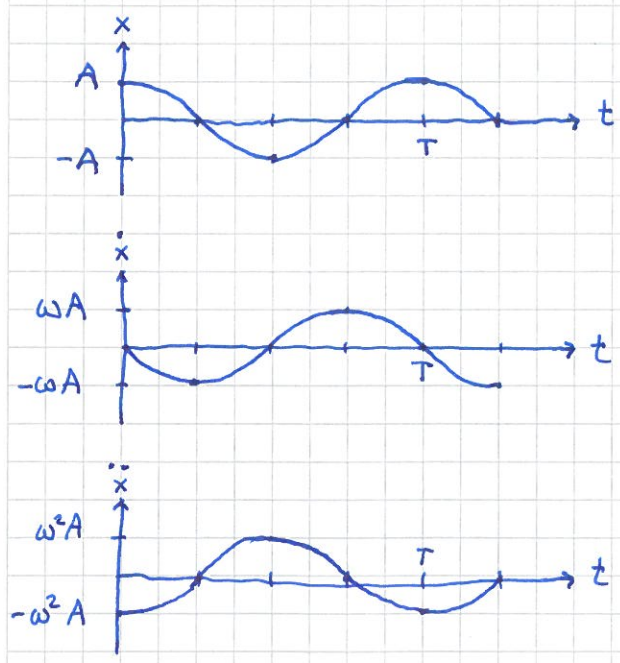
$[\varphi] = 1$

$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

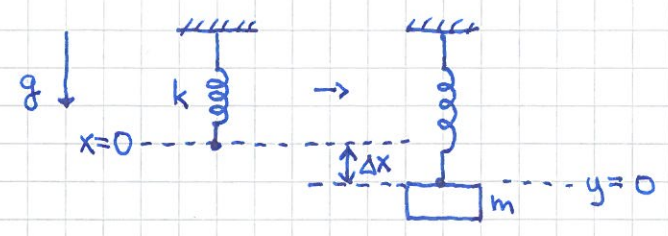
$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = \omega A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$

$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi) = -\omega^2 x(t)$

Anta f.eks. $\varphi = 0$ og $A > 0$:



Hvis vertikalt i tyngdefeltet (Øving 3 og Lab):



\Rightarrow Harmonisk svingn. om $y=0$, med $\omega = \sqrt{k/m}$ som før.

Energi i harmonisk oscillator

[YF 14.3; TM 14.2; LL 9.4 ~~§§~~]

Massens kinetiske energi:

$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} m \underbrace{\omega^2 A^2}_{=k} \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Potensiell energi i fjæra:

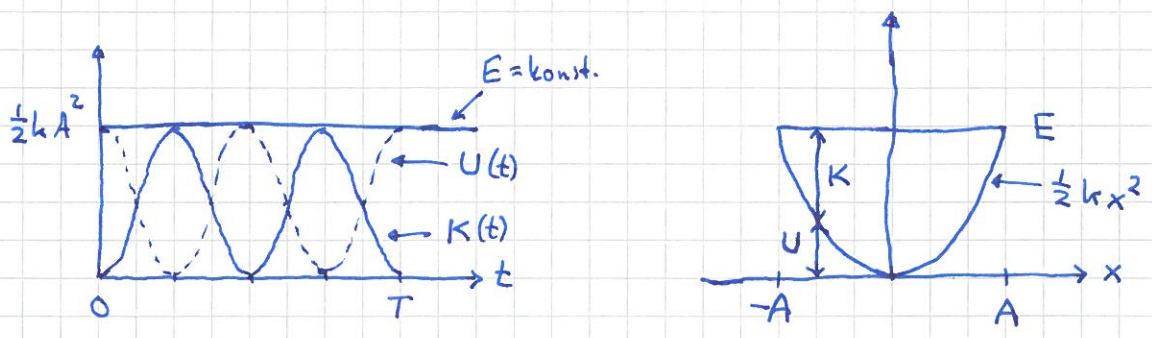
$$U = - \int_0^x F(x) \cdot dx = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\Rightarrow U(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Total energi: $E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \text{konstant}$

\Rightarrow vi har konserverbart system; E er bevart

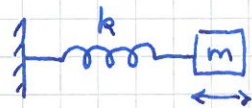
Anta $\varphi = 0$:



Enkel harmonisk oscillator, oppsummering:

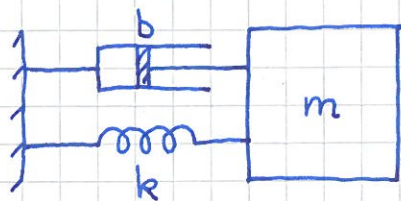
- F er proporsjonal med utsvinget fra likevekt
- U ————— " ————— kvadraten av utsvinget
- Bevegelsesligning: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
- "Utsving" kan være lengde, vinkel etc

Fra sist:



$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 0; \quad \omega = \sqrt{k/m} \\ x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \text{ Enkel harmonisk oscillator}$$

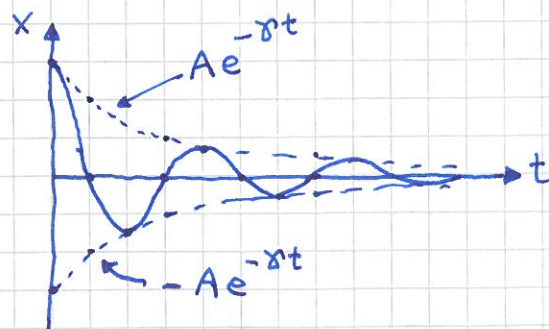
Dempet svingning [YF 14.7; TM 14.4; LL 9.7; HS 6.2.1]

Friksjon \Rightarrow fri svingninger dempes (og dør ut)Antar $f = -b\dot{x}$ (som for langsom bevegelse i fluid; s.14)

$$\begin{aligned} \text{N2: } -kx - b\dot{x} &= m\ddot{x} \\ \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ [\gamma] &= [\omega_0] = \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Underkritisk demping, $\gamma < \omega_0$ (dvs $b < 2m\sqrt{k/m} = \sqrt{4k \cdot m}$)

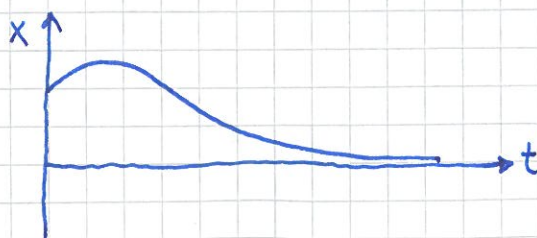
$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi); \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



- redusert frekvens pga demping ($\omega < \omega_0$)
- amplituden, $Ae^{-\gamma t}$, avtar eksponentielt med t
- A, φ fastlegges med 2 initialbetingelser:

Overkritisk demping, $\gamma > \omega_0$

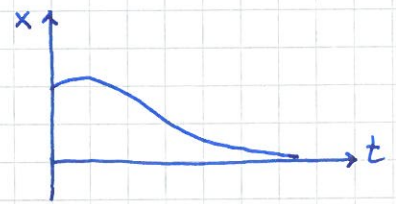
$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}; \quad \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$



(dvs ingen svingninger)

Kritisk demping, $\delta = \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\delta t} + B t e^{-\delta t}$$

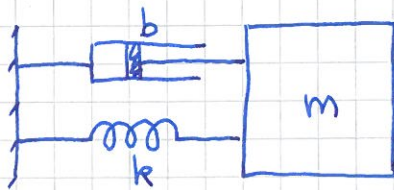


(26)

Eks: Støtdempere i bil dempes nær kritisk

\Rightarrow mest behagelig på humpete vei

Tvingen svingning. Resonans [YF 14.8; TM 14.5; LL 9.9; HS 6.3]



$F_y(t) = F_0 \cos \omega t =$ ytre kraft, antas harmonisk

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad \left[\begin{array}{l} \text{inhomogen 2.ordens} \\ \text{diff. ligning} \end{array} \right]$$

Løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

der homogen løsn. x_h oppfyller $\ddot{x}_h + 2\delta\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$

og partikulær løsn. x_p — " — $\ddot{x}_p + 2\delta\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$

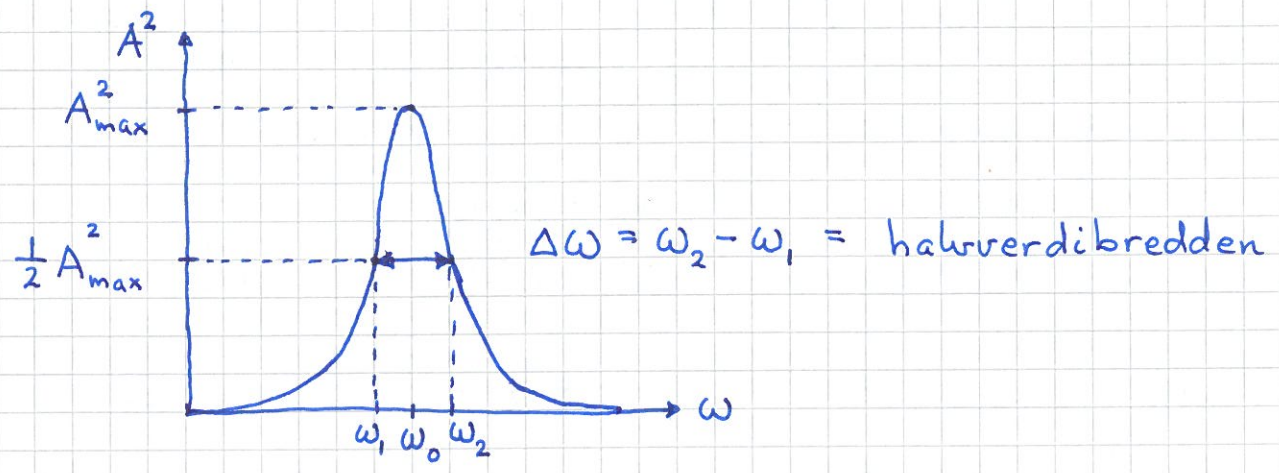
I starten (dvs: før $e^{-\delta t}$ blir mye mindre enn 1) bidrar både x_h og x_p til et (som regel) komplekst innsvingningsforløp (jf Laboppg.).

Etter "lang tid", slik at $\delta t \gg 1$ og $e^{-\delta t} \approx 0$, vil $x_h(t) \rightarrow 0$, og $x(t) \approx x_p(t)$.

"Gjetter" $x_p(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$, verifiseres ved innsetting, og finner den frekvensavhengige amplituden.

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\delta = \frac{b}{m}$$

som viser at vi får resonans: Med svak demping (dvs liten δ) og ytre kraft med frekvens ω i nærheten av systemets egenfrekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, så blir amplituden A stor:



$\Delta\omega$ refererer til oscillatorens energi, som er prop. med A^2 (se s. 24). Liten $\delta \Rightarrow$ skarp resonans, med $\Delta\omega \approx 2\delta$.

Resonanstoppens Q-faktor (Q for "quality"):

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (\gg 1 \text{ hvis } \delta \ll \omega_0)$$

Frekvensavhengig fasekonstant:

$$\varphi(\omega) = \arctan \left\{ \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega} \right\}$$

Tilført effekt av $F_y(t) = F_0 \cos \omega t$ ved resonans, $\omega \approx \omega_0$:

$$P(t) = F_y(t) \cdot \dot{x}_p(t) = F_0 \cos \omega t \cdot \omega A(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = \arctan 0 = 0, \text{ og } A = A(\omega_0) = A_{\max} = \frac{F_0}{b \cdot \omega_0}$$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{F_0^2}{b} \cdot \cos^2 \omega_0 t \geq 0 \text{ hele tiden;}$$

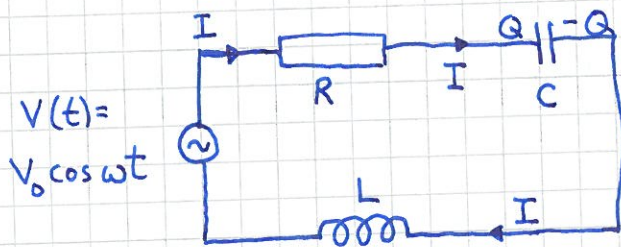
dvs maksimal tilført effekt ved resonans!

Elektrisk svingekrets

(Mer om dette mot slutten av kurset, men nevnes nå, da det kommer på laben.)

(27B)

4104
12.09.1
4115
17.09.13



$$I = dQ/dt = \dot{Q}$$

- R : motstand
- C : kondensator
- L : spole

- Spenning over motstand R : $V_R = R \cdot I = R \cdot \dot{Q}$ (Ohms lov)
- " ———— kapasitans C : $V_C = Q/C$
- " ———— induktans L : $V_L = L \cdot dI/dt = L \cdot \ddot{Q}$

Kirchhoffs spenningsregel $\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \cos \omega t$

Dvs nøyaktig samme diff.lign. for Q, ladningen på kondensatoren, som for x, massens utsving fra likevekt, i det mekaniske svingesystemet : $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

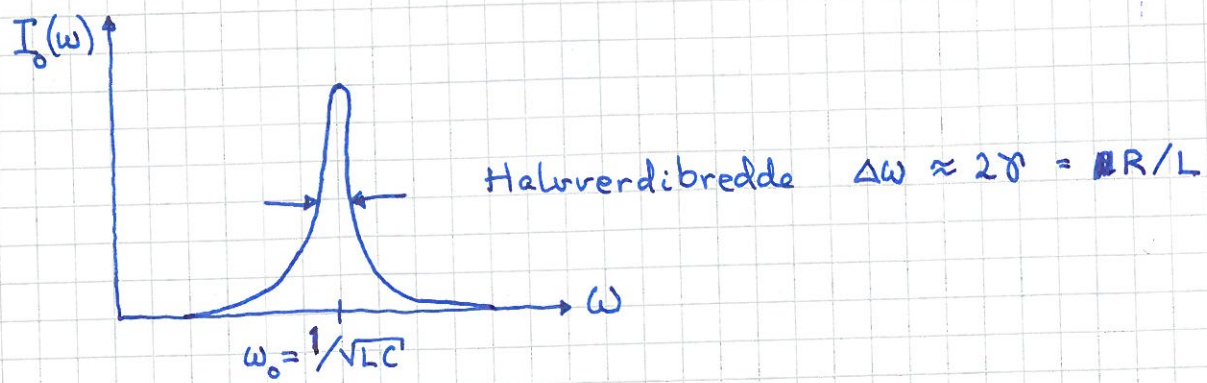
Vi har dermed analoge ("tilsvarende") størrelser :

$m \leftrightarrow L, \quad b \leftrightarrow R, \quad k \leftrightarrow 1/C, \quad x \leftrightarrow Q, \quad \dot{x} \leftrightarrow I$
 $\omega_0^{mek} = \sqrt{k/m} \leftrightarrow \omega_0^{el} = \sqrt{1/LC}$ osv.

$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = \omega Q_0(\omega) \cos(\omega t + \phi)$

med $Q_0(\omega) = (V_0/L) / \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$; $2\gamma = R/L$

Resonans, dvs stor strømamplitude $I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$, når $\omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$:



Eks (LAB): $L = 22 \text{ mH}, \quad C = 0.15 \mu\text{F}, \quad R = 20 \Omega$

$\Rightarrow f_0 = 2.77 \text{ kHz}, \quad \Delta f \approx 0.29 \text{ kHz}, \quad Q = f_0/\Delta f \approx 20$

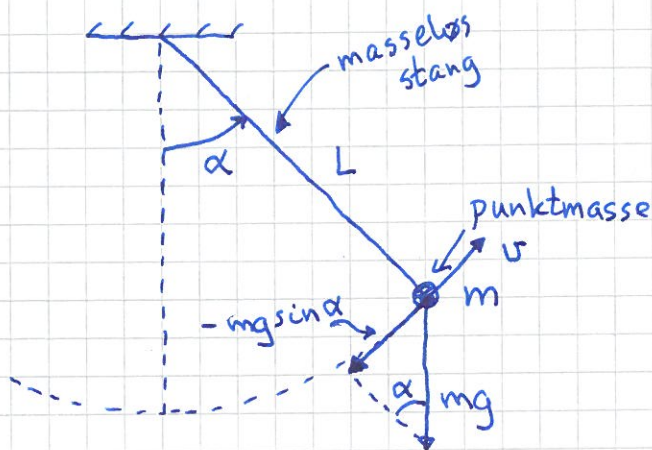
Eksempel, inkl. numerisk løsningsmetode

[TM 5.4]

(28)

(Øving 4, oppgave 1)

Matematisk pendel (se s. 21, samt øving 2, oppg. 4) :



N2 || sirkelbuen :

$$-mg \sin \alpha = m a_{||}$$

$$a_{||} = L \ddot{\alpha}$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{g}{L} \sin \alpha = 0$$

Hvis små utsving, $|\alpha| \ll 1$: $\sin \alpha \approx \alpha$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{g}{L} \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \left. \vphantom{\alpha(t)} \right\} \text{ Enkel harmonisk oscillator}$$

med $\omega = \sqrt{g/L}$, dvs $T = 2\pi\sqrt{L/g}$

Hvis større utsving : $\ddot{\alpha} + \frac{g}{L} \sin \alpha = 0$ kan ikke løses analytisk ; numerisk løsningsmetode er nødvendig.

Enkleste metode er såkalt "forward Euler" :

Vi har (pr def.)

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t+dt) - \dot{\alpha}(t)}{dt} \Rightarrow \dot{\alpha}(t+dt) = \dot{\alpha}(t) + \ddot{\alpha}(t) dt$$

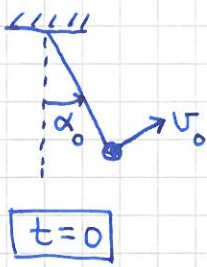
$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\alpha(t+dt) - \alpha(t)}{dt} \Rightarrow \alpha(t+dt) = \alpha(t) + \dot{\alpha}(t) dt$$

La $dt \rightarrow$ endelig tidssteg Δt og " $=$ " \rightarrow " \approx " :

$$\alpha(t+\Delta t) \approx \alpha(t) + \dot{\alpha}(t) \Delta t$$

$$\dot{\alpha}(t+\Delta t) \approx \dot{\alpha}(t) + \ddot{\alpha}(t) \Delta t \quad \stackrel{\text{her}}{=} \dot{\alpha}(t) - \Delta t \cdot \frac{g}{L} \cdot \sin \alpha(t)$$

Dermed, med initialbetingelser $\alpha(0) = \alpha_0$ og $v(0) = v_0$, (29)
 dvs $\dot{\alpha}(0) = v_0/L$:



$$\alpha(\Delta t) \approx \alpha(0) + \dot{\alpha}(0) \Delta t = \alpha_0 + \frac{v_0}{L} \Delta t$$

$$\ddot{\alpha}(\Delta t) \approx \ddot{\alpha}(0) + \ddot{\alpha}(0) \Delta t = \frac{v_0}{L} - \Delta t \cdot \frac{g}{L} \cdot \sin \alpha_0$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha[(n+1) \cdot \Delta t] &\approx \alpha[n \cdot \Delta t] + \dot{\alpha}[n \cdot \Delta t] \cdot \Delta t \\ \dot{\alpha}[(n+1) \cdot \Delta t] &\approx \dot{\alpha}[n \cdot \Delta t] + \ddot{\alpha}[n \cdot \Delta t] \cdot \Delta t \end{aligned} \right\} n=0,1,2,\dots$$

Kan nå blant annet:

- plote $\alpha(t)$, $\dot{\alpha}(t)$ etc.
- regne ut $K(t)$, $U(t)$ og $E(t)$ og sjekke energibevarelse (se s. 21)
- sammenligne numerisk løsning med harm. osc.-tilnærmelsen
- inkludere friksjon, med $f = -bv$ evt $f = -Dv^2$ (se s. 14)
- inkludere ytre kraft $F_y(t)$

etc. etc.

Andre (og bedre) num. metoder for løsn. av ordinære diff.lign:

- Verlet
- Runge-Kutta

Verlet:
$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t+\Delta t/2) - \dot{\alpha}(t-\Delta t/2)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} - \frac{\alpha(t) - \alpha(t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\alpha(t+\Delta t) - 2\alpha(t) + \alpha(t-\Delta t)}{\Delta t^2}$$

Impuls og impulsbevarelse [YF8; TM8; LL5; HS 3.6,3.7] (30)

[Terminologi: impuls \equiv beregelsesmengde]

[Engelsk: (linear) momentum]

N2 for legeme med (konstant) masse m :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

impuls = masse \cdot hastighet

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad [p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Dermed:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad \text{N2}$$

som gir

Loen om impulsbevarelse:

Hvis sum av ytre krefter på et legeme er null, er legemets impuls bevart: $\vec{F}=0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$

Kollisjoner [YF 8.3+8.4; TM 8.3; LL 5.3; HS 3.7.1]

= (som regel kortvarige) støt mellom legemer

Elastisk støt: $\Delta K = 0$ (energien er bevart)

Uelastisk støt: $\Delta K < 0$ (— " — ikke bevart)

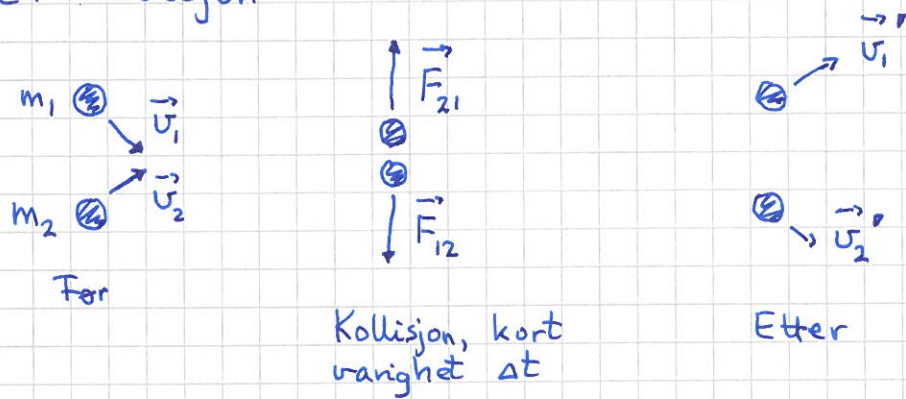
Fullstendig uelastisk støt: Legemene henger sammen og har felles hastighet etter kollisjonen.

(Gir maksimalt energitap $|\Delta K|$.)

Tapt mekanisk energi $\Delta K \rightarrow$ deformasjon, varme, lyd, ...

Men: Dersom $\vec{F}_{\text{ytre}} = 0$ (evt. neglisjerbar) under kollisjonen, er $\Delta \vec{p} = 0$ for alle typer kollisjoner.

Har typisk store men ukjente indre krefter i en kollisjon:



N_3 garanterer impulsbevarelse for systemet $m_1 + m_2$:

$$\vec{F}_{21} \stackrel{N_3}{=} -\vec{F}_{12}$$

$$\stackrel{N_2}{\Rightarrow} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\Rightarrow d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

Eks: Fullstendig uelastisk støt.

Før: $m \xrightarrow{u} \quad \leftarrow v \quad M$

Etter: $m+M \rightarrow u'=?$

Løsn: $p_{\text{før}} = m u - M v$
 $= p_{\text{etter}} = (m+M) u'$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u' = \frac{m u - M v}{m + M}}}$$

Eks: $\langle F \rangle$ på bordtennisball = ? $\langle F \rangle / mg = ?$

(32)

Løsning: $m = 2.7 \text{ g}$, $v_i \sim 10 \text{ m/s}$, $v_f \sim 30 \text{ m/s}$, $\Delta t \sim 1 \text{ ms}$

$$\Rightarrow \langle F \rangle = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = \frac{2.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 40 \text{ m/s}}{10^{-3} \text{ s}} = \underline{108 \text{ N}}$$

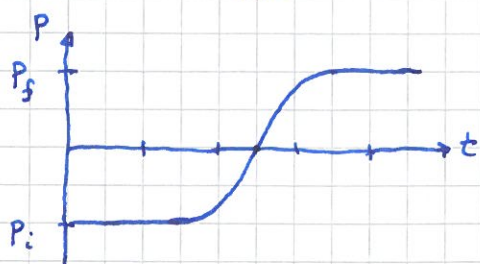
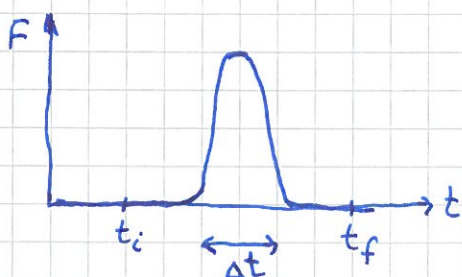
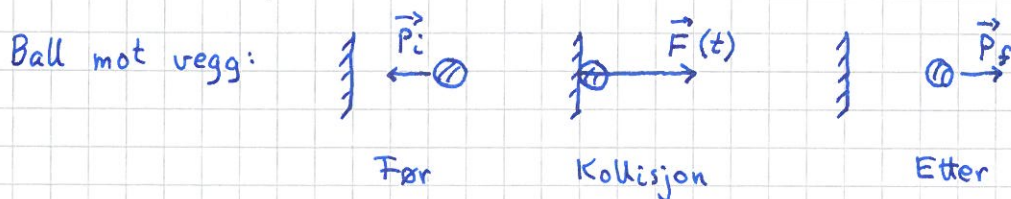
$$\langle F \rangle / mg \approx \frac{\Delta v}{g \Delta t} = \frac{\langle a \rangle}{g} \approx \frac{40 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2}{10 \text{ m/s}^2} = \underline{4000}$$

Dvs: Heft OK å neglisjere ytre kraft mg i støtet

Kraftstøt [YF 8.1; TM 8.3; LL 5.2; HS 3.7.1]

(Eng: impulse) ("kraftimpuls")

= impulsendring i støt



Ballens impulsendring i kollisjonen:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt \quad \approx \text{kraftstøket (fra vegg på ballen)}$$

[Hva blir veggen impulsendring i denne kollisjonen?]

Sentralt støt [YF 8.2-8.4; TM 8.3; LL5.3; HS 3.7.1]

33



$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mv + MV}_{P_i} = \underbrace{mv' + MV'}_{P_f} \quad (\text{alle typer støt})$$

(a) Elastisk støt, $\Delta K = 0$:

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2}_{K_i} = \underbrace{\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2}_{K_f}$$

Omskriving:

$$m(v+u')(v-u') = M(v'+V)(v'-V) \quad (1) \quad (\Delta K=0)$$

$$m(v-u') = M(v'-V) \quad (2) \quad (\Delta p=0)$$

Triks: Ta (1)/(2)

$$\Rightarrow v + u' = V + v'$$

$$\text{dvs } u' - v' = -(v - V) \quad (3) \quad (\text{relativhastigheten skifter fortegn})$$

Finnes u' og v' fra (2) og (3):

$$u' = \frac{M}{m+M} \left\{ 2V + v \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$
$$v' = \frac{m}{M+m} \left\{ 2v + V \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$

(merk ombytte $m \rightarrow M$,
 $v \rightarrow V$ etc. når $u' \rightarrow v'$)

(b) Fullstendig uelastisk støt:

$$u' = v' = \frac{mv + MV}{m+M} \quad (\text{fra } \Delta p = 0)$$

(c) Delvis uelastisk støt: Har kun 1 ligning ($\Delta p = 0$) for 2 ukjente (u', v').
Trenger en ekstra opplysning for å bestemme både u' og v' .

Eks: Elastisk kollisjon med vegg



Sjekk: Er $\Delta p = 0$? Er $\Delta K = 0$?

Løsning:

$$v' = \frac{M}{m+M} \left\{ 0 + v \cdot \frac{m-M}{M} \right\} \approx \frac{M}{M} \cdot v \cdot \left(\frac{-M}{M} \right) = \underline{\underline{-v}} \quad (\text{som ventet})$$

$$V' = \frac{m}{M+m} \{ 2v + 0 \} \approx \frac{m}{M} \cdot 2v \approx \underline{\underline{0}} \quad (-''-)$$

Er $\Delta p = 0$?

$$p' = mv' = -mv, \quad P' = MV' \approx M \cdot \frac{m}{M} \cdot 2v = 2mv$$

$$p = mv, \quad P = MV = 0$$

$$\Rightarrow p' + P' = p + P = mv \quad \text{OK!}$$

Er $\Delta K = 0$?

$$K_m' = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m v^2, \quad K_M' = \frac{1}{2} M V'^2 \approx \frac{1}{2} M \cdot \left(\frac{m}{M} \cdot 2v \right)^2 \\ = 2 \cdot \frac{m^2}{M} \cdot v^2 \approx 0$$

$$K_m = \frac{1}{2} m v^2, \quad K_M = \frac{1}{2} M V^2 = 0$$

$$\Rightarrow K_m' + K_M' = K_m + K_M = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{OK!}$$

Rakettprinsipp [YF 8.6; TM 8.5; LL 5.4; HS 3.7.2]

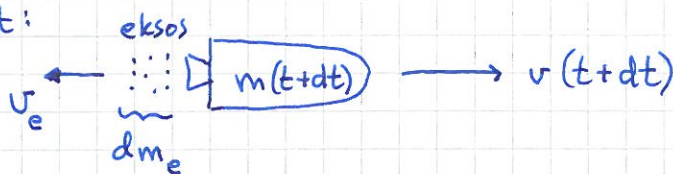
(35)

Ved tid t :



$$p(t) = m(t)v(t)$$

Ved tid $t+dt$:



$$p(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)}_{m(t)+dm} \cdot \underbrace{v(t+dt)}_{v(t)+dv} + \underbrace{dm_e}_{-dm} \cdot \underbrace{v_e(t)}_{v(t)+u, \text{ der } u = \text{eksosens hastighet relativt raketten}}$$

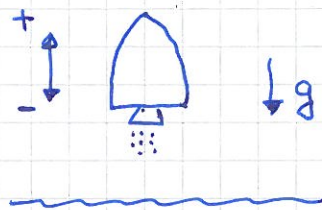
$$= \underbrace{m(t)v(t)}_{= p(t)} + m(t)dv + \underbrace{dm \cdot v(t)}_{= 0} - dm \cdot v(t) - u dm$$

"Outer space": $F_{\text{ytre}} = 0 \stackrel{N_2}{\Rightarrow} p(t+dt) = p(t) \Rightarrow m(t)dv = u dm$

$$\Rightarrow m(t) \cdot \frac{dv}{dt} = u \cdot \frac{dm}{dt} = u \dot{m} \quad (u < 0, \dot{m} < 0)$$

$$\Rightarrow \text{Skyrkraft: } F_{\text{skyr}} = u \dot{m} > 0$$

I tyngdefeltet: $F_{\text{ytre}} = -m(t)g$



\Rightarrow Totalkraft på (rest-)raketten:

$$F_{\text{skyr}} + F_{\text{ytre}}$$

$$\stackrel{N_2}{\Rightarrow} u \dot{m} - mg = ma$$

Øving 5: Saturn V, tinn 1. [TM Ex. 8.19; litt andre tall]

[HS 3.7.2; - " -]

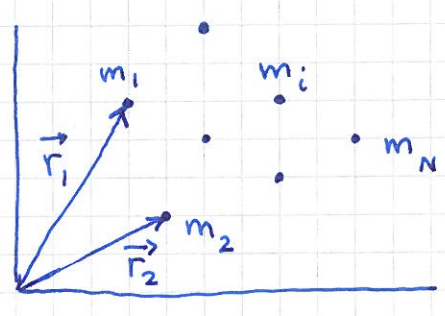
Så langt i kurset: Punktmasser (eller: form og størrelse på legemet uten praktisk betydning)

Nå: Partikkelsystemer; for det meste stive legemer.

Rotasjonsdynamikk blir et aktuelt tema!

Men aller først:

Massesenter, tyngdepunkt [YF 8.5; TMS.5; LL 5.6+5.8; HS 3.5]



System med N partikler, masser m_1, m_2, \dots, m_N i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

Massesenteret (CM = center of mass):

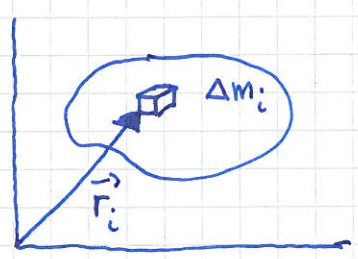
$$\vec{R}_{CM} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Total masse: $M = \sum_i m_i$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

(Med konstant g over hele systemet er tyngdepunktet samme sted som massesenteret.)

Med kontinuerlig massefordeling: [YF oppg 8.115 + 8.116; TM 5.5; LL 6.1; HS 3.5]



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\int dm \cdot \vec{r}}{\int dm}$$

$M = \int dm = \text{total masse}$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

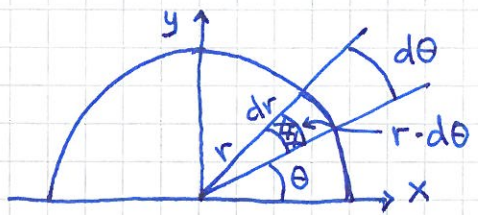
Her går integralet "over legemet" (der massen er!)

Masselementet:

$$dm = \begin{cases} \rho \cdot dV; & \rho = \text{masse pr volumenet}; & dV = \text{volumenelement} & (3D) \\ \sigma \cdot dA; & \sigma = \text{---"--- flate ---}; & dA = \text{flate ---} & (2D) \\ \lambda \cdot dl; & \lambda = \text{---"--- lengde ---}; & dl = \text{linje ---} & (1D) \end{cases}$$

Et hensiktsmessig koordinatsystem velges ut fra legemets form og eventuell symmetri.

Eks: Halvsirkulær tynn skive, radius R, masse σ pr flateenhet



$$dm = \sigma \cdot dA = \sigma \cdot r d\theta \cdot dr$$

$$M = \sigma \cdot \frac{1}{2} \pi R^2$$

$$\vec{r} = \hat{x} x + \hat{y} y = \hat{x} r \cos \theta + \hat{y} r \sin \theta$$

Ser at $X_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{R}_{CM} = Y_{CM} \hat{y}$

$$\text{med } Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \cdot dm = \frac{2}{\sigma \pi R^2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} r \sin \theta \cdot \sigma \cdot r d\theta \cdot dr$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \left(\int_0^R r^2 dr \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \right) = \frac{4}{3\pi} R \approx 0.42 R$$

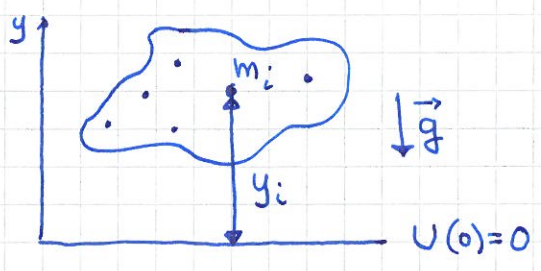
$\int_0^R r^2 dr = \frac{1}{3} R^3$ $\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \int_0^{\pi} (-\cos \theta) = 1 + 1 = 2$

Oppg, 1D: Vis at $Y_{CM} = \frac{2}{\pi} R$ for halvsirkel



Oppg, 3D: Vis at $Y_{CM} = \frac{3}{8} R$ for halvkule

Potensiell energi for partikkelsystem i tyngdefeltet



$$U = \sum_i U_i = \sum_i m_i g y_i$$

$$\stackrel{\text{anta}}{=} \underset{g=\text{konst.}}{g} \sum_i m_i y_i = \underline{g M Y_{CM}}$$

Dvs: Som om hele massen $M = \sum_i m_i$ var samlet i høyden $Y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i$, og da f.eks. i massesenteret \vec{R}_{CM} .

Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5; TM 5.5; LL 5.8; HS 3.5]

Ser på system med N masser, m_1, m_2, \dots, m_N .

N2 for m_i : $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ ($i=1,2,\dots,N$)

- der $\vec{F}_{i,ytre}$ = ytre kraft på m_i
- \vec{F}_{ji} = ("indre") kraft fra m_j på m_i
- $\Rightarrow \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ = total indre kraft på m_i

Ta \sum_i av ligningen ovenfor: $\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_{i,ytre} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} (M \cdot \vec{R}_{CM}) = M \cdot \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft på systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_{31} + \vec{F}_{13}}_{=0} + \dots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0 \quad (\text{pga N3})$$

Dermed: $M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}$

Dvs: \vec{R}_{CM} beveger seg som om hele M var samlet i \vec{R}_{CM} og ble utsatt for summen av alle ytre krefter som virker på systemet. I tillegg kommer rotasjonen om CM. [Ent vibrasjoner, som ikke er tema her]

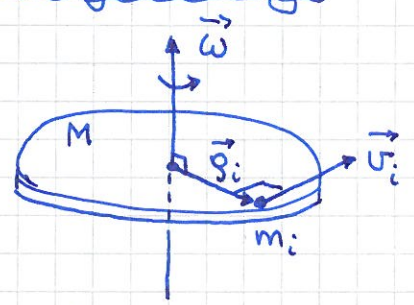
Rotasjon

[YF 9+10; TM 9+10; LL 5.5+5.9+6; HS 4+5]

Først: Rask gjennomgang av ren rotasjon om fast akse.

Derneft: Grundigere og mer generell gjennomgang.

Rotasjonsenergi



$$\begin{aligned}
 K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\
 &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i r_i^2 \right\} \omega^2
 \end{aligned}$$

s.B: $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$; $v_i = r_i \omega$

Treghetsmoment

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i r_i^2 = \text{legemets treghetsmoment (om gitt akse)}$$

Dermed:

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \left[\text{Translasjonsanalogi: } K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M V^2 \right]$$

Hvis kontinuerlig massefordeling:

$$m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} dm, \text{ og } \sum_i \rightarrow \int_{\text{(over legemet)}}$$

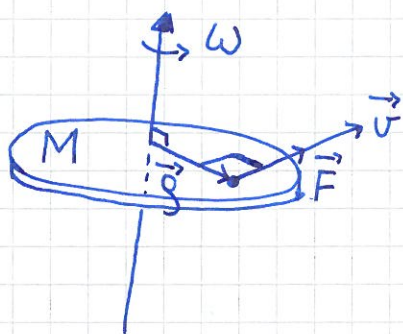
$$\Rightarrow \boxed{I = \int r^2 dm}$$

(der r = avstand fra rotaksen til masseelementet dm)

Dreiemoment

(evt: Kraftmoment; eng: Torque)

(40)



antar her $\vec{F} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{g}$

$\tau \stackrel{\text{def}}{=} F \cdot g = F$'s dreiemoment om rot.aksen

N2 for rotasjon om fast akse

Ser på tilført effekt:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = F \cdot g \cdot \omega = \tau \cdot \omega$$

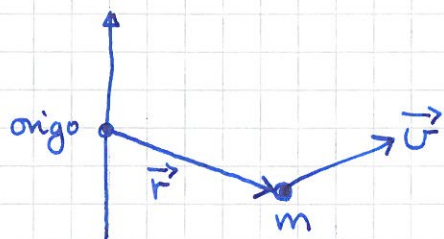
Dessuten:

$$P = \frac{dK_{\text{rot}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) \stackrel{\substack{\text{anta} \\ I = \text{konst.}}}{=} I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I \dot{\omega}} \quad [\text{Transl. analogi: } F = M \dot{V} \text{ (N2)}]$$

Dreieimpuls

(evt: spinn)



$$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

= m's dreieimpuls (relativt origo)

Dreiemoment som vektor

$$\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{F}$$
's dreiemoment (relativt origo)

Dreieimpulsbevarelse

(41)

Hva gir endring i \vec{L} ? La oss se på $\dot{\vec{L}}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = m \left\{ \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{=\vec{v} \times \vec{v} = 0} + \underbrace{\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}}_{=\vec{r} \times \vec{F}/m \text{ (N2!)}} \right\} = \vec{\tau}$$

N2 for rotasjon, inkl. bevaring av \vec{L} :

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}; \text{ ders } \vec{L} = \text{konst. hvis } \vec{\tau} = 0$$

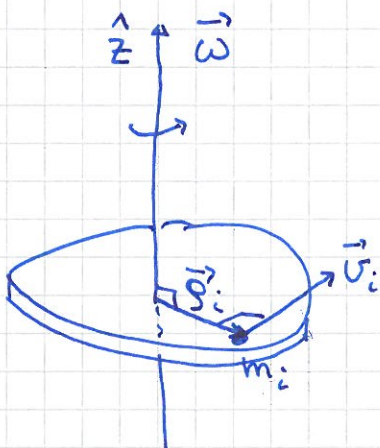
[Transl.analogi: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$; ders $\vec{p} = \text{konst. hvis } \vec{F} = 0$]

For isolert system: E , \vec{p} og \vec{L} er bevart.

Hva er \vec{L} for ren rotasjon om fast akse?

Svar: $\vec{L} = I \vec{\omega}$.

Bewis:



$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{r}_i \times \vec{v}_i = \rho_i v_i \hat{z} = \rho_i^2 \omega \hat{z}$$

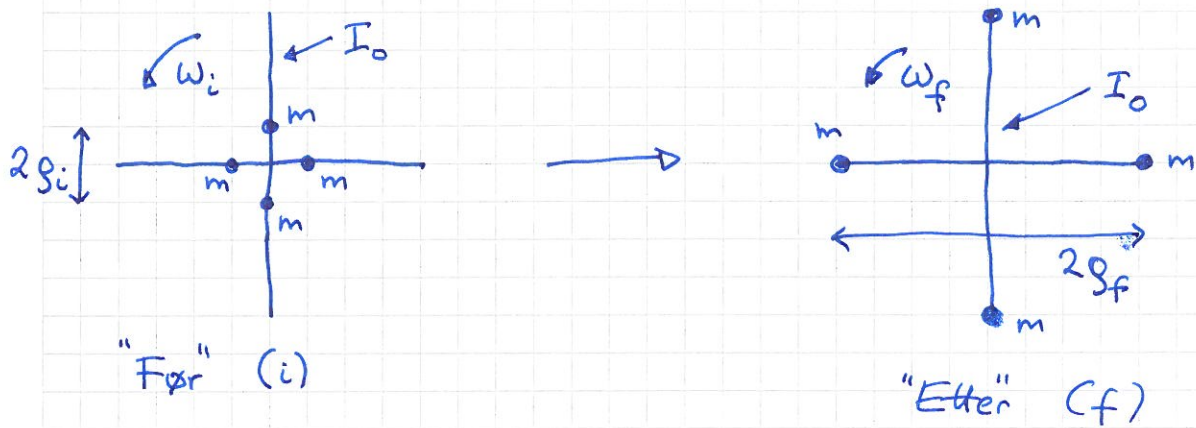
$$\Rightarrow \vec{L} = \underbrace{\left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right)}_{=I} \cdot \underbrace{\omega \hat{z}}_{=\vec{\omega}}$$

$$= I \vec{\omega} \quad \text{qed}$$

[Translasjonsanalogi: $\vec{p} = M \vec{V}$]

Relevans for LAB-oppg. om rotasjon:

(42)



$$I_i = I_0 + 4mg_i^2$$

$$I_f = I_0 + 4mg_f^2 > I_i$$

Inlet ytre dreiemoment fra (i) til (f)

$$\Rightarrow L_i = L_f \quad (\text{dreieimpulsbevarelse!})$$

$$\Rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f \quad \Rightarrow \omega_f = \omega_i \cdot \frac{I_i}{I_f} < \omega_i$$

Hva med energibevarelse?

$$K_i = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$$

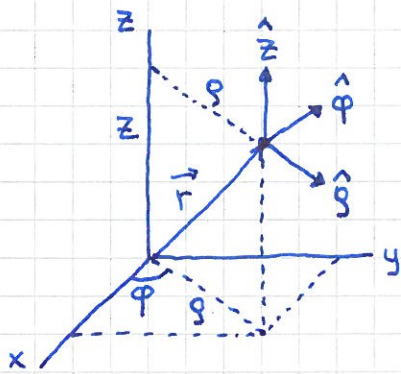
$$\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{1}{2} I_f \cdot \left(\omega_i \frac{I_i}{I_f} \right)^2 = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \cdot \frac{I_i}{I_f} \\ &= K_i \cdot \frac{I_i}{I_f} < K_i \end{aligned}$$

Hmm...!? Hvor ble det av $|\Delta K| = |K_f - K_i|$?

Sirkelbevegelse [YF 9.1-9.3; TM 9.1; LL 1.8; HS 2.1.2] (43)

(Delvis repetisjon, se s. 6-8.)

Anta rotasjon om z-aksen \Rightarrow velger sylinderkoordin. (ρ, φ, z)

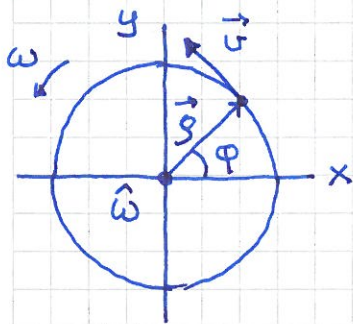


$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\hat{\rho} + \rho\frac{d\varphi}{dt}\hat{\phi} = \rho\omega\hat{\phi}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z} = \omega\hat{\omega}, \quad \vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$T = 2\pi/\omega =$ periode, $f = 1/T =$ frekvens

$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} =$ vinkelakselerasjon

$v = \omega\rho =$ banehastighet

$a_{\parallel} = \dot{v} = \dot{\omega}\rho = \alpha\rho =$ baneaks. ($\vec{a}_{\parallel} = \alpha\rho\hat{\phi}$)

$a_{\perp} = v^2/\rho = \omega v = \omega^2\rho =$ sentripetalaks. ($\vec{a}_{\perp} = -\omega^2\rho\hat{\rho}$)

$$\begin{aligned} \text{[Total aks.: } \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} \\ &= \dot{\omega}\rho\hat{\phi} - \omega v\hat{\rho} = a_{\parallel}\hat{\phi} - a_{\perp}\hat{\rho} \end{aligned}$$

Med stivt legeme:

- felles ω og α for hele legemet
- v og a øker med ρ ($\rho =$ avstand fra rot.aksen)

Tregghetsmoment [YF 9.4; TM 9.3; LL 6.2, 6.3; HS 4.2] (44)


For ren rotasjon om fast akse:

$$K = K_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

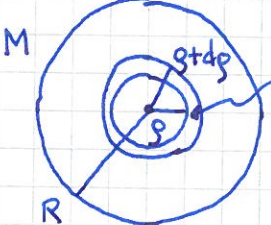
der $I = \sum_i m_i r_i^2$ (evt. $I = \int r^2 dm$) er legemets tregghetsmoment mhp ^{rot.}aksen.

Notasjon: $I = I_0$ hvis akse gjennom legemets CM.

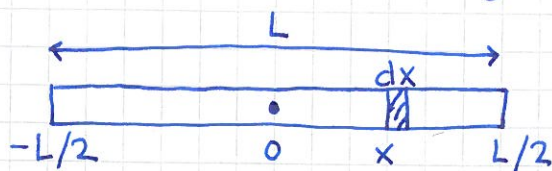
Eks 1: Ring (og "sylinderskall")


$$I_0 = \int_{\text{ring}} r^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

Eks 2: Sirkulær skive (og kompakt sylinder)


$$dm = M \cdot \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{2\pi r \cdot dr}{\pi R^2} = \frac{2M}{R^2} r dr$$
$$I_0 = \int_0^R r^2 \frac{2M}{R^2} r dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \frac{1}{4} r^3 = \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}}$$

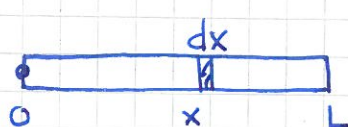
Eks 3: Tynn stang



$$dm = M \cdot \frac{dx}{L}, \quad r = x$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{3} x^3 = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$

Eks 4: Om stangens ende



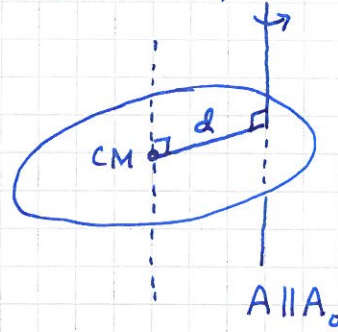
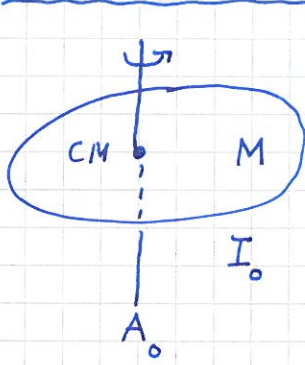
$$I = \int_0^L x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

Øving 6: Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$ Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Steiners sats

[YF 9.5; TM 9.3; LL 6.3; HS 4.3]

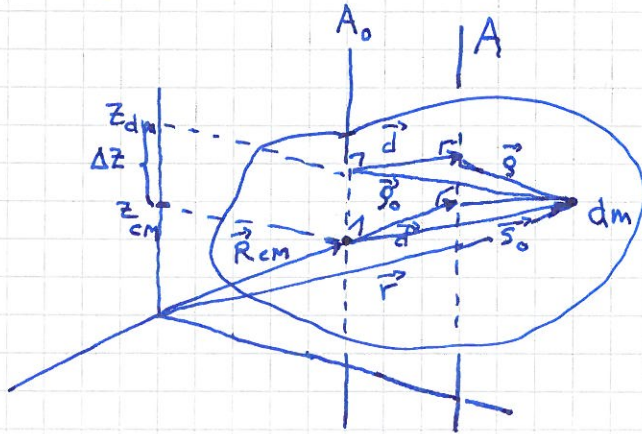
(45)



$$I = I_0 + Md^2$$

Bevis:

[Bedre figur på s. 45B]



$$\vec{s}_0 = \vec{d} + \vec{s}$$

$$I_0 = \int s_0^2 dm$$

$$s^2 = s_0^2 + d^2 - 2\vec{d} \cdot \vec{s}_0$$

$$\Rightarrow I = \int s^2 dm = \underbrace{\int s_0^2 dm}_{= I_0} + d^2 \underbrace{\int dm}_{= M} - 2\vec{d} \cdot \int \vec{s}_0 dm$$

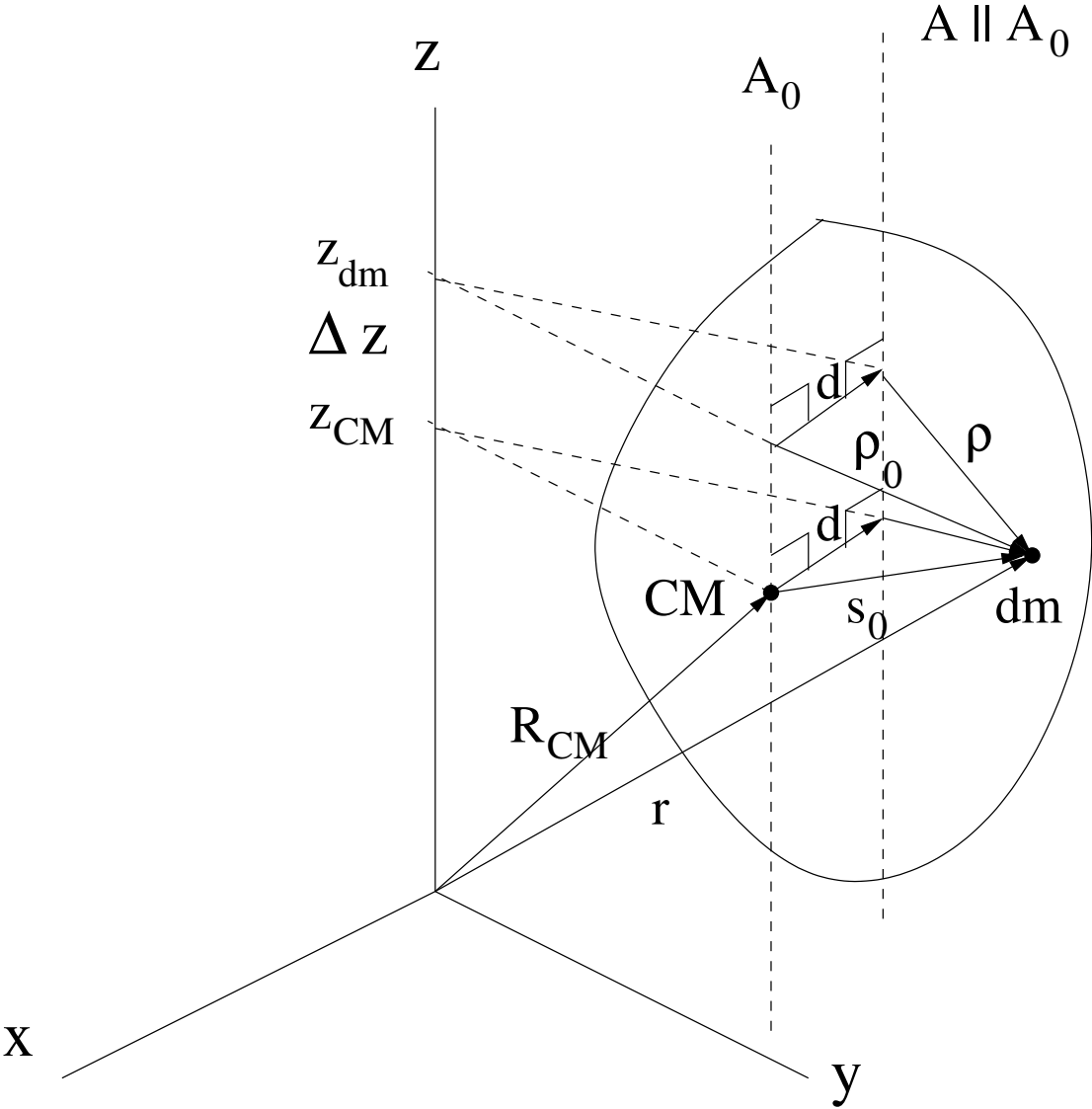
$$\vec{r} = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_0 = \vec{R}_{CM} + \Delta z \cdot \hat{z} + \vec{s}_0$$

$$\Rightarrow \vec{d} \cdot \vec{s}_0 = \vec{d} \cdot (\vec{r} - \vec{R}_{CM}) - \Delta z \underbrace{\vec{d} \cdot \hat{z}}_{= 0}$$

$$\Rightarrow \vec{d} \cdot \int \vec{s}_0 dm = \vec{d} \cdot \underbrace{\int \vec{r} dm}_{= M\vec{R}_{CM}} - \vec{d} \cdot \underbrace{\vec{R}_{CM} \int dm}_{= M} = 0$$

$$\Rightarrow I = I_0 + Md^2 \quad \text{qed}$$

[Terminologi: Steiners sats = Parallellakse teoremet]



$$\rho_0 = d + \rho$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_{CM} + \mathbf{s}_0$$

$$= \mathbf{R}_{CM} + \Delta z \hat{\mathbf{z}} + \rho_0$$

Kinetisk energi for sturt legeme

[YF 10.3; TM 9.3; LL 6.6; HS 4.1]

Generell beregelse for sturt legeme:

Translasjon av CM + Rotasjon om akse A_0 gjennom CM.

Skal vise at:
$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

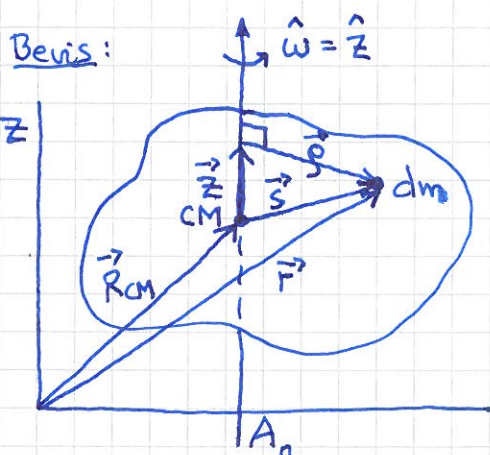
der

M = legemets masse

$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{\text{CM}}$ = hastigheten til CM

I_0 = legemets treghetsmoment om aksene A_0

$\vec{\omega}$ = vinkelhastigheten for rotasjonen om A_0



$$\vec{r} = \vec{R}_{\text{CM}} + \vec{s} = \vec{R}_{\text{CM}} + \vec{z} + \vec{g}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = dm\text{'s hastighet}$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \text{CM's } \text{---} \text{---}$$

$$\vec{u} = \dot{\vec{s}} = \dot{\vec{g}} = dm\text{'s hastighet}$$

relativt CM $\Rightarrow \vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$

$$dK = \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = dm\text{'s kinetiske energi}$$

$$\Rightarrow K = \int dK = \int \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = \text{legemets kinetiske energi}$$

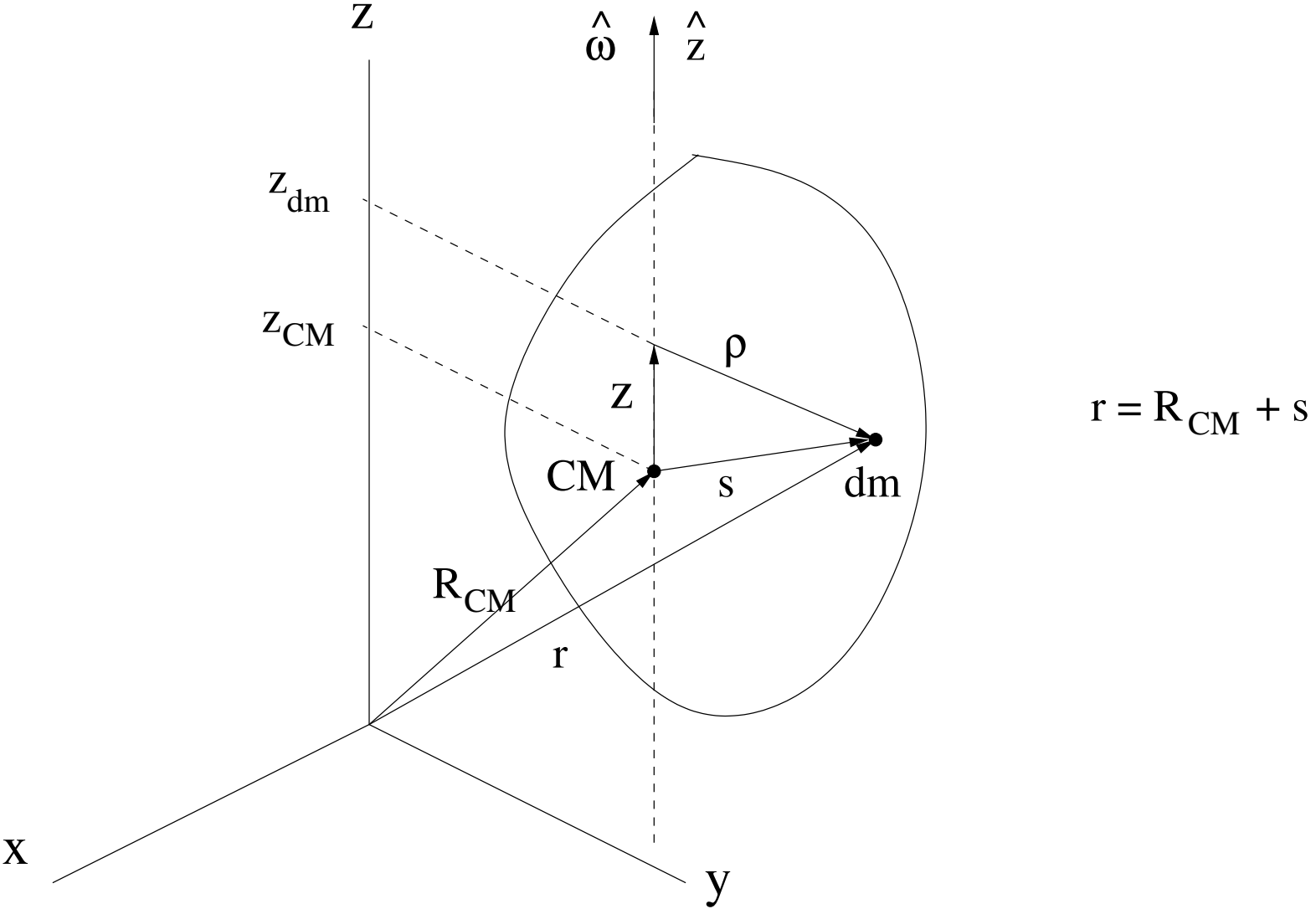
$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (\vec{V} + \vec{u}) \cdot (\vec{V} + \vec{u}) = V^2 + u^2 + 2\vec{V} \cdot \vec{u}$$

$$\frac{1}{2} \int dm V^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} M V^2}}$$

$$\frac{1}{2} \int dm u^2 = \frac{1}{2} \int dm (g\omega)^2 = \frac{1}{2} (\int dm g^2) \omega^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} I_0 \omega^2}}$$

$$\int dm \vec{V} \cdot \vec{u} = \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \int dm \vec{g} = \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \int dm (\vec{r} - \vec{R}_{\text{CM}})$$

$$= \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \underbrace{\int \vec{r} dm}_{= M \cdot \vec{R}_{\text{CM}}} - \vec{R}_{\text{CM}} \underbrace{\int dm}_{= M} \right\} = \underline{\underline{0}} \quad \text{qed!}$$



Rotasjonsdynamikk

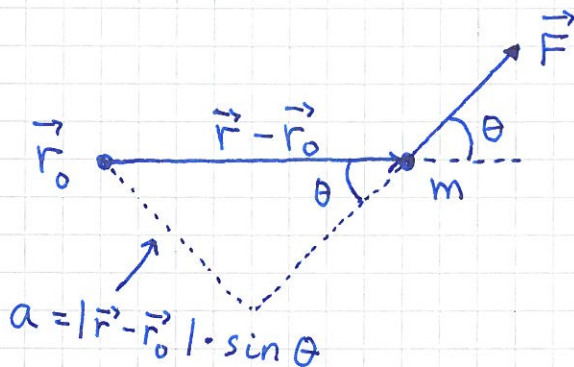
[YF 10; TM 10; LL 6 og 5; HS 5]

(47)

(nesten helt) generell beskrivelse

Dreiemoment

[YF 10.1; TM 10.2; LL 5.5, 6.4; HS 5.1]



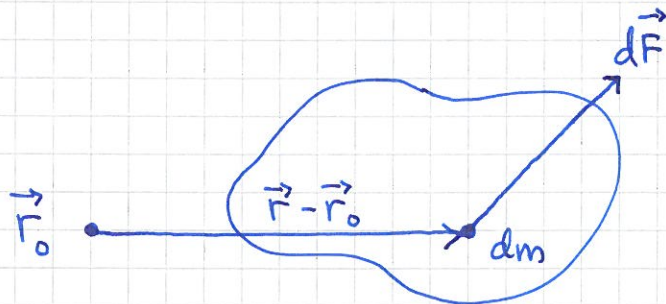
$$\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$$

= \vec{F} 's dreiemoment på m i posisjon \vec{r} , relativt (det fritt valgte) referansepunktet \vec{r}_0 .

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$
(h.h. regel $\Rightarrow \vec{\tau}$ ut av planet i fig. over)

Absoluttverdi: $|\vec{\tau}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\theta = a \cdot F$
der $a =$ "armen til \vec{F} "

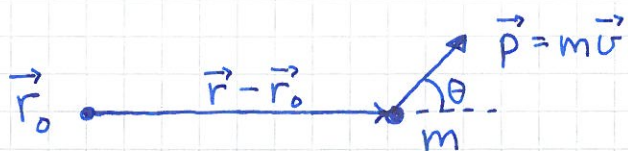
For partikkelsystem (f.eks. stivt legeme):



$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int_{\text{legemet}} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

Dreieimpuls

[YF 10.5; TM 10.2; LL 6.6; HS 5.3] (48)



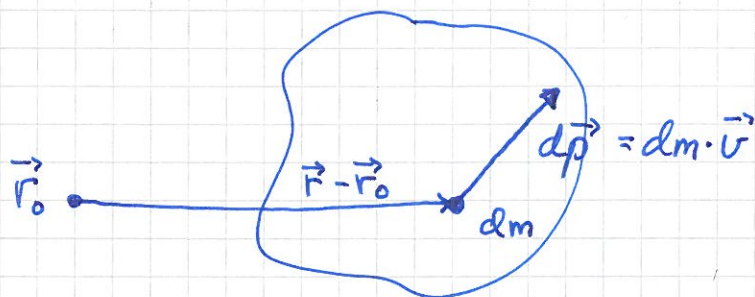
$$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p} = m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{u}$$

= m 's dreieimpuls relativt \vec{r}_0

Retning: $\vec{L} \perp \vec{p}$ og $\vec{L} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$

Abs.verdi: $|\vec{L}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin \theta = a \cdot p$ (se s. 47)

For partikkelsystem:



$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int_{\text{legemet}} dm (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{u}$$

N2, rotasjon [YF 10.5; TM 10.3; LL 6.6; HS 5.2] (49)
(="spinnsetsen")

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \{ m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \} = m(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_0) \times \vec{v} + m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \dot{\vec{v}}$$

Anta $\dot{\vec{r}}_0 = 0$ (fast \vec{r}_0) eller $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$

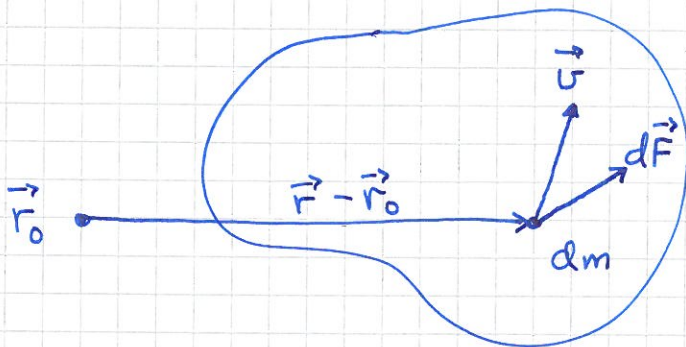
$$\text{slik at } \dot{\vec{r}}_0 \times \vec{v} = 0$$

Har (som s. 41): $\dot{\vec{r}} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{v} = 0$

$$m \dot{\vec{v}} = m \vec{a} = \vec{F}$$

Dermed: $\dot{\vec{L}} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$, ders $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$

For partikkelsystem:



$$\dot{\vec{L}} = \int d\dot{\vec{L}} = \int \frac{d}{dt} \{ dm(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \}$$

= som ovenfor, med $\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{v} = 0$ fortsatt....

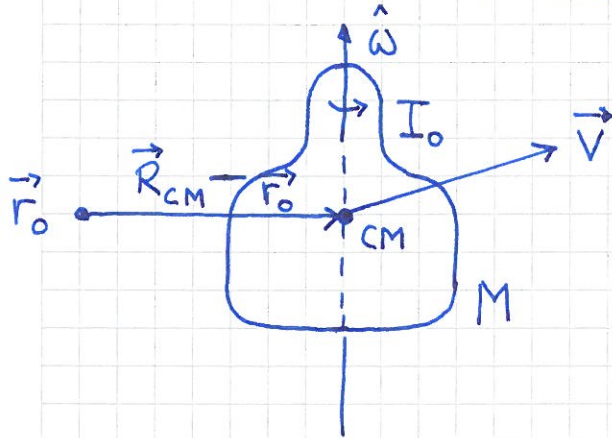
$$= \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F} = \int d\vec{\tau} = \vec{\tau}$$

med $\vec{\tau} =$ totalt dreiemoment på systemet (relativt \vec{r}_0)

$\dot{\vec{L}} =$ total dreieimpuls for — " — (— " —)

Dreieimpuls for stvrt legeme [YF 10.5; TM 10.2; LL 6.6; HS 5.3] (50)

Anta at legemet har sylindersymmetri om (den instantane) rotasjonsaksen, "utpekt" med $\hat{\omega}$.



Fra s. 46: $K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$

Spm: Kan \vec{L} på samme måte skrives som en sum av to ledd, ett assosiert med massesenterets translasjonsbevegelse, og ett assosiert med legemets rotasjonsbevegelse om en akse gjennom CM?

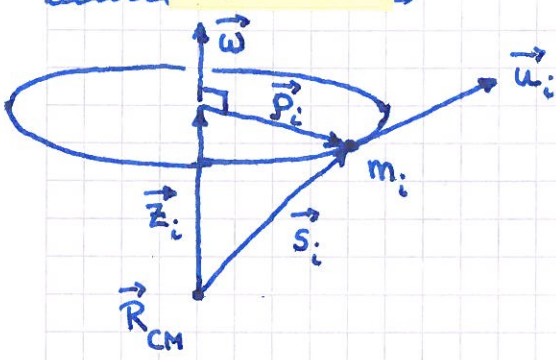
Svar: Ja! Med antagelsen om sylindersymmetri om $\hat{\omega}$ kan det vises at legemets totale dreieimpuls kan skrives slik:

$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

Banedreieimpuls, relativt \vec{r}_0 : $\vec{L}_b = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V}$

Indre dreieimpuls ("spinn"; uavh. av \vec{r}_0): $\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$

[For bevis, som starter fra definisjonen $\vec{L} = \int dm (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}$, se s. 50 A og 50 B. Litt "kronglete", men ikke særlig vanskeligere enn bevisene s. 45 og 46.]



$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{R}_{CM} + \vec{s}_i && \leftarrow \text{relativkoordinat.} \\ \vec{v}_i &= \vec{V} + \vec{u}_i && \leftarrow \text{relativhastighet} \\ (\dot{\vec{r}}_i &= \dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{s}}_i) \end{aligned}$$

Fra figur: $\vec{s}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM}$

Fra for: $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i = \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM})$ (siden $\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM} = 0$)

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0 + \vec{s}_i) \times (\vec{V} + \vec{u}_i) \\ &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} \\ &\quad + \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i \end{aligned}$$

1. sum:

$$\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = M (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = \vec{L}_{CM}$$

= bandedreieimpulsen relativt \vec{r}_0 pga CM's bevægelse (jfr. \vec{L} for punktmasse)

2. sum:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = (M\vec{R}_{CM} - M\vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = 0$$

3. sum:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i) \\ &= (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{s}_i}_{=0}) = 0 \end{aligned}$$

4. sum:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \vec{L}_{rel.} = \text{dreieimpuls pga masselementenes bevægelse relativt CM}$$

Dermed:

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel.} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i$$

som gjelder for vilkårlig partikkelsystem (ikke nødvis stivt legeme);
alternativt $\int_M dm (\vec{s} \times \vec{u})$ for \vec{L}_{rel} hvis kontinuerlig massefordeling.

Hvis stivt legeme: $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$$

Identitet: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

(kjedelig, men ikke vanskelig å bevisе!)

Dermed:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i) = \sum_i m_i \{ \vec{\omega} s_i^2 - \vec{s}_i (\vec{s}_i \cdot \vec{\omega}) \}$$

$$= \sum_i m_i \{ \vec{\omega} (z_i^2 + \rho_i^2) - (\vec{z}_i + \vec{\rho}_i) z_i \omega \}$$

$$= \sum_i m_i \{ \vec{\omega} (z_i^2 + \rho_i^2) - z_i^2 \vec{\omega} - z_i \omega \vec{\rho}_i \}$$

$$= \sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$$

$$= I_0 \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$$

Hvis syndrersymmetri om $\hat{\omega}$, dvs om \hat{z} :

$$\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i = \sum_i m_i z_i (x_i \hat{x} + y_i \hat{y}) = 0$$

fordi bidragene fra like store masselementer i (x_i, y_i, z_i)
og $(-x_i, -y_i, z_i)$ kansellerer.

Dette er ofte tilfelle, men ikke alltid.

Men hvis syndrersymmetri om $\hat{\omega}$: $\vec{L}_{rel} = I_0 \vec{\omega}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega} \quad \underline{\text{qed}}$$

Bevaringslover

For isolert system (dvs: system som ikke påvirkes av ytre krefter) er energi, impuls og dreieimpuls bevarte størrelser.

$$W = 0 \quad (\text{dvs } P = \frac{dW}{dt} = 0) \Rightarrow E = \text{konst.}$$

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$$

$$\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konst.}$$

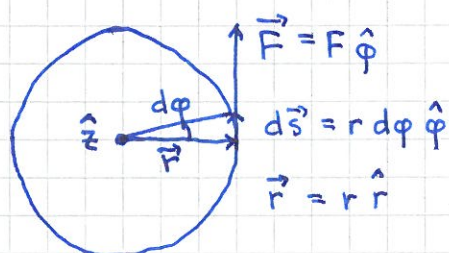
Mekanisk likevekt (Statikk) [YF 11.1-11.3; TM 12.1-12.3; LL 7.1; HS 4.6]

Et stivt legeme er i ro,

$$\vec{p} = 0 \quad \text{og} \quad \vec{L} = 0$$

$$\text{bare dersom} \quad \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \text{og} \quad \sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

Arbeid utført ved rotasjon [YF 10.4; TM 9.5; LL 6.4; HS 4.4.1]

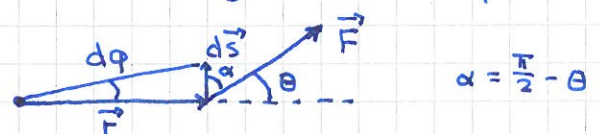


$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot r d\phi$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau d\phi} \Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = \tau \cdot \omega$$

Enn om \vec{F} og $d\vec{s}$ ikke er parallele?



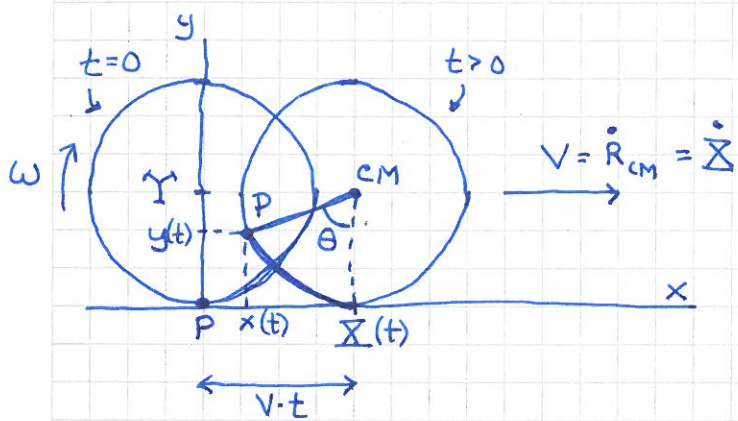
$$dW = F \cdot ds \cdot \cos \alpha = F \cdot r d\phi \cdot \sin \theta$$

$$\tau = |\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \cdot \sin \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau d\phi}$$

Rulling [YF 10.3 ; TM 9.6 ; LL 6.7 ; HS 4.5.3 og 5.4.3]

Ren rulling:



Sammenhenger:

$\theta = \omega t$ (hvis $\omega = \text{konst.}$)

$\dot{X} = Vt = R\theta (= R\omega t)$

$V = \dot{X} = R\omega$ (hvis $\omega = \text{konst.}$)

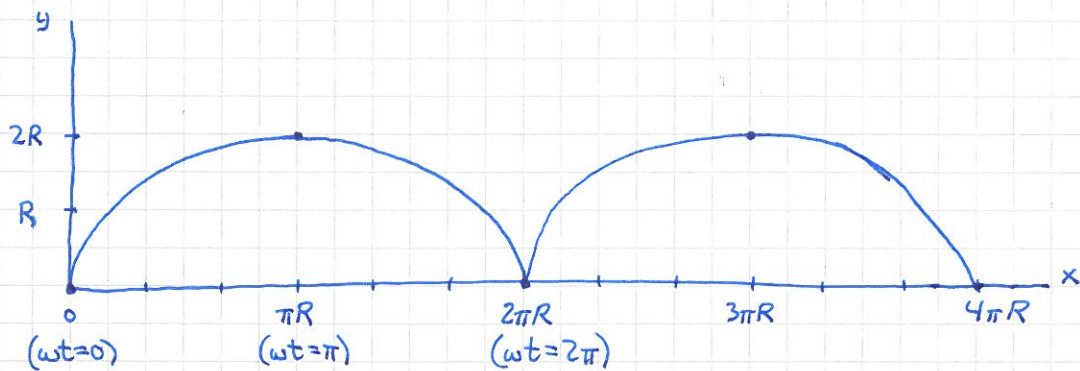
$A = \ddot{X} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\alpha$

rullebetingelser

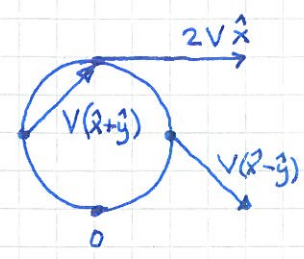
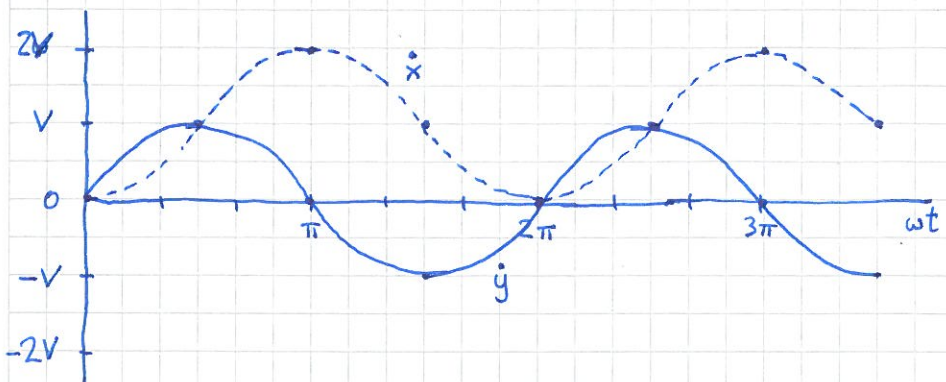
Ser fra fig. at banen til P (= punkt på periferien) blir en sykloide:

$x(t) = \dot{X}(t) - R \sin \theta = Vt - R \sin \omega t$; $y(t) = R - R \cos \theta = R - R \cos \omega t$

[der vi nå antar $\omega = \text{konst.}$]



P's hastighet: $\dot{x} = V - \omega R \cos \omega t = V(1 - \cos \omega t)$
 $\dot{y} = \omega R \sin \omega t = V \sin \omega t$ } $\Rightarrow \vec{v}(\theta) = \hat{x} V(1 - \cos \theta) + \hat{y} V \sin \theta$



\Rightarrow Ingen relativ bevegelse i kontaktpunktet ved ren rulling.

Kin. energi ved ren rulling:

$$K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \quad (s. 46)$$

$$I_0 = c \cdot MR^2 \quad (\text{med } c=1 \text{ for ring, } \frac{2}{5} \text{ for massiv kule osv})$$

$$\omega = V/R \quad (\text{rullebetingelse})$$

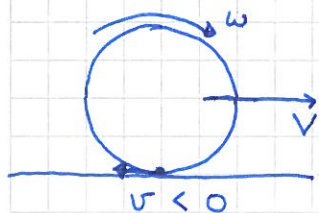
$$\Rightarrow K = (1+c) \cdot \frac{1}{2} MV^2$$

Sluring

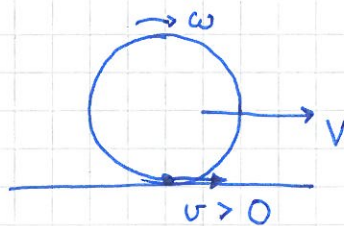
$\omega \neq V/R \Rightarrow$ kontaktpunktet får hastighet $v = V - \omega R \neq 0$
relativt underlaget

\Rightarrow legemet roterer og glir samtidig

Hvis $\omega > V/R$:



Hvis $\omega < V/R$:

Friksjonens rolle

Hvis sluring: Friksjonskraft $f = \mu_k N$ rettet mot \vec{v} .

$$\text{Effekttap: } P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$$

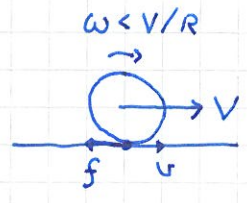
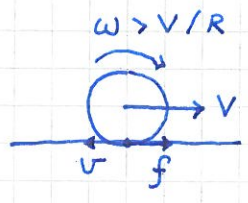
(\Rightarrow redusert mekanisk energi)

$$\text{Hvis ren rulling: } P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$$

Null effekttap

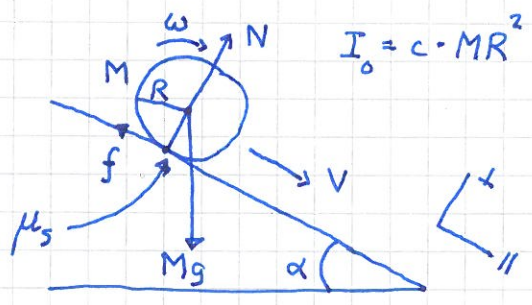
$$\text{Statisk friksjon: } f \leq \mu_s \cdot N$$

Sluring:



Ren rulling: Retningen på den statiske friksjonskraften bestemmes ved å besvare spørsmålet "Hva ville kontaktpunktets relativhastighet \vec{v} ha vært hvis det ikke var friksjon?"

Eks: Rulling på skrånplan



- $\dot{V} = ?$
 - $\mu_s^{min} = ?$
- } for ren rulling

- ren rulling $\Rightarrow \omega = v/R$, med klokka
- V og ω øker \Rightarrow dreiemoment τ om CM i fråd med dette \Rightarrow friksjonskraft f oppover

N2: $\sum F_{||} = M\dot{V}$, $\sum \tau = I_o \dot{\omega}$, $\sum F_{\perp} = 0$

\downarrow $Mg \sin \alpha - f = M\dot{V}$ \downarrow $f \cdot R = I_o \dot{\omega}$ \downarrow $N = Mg \cos \alpha$

\downarrow $f = (cMR^2 \cdot \frac{\dot{V}}{R}) / R = cM\dot{V}$

\downarrow $Mg \sin \alpha - cM\dot{V} = M\dot{V}$

\downarrow $\underline{\underline{\dot{V} = g \frac{\sin \alpha}{1+c}}}$

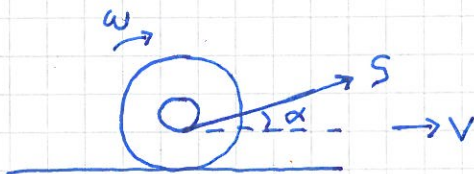
$$f \leq f_{\max} = \mu_s \cdot N$$

$$\Rightarrow c M g \frac{\sin \alpha}{1+c} \leq \mu_s M g \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu_s^{\min} = \frac{c}{1+c} \tan \alpha}} \quad (\text{for } \dot{a} \text{ ha ren rulling})$$

	c	\dot{v}	μ_s^{\min}
Ring og hul sylinder	1	$\frac{1}{2} g \sin \alpha$	$\frac{1}{2} \tan \alpha$
Skive og kompakt sylinder	1/2	$\frac{2}{3} g \sin \alpha$	$\frac{1}{3} \tan \alpha$
Kompakt ball	2/5	$\frac{5}{7} g \sin \alpha$	$\frac{2}{7} \tan \alpha$

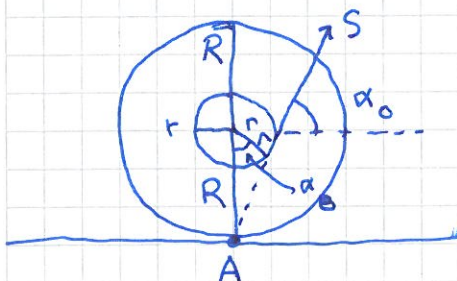
Eks: Snelle



liten $\alpha \Rightarrow$ ruller mot høyre



stor $\alpha \Rightarrow$ mot venstre



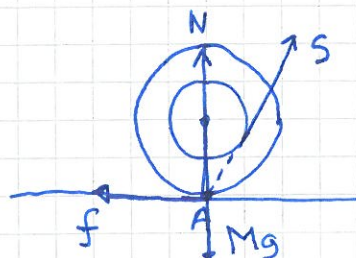
snelle i ro

når $\alpha = \alpha_0$ gitt ved

$$\underline{\underline{\cos \alpha_0 = r/R}} \quad (\text{ses fra figur!})$$

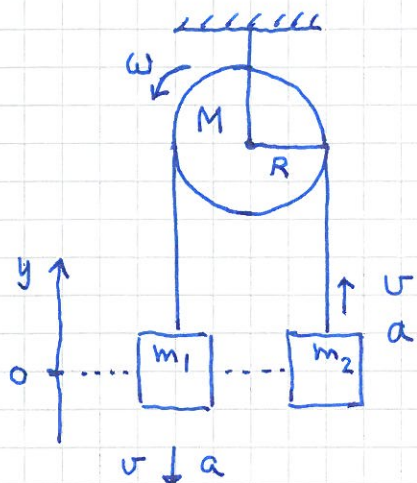
Da går alle krefter gjennom kontaktpunktet A (f, N, mg og S)

$$\Rightarrow \sum \tau_A = 0$$



Løses på øving med N2 trans. + rot. (evt kun N2 rot.)

Løses her med energibevarelse



- $m_1 > m_2$
- snora glir ikke på skiva $\Rightarrow \omega R = v$
- $I_0 = \frac{1}{2}MR^2 =$ skivas tregh.mom.
- Anta $U(y=0) = 0$; lodd i ro ved start
- Bestem loddenes akselerasjon a

Løsning:

Total energi, $E = U_i + K_i = 0$ ("initial")

E er bevart

$$\Rightarrow U_f + K_f = 0 \quad (\text{"final"})$$

$$\Rightarrow m_2 gy - m_1 gy + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = 0$$

(der $y > 0$ er posisjon til m_2)

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MR^2 \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{4} Mv^2$$

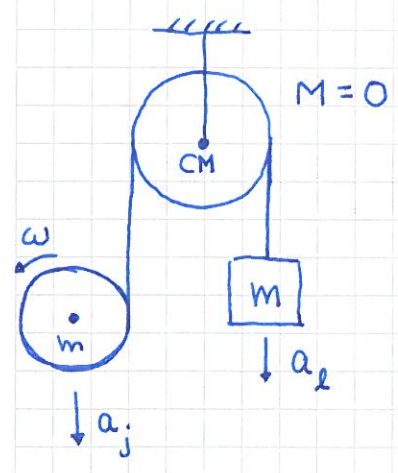
$$\Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = y \cdot \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + M/2}$$

Tar $\frac{d}{dt}$ på begge sider:

$$\frac{1}{2} \cdot 2v \cdot \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{=a} = \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=v} \cdot \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + M/2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = g \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}}}$$

Eks: Atwood med ideell tråse og lodd + jojo, $m_1 = m_2 = m$.



Er $a_j = a_e$?

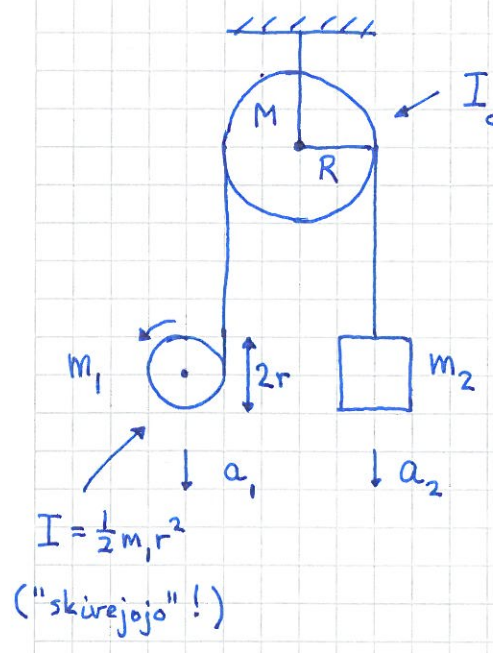
Ja:

Må ha likt snordrag på begge sider. Ellers ville trinsa ha vært utsatt for et netto dreiemoment mhp CM. Men med $M=0$ ville trinsa da ha fått uendelig vinkelakselerasjon, umulig!

Med likt snordrag og like tyngde på begge sider blir akselerasjonen den samme:

$$m \cdot a_j = mg - S ; \quad m \cdot a_e = mg - S \quad \Rightarrow \quad a_j = a_e = g - S/m$$

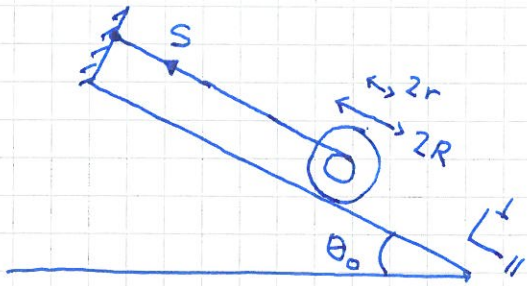
Utfordring: Atwood med lodd + jojo (generelt)



Bestem a_1 og a_2 !

("skurejojo" !)

Eks: Sluresnelle (demo + øving)



$\theta_0 = \text{max vinkel for snella glir (slurer) nedover skråplanet}$

Bestem θ_0 . Hvis er snordraget S da?

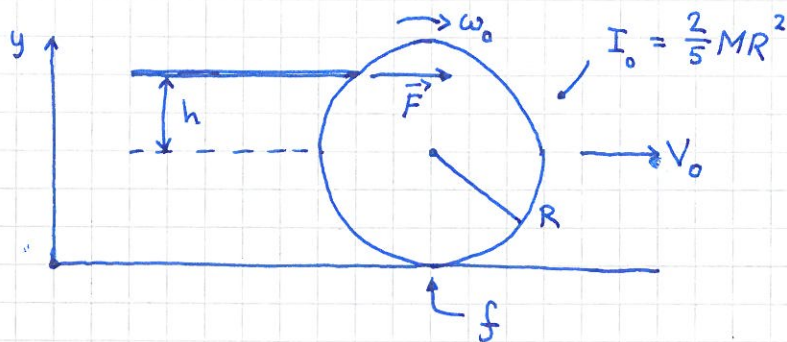
Tips: Bruk $\sum F_{\parallel} = 0$ samt $\sum \tau = 0$ (med snellas CM som ref.punkt)

Ved $\theta = \theta_0$ er $f = f_{\text{max}} = \mu_s \cdot N$

Ekstraoppg: Bestem snellas akselerasjon når $\theta > \theta_0$.

Tips: $\sum F_{\parallel} = M \cdot a$, $\sum \tau = I \dot{\omega}$, $v = \omega r$ (siden det vikles av snorlengde $2\pi r$ på tiden $T = 2\pi/\omega$, dvs $v = 2\pi r/T = \omega r$)

Eks: Snooker (øving)



Kortvarig stat, $\Delta t \approx 0$:

$$F \cdot \Delta t = \Delta p = M V_0$$

$$\tau \cdot \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0$$

$$\tau = F \cdot h$$

$$F \gg f$$

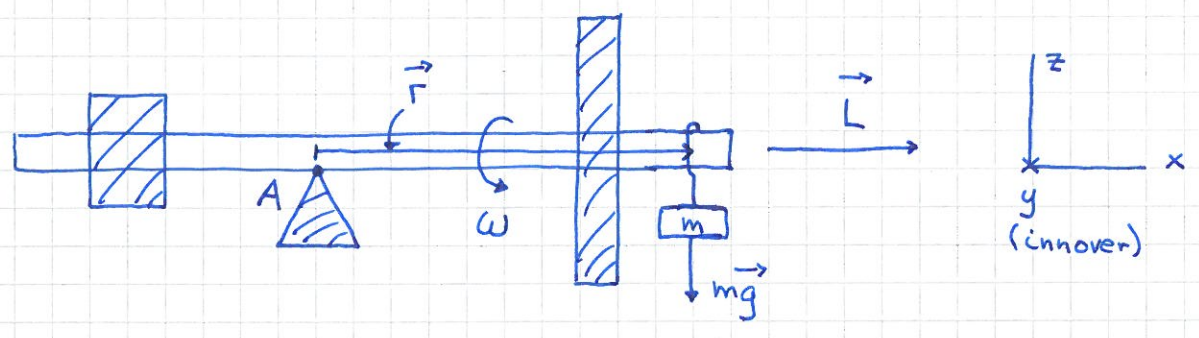
Hvis $h > h_0$: (sluring)

Hvis $h = h_0$: (ren rulling) ($h_0 = ?$)

Hvis $h < h_0$: (sluring)

Presesjon

Gyroskop (kvalitativt):



Uten lodd: Dynamisk likevekt med roterende skive
 $\vec{\omega} = \omega \hat{x}$, $\vec{L}_A = L_A \hat{x}$, $L_A = I_{skive} \cdot \omega$

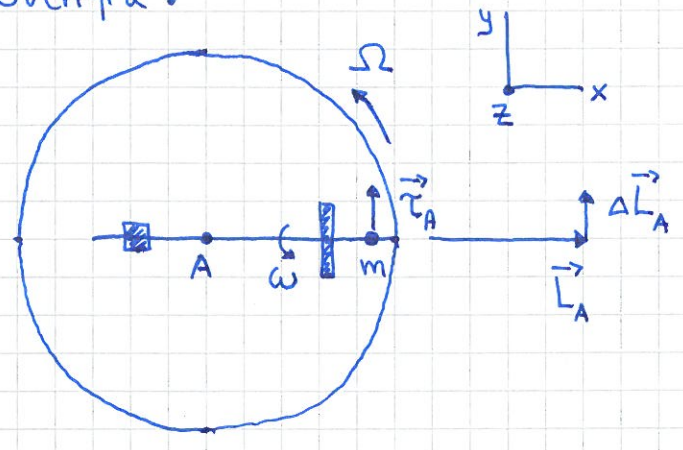
Med lodd: Dreiemoment relativt A:
 $\vec{\tau}_A = \vec{r} \times m\vec{g} = r m g \hat{y}$

N_{2,rot}: $\vec{\tau}_A = \Delta \vec{L}_A / \Delta t$

$\Rightarrow \Delta \vec{L}_A$ peker i retning \hat{y}

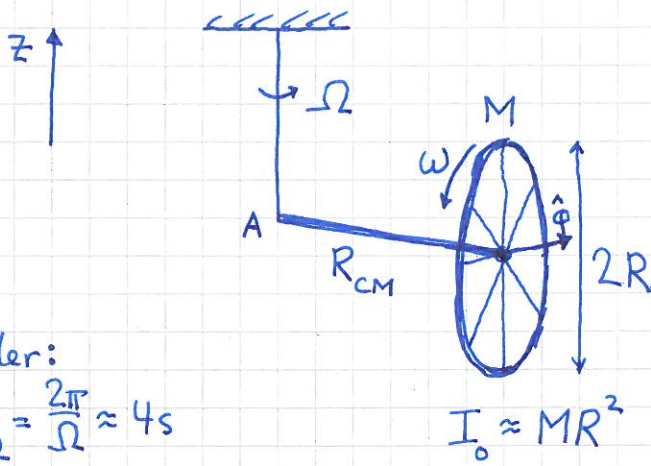
\Rightarrow rotasjon mot klokka om z-aksen,
presesjon, med vinkelhastighet $\Omega \ll \omega$

Ovenfra:



- større $m\vec{g}$ \Rightarrow raskere presesjon (større Ω)
- større \vec{r} (lenger arm) \Rightarrow større Ω
- vipping opp og ned, "nutasjon"

Sykkelhjul (halvkvantitativt):



Estimerer:

$$M \approx 5 \text{ kg}$$

$$R \approx \frac{3}{10} \text{ m}$$

$$R_{CM} \approx \frac{2}{10} \text{ m}$$

$$T_\omega = 2\pi/\omega \approx \frac{1}{3} \text{ s}$$

Finn estimat for T_Ω !

Måler:

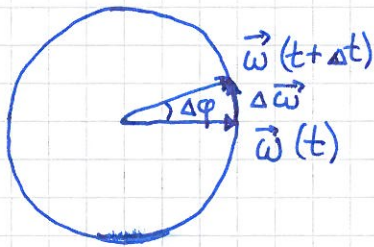
$$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 4 \text{ s}$$

$$I_0 \approx MR^2$$

Løsning:
$$\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

$$\vec{L}_b = R_{CM} \cdot MV \hat{z} \approx \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_A \approx I_0 \dot{\vec{\omega}} = \vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} Mg \hat{\phi}$$



$$\Delta \vec{\omega} = \omega \cdot \Delta \phi \cdot \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \hat{\phi} = \omega \Omega \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow R_{CM} Mg = I_0 \omega \Omega = MR^2 \omega \Omega$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Omega = \frac{R_{CM} g}{R^2 \omega}}}$$

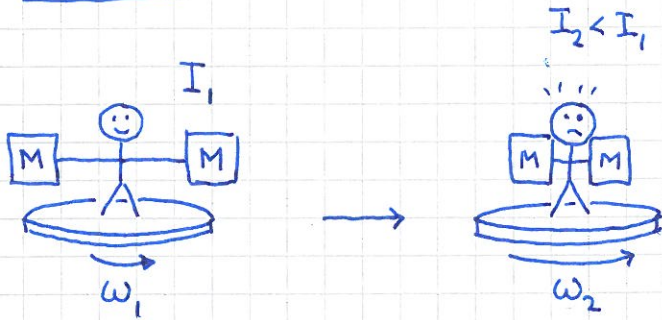
Dermed:

$$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi R^2 \omega}{R_{CM} g} = \frac{(2\pi R)^2 / T_\omega}{R_{CM} g} \approx \frac{(6\pi/10)^2 \text{ m}^2 / (\frac{1}{3} \text{ s})}{\frac{2}{10} \text{ m} \cdot 10 \text{ m/s}^2}$$

$$= \frac{27\pi^2}{50} \text{ s} \approx \underline{5 \text{ s}}, \text{ ikke verst !!}$$

To raske demonstrasjoner av dreieimpulsbevarelse helt til slutt:

Piruettt



$$\tau_{\text{ytre}} = 0 \Rightarrow L = \text{konst.}$$

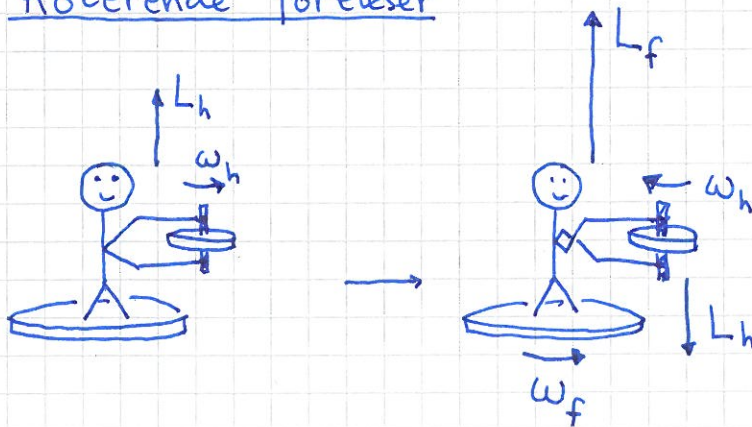
$$\Rightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 > \omega_1$$

$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \cdot \frac{I_1}{I_2} = K_1 \cdot \frac{I_1}{I_2} > K_1 !$$

Henter energi fra armmusklene når bøkene trekkes inn, gir økt mekanisk energi.]

Roterende foreleser



h: hjul
f: foreleser

$$\Delta \vec{L} = 0 \Rightarrow L_f \approx 2 L_h$$

Slutten på del I av kurset.