

# KLASSISK MEKANIKK

[YF 1-10,14 ; TM 1-10,14 ; LL 1-6,9 ; HS 1-6]

Størrelser og enheter. SI-systemet. [YF1, TM1, HS1]

Fysisk størrelse = målbar størrelse for fysisk fenomen

Eks: Tid.  $\tau = 1.0167 \text{ ns}$

↑ symbol                      ↑ måltall                      ↑ enhet, inkl. dekadisk prefiks  
 (n = nano =  $10^{-9}$ )

$[\tau] = s$  "enheten til tau er sekund"

SI : 7 grunnenheter + div. sammensatte og avledete

Navn	Symbol(er)	Enhet	
lengde	$l, s, \Delta x, \dots$	m	} Mekanikk
masse	$m, M, \dots$	kg	
tid	$t, \tau, \dots$	s	
elektrisk strømstyrke	I	A	ELmag
temperatur	T	K	Termisk
stoffmengde	n	mol	— " — (Kjemi)
lysstyrke	I	cd	Lite brukt
<hr/>			
hastighet	v	m/s	} avledete
akselerasjon	a	$m/s^2$	
kraft	F	$kg \cdot m/s^2 \equiv N$	
energi	E, K, U, W, ...	$Nm \equiv J$	
effekt	P	$J/s \equiv W$	
⋮			

Eks: Hvor lang tid bruker lyset på å gå 1 fot, i vakuum? (2)

Løsn:  $c = 299792458 \text{ m/s}$ ,  $l = 1 \text{ fot} = 12 \text{ in} = 12 \cdot 25.4 \text{ mm}$

$$\tau = l/c = 12 \cdot 25.4 \cdot 10^{-3} \text{ m} / 299792458 \text{ m/s}$$

$$\approx 1.0167 \cdot 10^{-9} \text{ s} = \underline{1.0167 \text{ ns}}$$

Eks: Hvor mye er en (engelsk!) pint i SI-enheter?

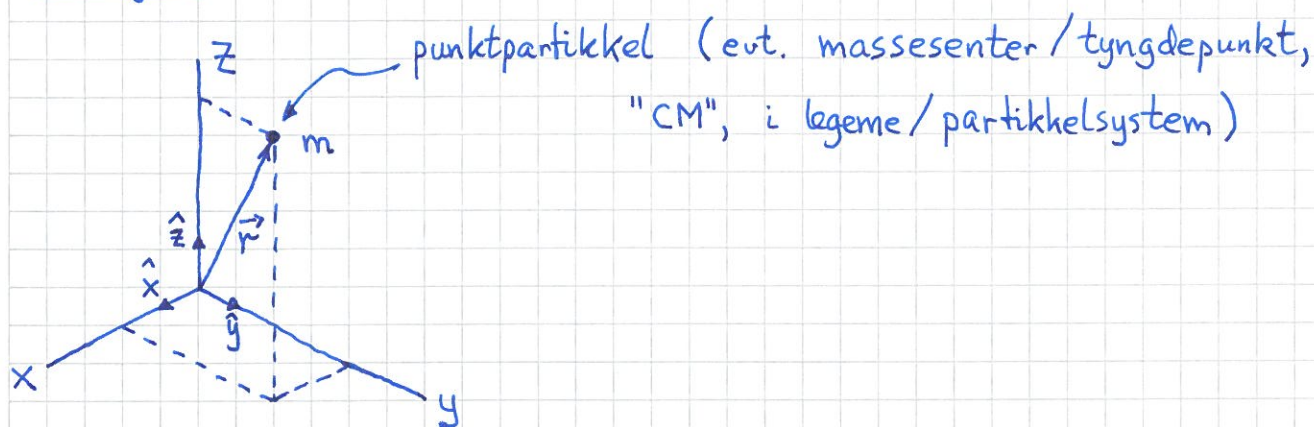
Løsn: 1 pint = 0.56826125 L  $\approx$  0.568 dm<sup>3</sup>

$$= 0.568 \cdot (10^{-1} \text{ m})^3 = \underline{5.68 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}$$

Kinematikk [YF 2,3 ; TM 2,3 ; LL 1 ; HS 2.1]

= beskrivelse av bevegelse

Posisjon:



$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$$

= posisjonen til  $m$  ved tid  $t$  (i kartesiske koord.)

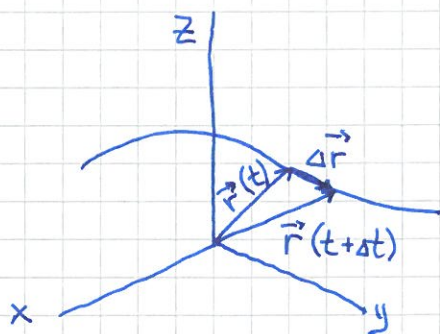
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  = enhetsvektorer i hver  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -retning

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1 ; \quad [\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dimensjonsløse})$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1, \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

m's bevegelse beskrives ved banen  $\vec{r}(t)$  :

③



Forflytning (i løpet av tid  $\Delta t$ ):

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

(= posisjonsendring)

Hastighet = forflytning pr tidsenhet :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\Delta t$  er (positiv) skalar, så  $\vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$ , dvs  $\vec{v}$  er tangentiell til banen

Akselerasjon = hastighetsendring pr tidsenhet :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Standard notasjon for derivert mhp tid  $t$  :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{etc.}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Med kartesiske komponenter:

(4)

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \\ \parallel \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} + \frac{dz}{dt} \hat{z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} \text{ etc.}$$

Tilsvarende:  $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$  etc.

M.a.o: Finner  $\vec{v}$  og  $\vec{a}$  fra  $\vec{r}$  og  $\vec{v}$  med derivasjon (mhp t)

$\Rightarrow$  Må kunne finne  $\vec{r}$  og  $\vec{v}$  fra  $\vec{v}$  og  $\vec{a}$  med integrasjon:

Først i én dimensjon (dvs rettlinjet, 1D):

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v(t) dt \Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Tilsvarende:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^t a(t) dt \Rightarrow v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(t) dt$$

Generalisering til 3D:  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ ,  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

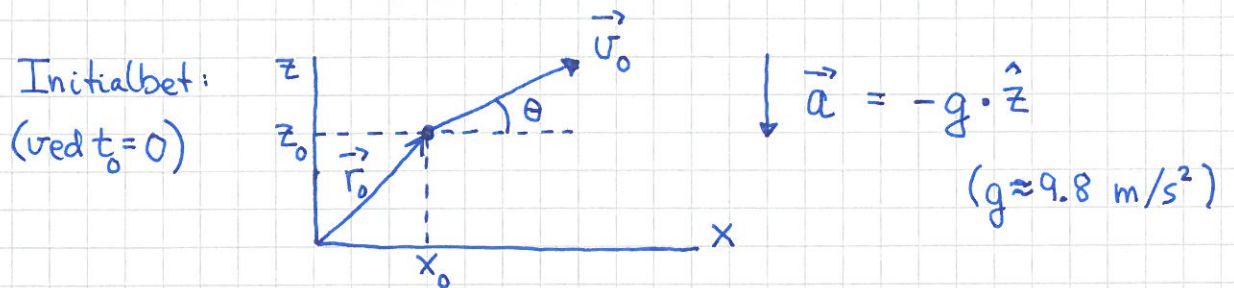
$$\int_{\vec{v}(t_0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt$$

Eks:  $\vec{a} = \text{konstant}$ , og initialbetingelser  $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ ,  $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$  (5)

Dermed:  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0)$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (t - t_0)^2$$

Eks: Skrått kast i tyngdefeltet.



$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2 = x_0 + v_0 t \cos \theta$$

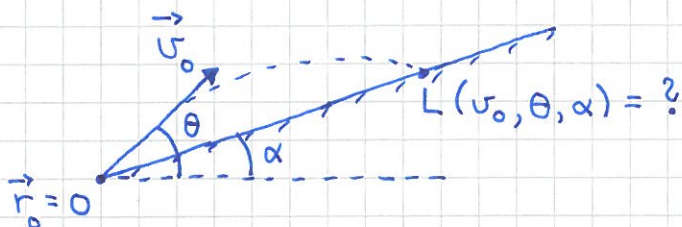
$\parallel$   
 $0$

$$z(t) = z_0 + v_{0z} \cdot t + \frac{1}{2} a_z t^2 = z_0 + v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$

$\parallel$   
 $-g$

Eliminasjon av  $t$  gir banen  $z(x)$ . [Parabel; vis dette!]

Øving 1: Skrått kast i motbakke.



Eks: Hastighetsavhengig akselerasjon,  $a = a(v)$ .

Gitt  $v(0) = v_0$ , bestem  $v(t)$ .

Løsn:  $a(v) = dv/dt \Rightarrow dt = dv/a(v)$

$$\Rightarrow t = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{a(v)} \Rightarrow \dots$$

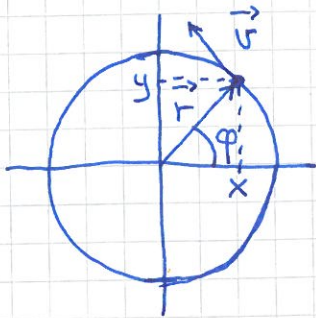
[Øving 1]

# Sirkelbevegelse

[YF 3.4; TM 3.3; LL 1.7, 1.8; HS 2.1.2]

(6)

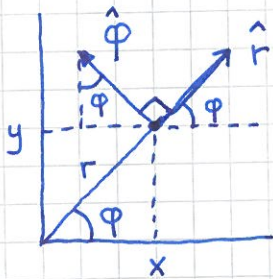
Først:  $v = |\vec{v}| = \text{konst.}$  (uniform sirkelbevegelse)



Fra figur:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$   
 $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{konst.}$   
 $\vec{r} = r \cos \varphi \hat{x} + r \sin \varphi \hat{y}$   
 $\tan \varphi = y/x$

Polarkoordinater:  $r =$  avstand fra origo

$\varphi =$  vinkel mellom x-aksen og  $\vec{r}$   
(positiv mot klokka)



$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$   
 $=$  enhetsvektor radiekt (bort fra origo)  
 $\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$   
 $=$  enhetsvektor angulært (mot klokka)

$$\hat{r} \cdot \hat{\varphi} = 0, \quad \hat{r} \cdot \hat{r} = \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} = 1$$

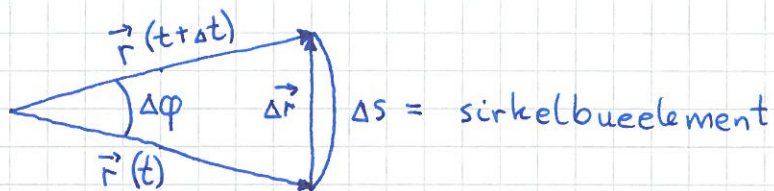
Vinkelhastighet = vinkelendring pr tidsenhet:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Vinkel = buelengde delt på radius:

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{r} \Rightarrow [\varphi] = \left[ \frac{s}{r} \right] = \frac{m}{m} = 1 \quad (\text{evt. rad})$$

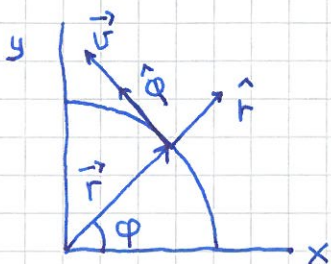
$$\Rightarrow [\omega] = [\varphi/t] = 1/s = s^{-1}$$



Hvis  $\Delta t \rightarrow 0$ :  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ ,  $\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$ ,  $|\Delta\vec{r}| \approx \Delta s = r \cdot \Delta\varphi$

Dermed: 
$$\underline{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta\varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = \underline{r\omega}$$

Retning på  $\vec{v}$ :  $\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$  og  $\Delta\vec{r} \perp \vec{r} \Rightarrow \underline{\vec{v} \perp \vec{r}}$



$$\vec{v} = v \hat{\varphi} = r\omega \hat{\varphi}$$

$v = \text{konst.} \Rightarrow \omega = \text{konst.} \Rightarrow \varphi$  endres lineært med  $t$ :

$$\omega = d\varphi/dt \Rightarrow \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} d\varphi = \int_0^t \omega dt \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + \omega t = \omega t$$

$\uparrow$  anta  $\varphi(0) = 0$

Dermed:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} = r \cos \omega t \hat{x} + r \sin \omega t \hat{y}$$

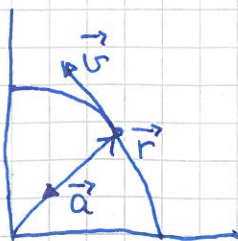
$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} = -r\omega \sin \omega t \hat{x} + r\omega \cos \omega t \hat{y}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} = -r\omega^2 \cos \omega t \hat{x} - r\omega^2 \sin \omega t \hat{y}$$

Dvs:

$$\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}}$$

Akselerasjon ved uniform sirkelbevegelse  
(sentripetalakselerasjon)



$$\vec{r} = r \hat{r}, \quad v = \omega r$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -r\omega^2 \hat{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$$

Flere nyttige størrelser for sirkelbevegelse:

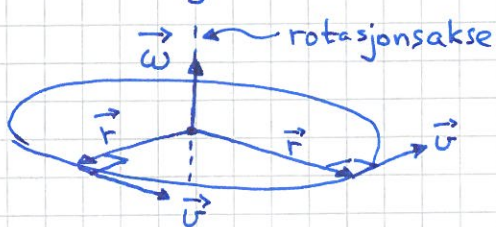
Vinkelakselerasjon:  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$   $[\alpha] = s^{-2}$

Periode:  $T = \text{tid pr omdreining}$   $[T] = s$

Frekvens:  $f = \text{antall omdreininger pr tidsenhet}$   $[f] = \text{Hz} = s^{-1}$

Dermed:  $v = \frac{2\pi r}{T}$ ,  $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$ ,  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

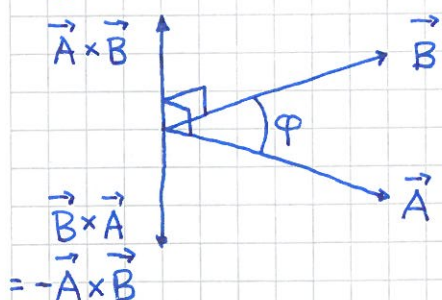
Vinkelhastighet som vektor:



La  $\vec{\omega}$  peke langs rot.aksen

$\Rightarrow$  kan da skrive  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Kryssprodukt:



- $\vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{A}$  og  $\vec{B}$
- Fortegn via høyrehandsregel
- $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \varphi$   
 $= A \cdot B \cdot \sin \varphi$

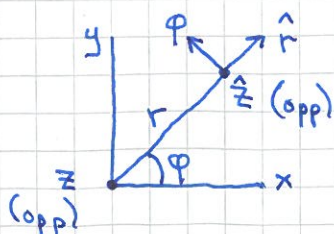
For sirkelbevegelsen:

$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \frac{\pi}{2} = \omega r = v$ , OK!

$\vec{\omega}$  opp  $\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  mot klokka (og omvendt)

Ehetsvektorer og kryssprodukt:

$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ ,  $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$ ,  $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$ ,  $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$



$\hat{r} \times \hat{\phi} = \hat{z}$ ,  $\hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{r}$ ,  $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\phi}$



## Newtons lover [YF 4,5; TM 4,5; LL 2,3; HS 2] (9)

Empiriske lover (ders: basert på eksperimenter, erfaring):

N1:  $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$

Null netto ytre kraft  $\Rightarrow$  legemet forblir i ro eller i rettlinjert bevegelse med uendret hastighet.

N2:  $\vec{F} = m\vec{a}$

Netto ytre kraft  $\vec{F} \Rightarrow$  legemet får akselerasjon proporsjonal med  $\vec{F}$ ;  $m =$  legemets masse

N3:  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

Hvis A virker på B med kraft  $\vec{F}_{AB}$ , så virker B på A med kraft  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ . Legemene A og B vekselvirker.

Enhet:  $[F] = [m \cdot a] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$  (newton)

## Fundamentale krefter i naturen

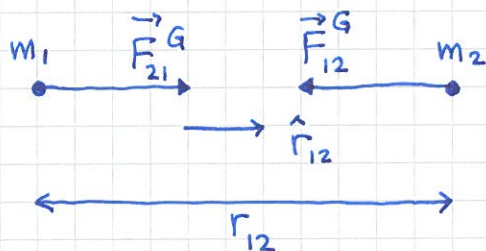
[YF 5.5; TM 4.2; LL 2.1; HS 2.2.2]

- Gravitasjon: Svak tiltrekning mellom legemer pga masse
- Elektromagnetisk: Tiltrekning eller frastøtning pga elektrisk ladning

(• Svake og sterke kjernekrefter: Kort rekkevidde, hvor ca  $10^{-18}$  m og  $10^{-15}$  m, beskriver hvor radioaktivitet og at kjernepartiklene holdes sammen.)

## Newton's gravitasjonslov:

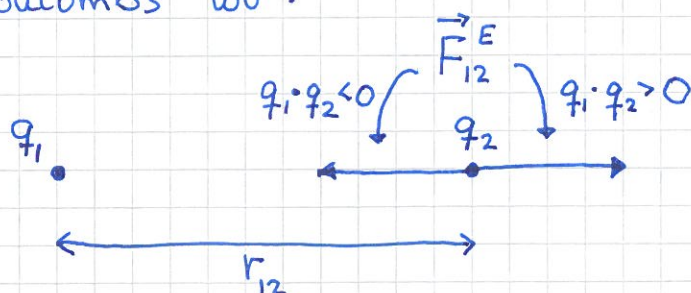
(10)



$$\vec{F}_{12}^G = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2$$

## Coulombs lov:



$$\vec{F}_{12}^E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$[q] = \text{C (coulomb)}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2 ; \epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2$$

(vakuumpermittiviteten)

Mellom 2 elektroner:  $F^G / F^E \sim 10^{-43}$

[ Sjekk selv!  $m \sim 10^{-30} \text{ kg}$ ,  $q \sim 10^{-19} \text{ C}$  ]

Mellom jorda og månen:  $F^G / F^E \sim 10^{15}$

[ Selv om vi antar netto ladning  $q \sim 10^6 \text{ C}$  på begge ]

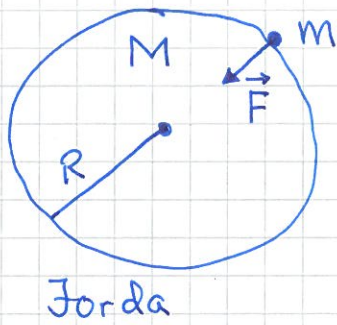
"Dagligdagse" objekter er (omtrent) elektrisk nøytrale

$\Rightarrow$  coulombkraftene er i stor grad nøytralisert

$\Rightarrow$  "hverdagen" styres av både  $F^G$  og  $F^E$

## Masse og tyngde

[YF 4.4; TM 4.4; LL 2.5; HS 2.2.1] (11)



$$M \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad R \approx 6370 \text{ km}$$

$\Rightarrow$  m ved jordas overflate trekkes mot jordas sentrum med tyngdekraften  $\vec{F}$ .

$$F = |\vec{F}| = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot g$$

med  $g = G \cdot M / R^2 \approx 9.8 \text{ m/s}^2 =$  tyngdens akselerasjon

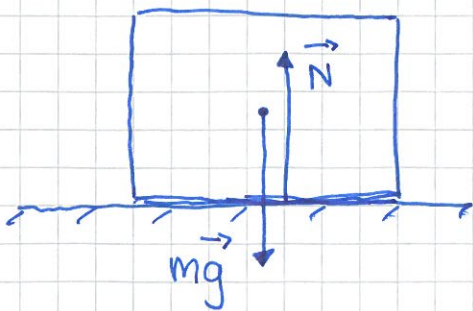
Hvis mg er eneste kraft : fritt fall !

$$\text{Da blir : } mg \stackrel{N2}{=} ma, \quad \text{dvs } \underline{a = g}$$

## Coulombkrefter i mekanikken : Kontaktkrefter

[YF 4.1; TM 4.5; LL 3; HS 2.3]

Trykk-kraft (Normalkraft) :

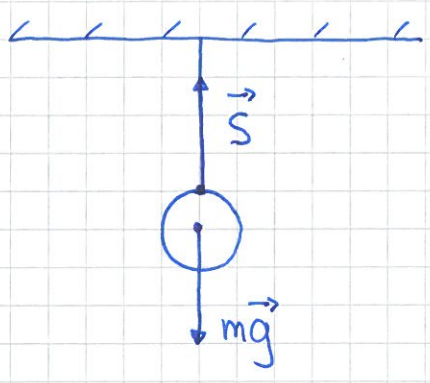


$$\text{kloss i ro} \stackrel{N1}{\Rightarrow} N = mg$$

Normalkraften N er netto frastøtende coulombkraft fra underlaget på klossen.

[Spm: Hva er motkreftene (N3!) til  $\vec{N}$  og  $\vec{mg}$ ?]

# Strekk-kraft (Snordrag):

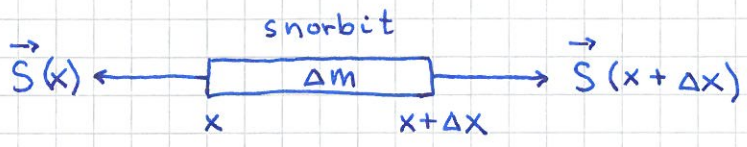


kule i ro  $\xrightarrow{N1} S = mg$

Snordraget  $S$  er netto tiltrekkende coulombkraft ~~fra snora~~ fra snora på kula

[Spm: Hva er motkraften til  $\vec{S}$ ?]

Lett snor/stang antas ofte masseløs,  $m_{snor} \approx 0$ .

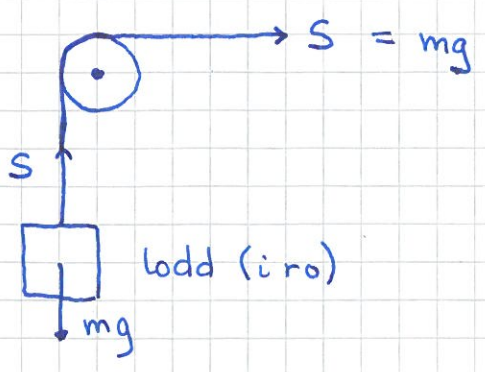


$$N2: \vec{S}(x+\Delta x) + \vec{S}(x) = \Delta m \cdot \vec{a}$$

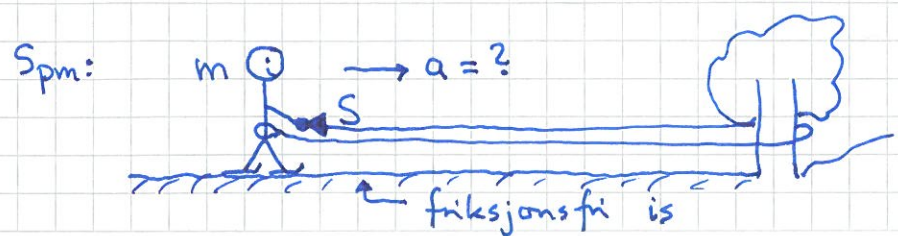
$$\Rightarrow \vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x) \text{ hvis } \Delta m = 0 \text{ (og/eller } \vec{a} = 0)$$

$\Rightarrow$  like stor  $S = |\vec{S}|$  langs hele snora

## Retningsendring med kant eller trinse:



[Spm: Hva hvis vi har friksjon mellom tau og trinse/sylinder?]

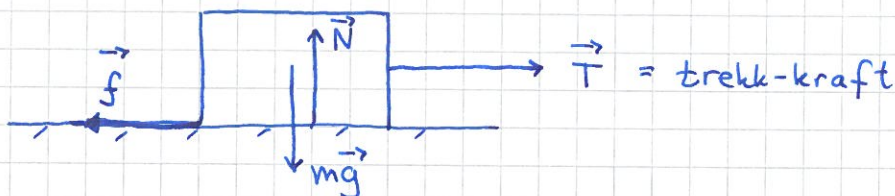


# Friksjon [ YF 5.3 ; TM 5.1, 5.2 ; LL 3.1 ; HS 2.3 ]

(13)

coulombkraft / kontaktkraft  $\vec{f}$  rettet mot (potensiell) relativ bevegelse

Tørr friksjon :



Statisk (kloss i ro) :  $N \Rightarrow f = T$

Empirisk :  $f_{\max} = \mu_s N$

Kinetisk (kloss i bevegelse) :  $f = \mu_k N$

Friksjonskoeffisienter :  $\mu_s, \mu_k$  Enhet :  $[\mu] = 1$

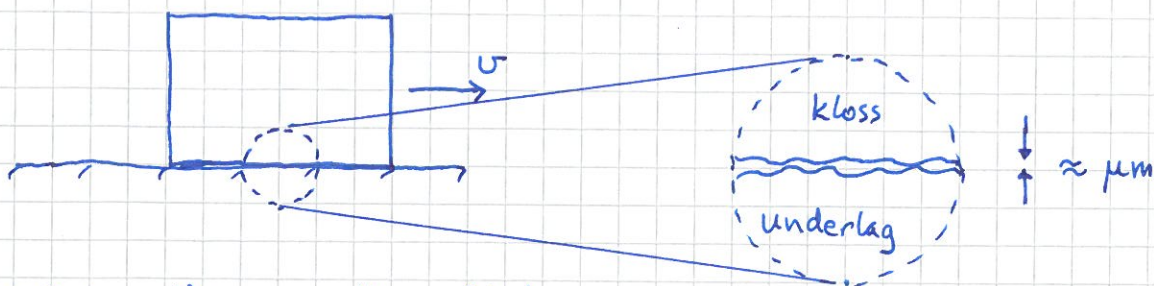
Noen tallverdier :

Tre mot tre :  $\mu_s = 0.25 - 0.50$   $\mu_k \approx 0.2$

Gummi mot tørr asfalt :  $\mu_s \approx 1.0$   $\mu_k \approx 0.8$

— " — våt — " — :  $\mu_s \approx 0.3$   $\mu_k \approx 0.25$

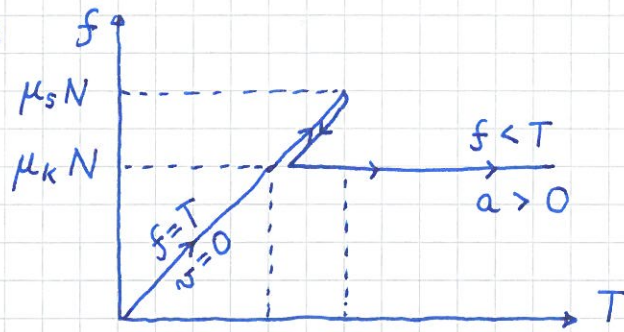
Hvorfor er  $\mu_k < \mu_s$  ?



$v = 0$  : godt grep mellom flatene

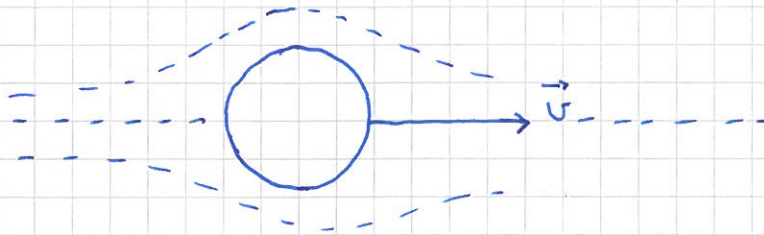
$v > 0$  : "flyter" oppå

Dermed:



### Friksjon i fluider (Våt friksjon)

[YF 5.3; TM 5.2; (LL 8); HS 2.3.4]



- liten  $v \Rightarrow$  pen, laminær strømning av fluidet

$$\vec{f} = -k \vec{v} = -k v \hat{v} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{kan utledes fra} \\ \text{Newton's lover} \end{array} \right]$$

Kule:  $\vec{f} = -6\pi\eta R \vec{v}$  Stokes' lov (Lab nr 1)

$R =$  kulas radius

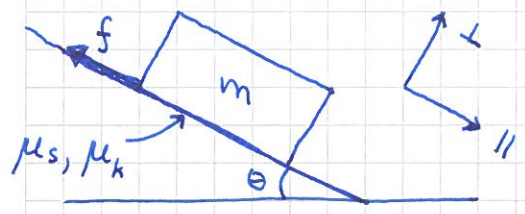
$\eta =$  fluidets viskositet

- stor  $v \Rightarrow$  turbulent strømning

$$\vec{f} = -D v^2 \hat{v} \quad (D \text{ for "drag"})$$

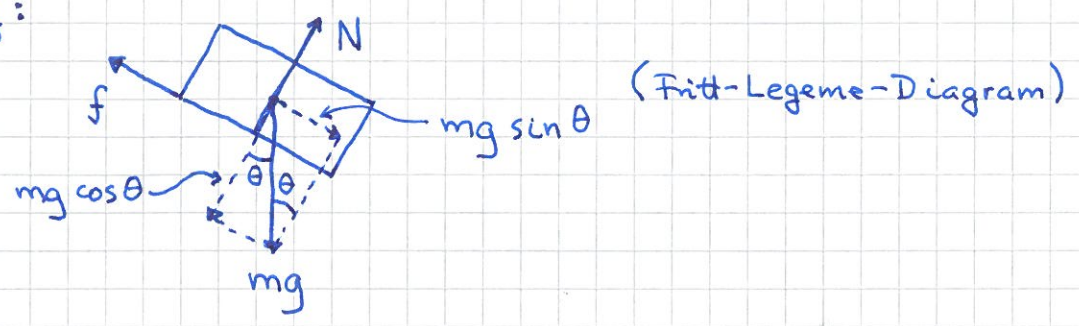
[empirisk]

Lett eks: Kloss på skråplan



- Hva er f, med kloss i ro?
- " — i beregelse?
- Minimal  $\mu_s$  for kloss i ro?
- $\mu_s < \mu_s^{min} \Rightarrow a_{||} = ?$

Løsning:



• I ro:  $\sum F_{||} = 0 \Rightarrow \underline{f = mg \sin \theta}$

I beregelse:  $f = \mu_k N = \underline{\mu_k mg \cos \theta}$

(da  $\sum F_{\perp} = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta$ )

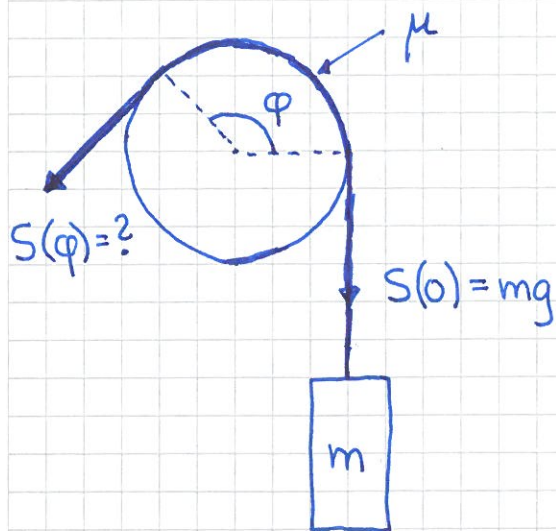
• I ro:  $f \leq \mu_s N \Rightarrow$  begynner å gli når  $f = \mu_s^{min} \cdot N$   
 $\Rightarrow \mu_s^{min} = f/N = mg \sin \theta / mg \cos \theta = \underline{\tan \theta}$

• Hvis  $\mu_s < \mu_s^{min}$ , dvs  $\theta > \arctan \mu_s$ :

$$a_{||} = \sum F_{||} / m = (mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta) / m$$

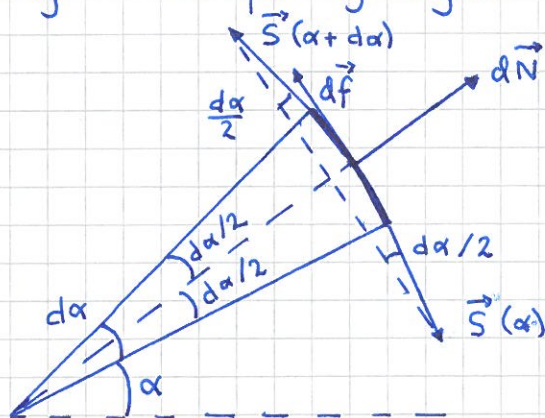
$$= \underline{g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}$$

# Vanskelig eks: Tau rundt sylinder



Eksp. med plastrør, hyssing og lodd viser at snordrag  $S(\varphi)$  som er nødvendig for å holde lodd oppe, evt. heise opp lodd, avhenger sterkt av  $\varphi$ , der  $\varphi$  = vinkelen med kontakt mellom hyssing og rør. Bestem  $S(\varphi)$ .

Løsning: Se på hyssingbit mellom  $\alpha$  og  $\alpha + d\alpha$ :



- $\vec{S}$  = kraft fra resten av hyssingen på hyssingbiten
- $d\vec{N}$  = normalkraft fra rør på hyssingbit
- $d\vec{f}$  = friksjonskraft ————— ;  $df \leq \mu \cdot dN$

Minste nødvendige  $S(\varphi)$  finnes når  $df = \mu dN$ .

Lodd i ro når  $\vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$  (N1)

Tangentielt:  $S(\alpha + d\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} + df = 0$

Normalt:  $S(\alpha + d\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$



Når  $d\alpha \rightarrow 0$ :

$$\cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

$$S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha) \approx 2S(\alpha)$$

$$S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

Dermed:

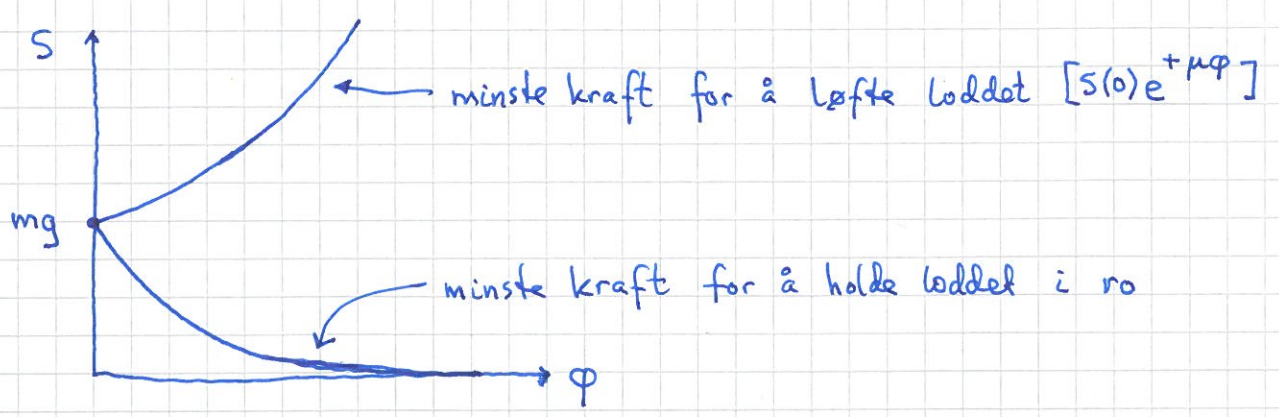
$$dS + \mu dN = 0$$

$$2S \cdot \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

$$\Rightarrow \int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = - \int_0^{\varphi} \mu d\alpha$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln S(\varphi) - \ln S(0)} = -\mu\varphi$$
  
$$= \ln \frac{S(\varphi)}{S(0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{S(\varphi) = S(0) e^{-\mu\varphi}} \quad S(0) = mg$$

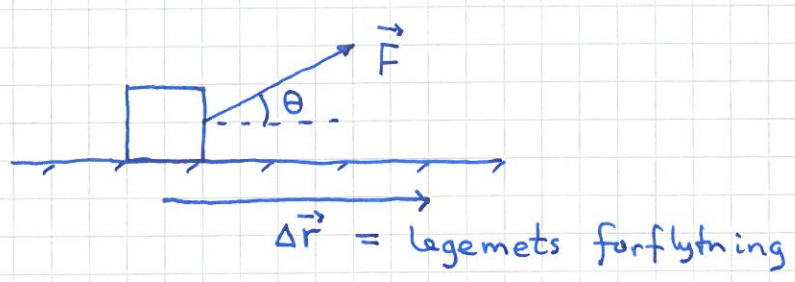


Med  $\mu = 0.2$  og  $2 \frac{1}{4}$  "omdreining", dvs  $\varphi = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} = 9\pi/2$ :

$$S(\varphi)/S(0) = \exp(-0.2 \cdot 9\pi/2) \approx 0.06$$

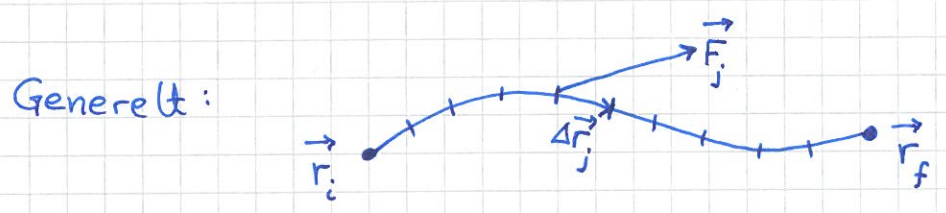
# Arbeid og energi [YF 6,7; TM 6,7; LL 4; HS 3]

## Arbeid [YF 6.1-6.3; TM 6.1-6.3; LL 4.1; HS 3.1]



$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = \text{arbeid utført av kraft } \vec{F} \text{ p\u00e5 legemet}$$

$$[W] = [F \cdot r] = \text{Nm} = \text{J (joule)}$$



Arbeid utf\u00f6rt ved forflytning fra  $\vec{r}_i$  til  $\vec{r}_f$ :

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta \vec{r}_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

## Effekt [YF 6.4; TM 6.3; LL 4.1; HS 3.1]

effekt  $\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{(energi)}}{\text{arbeid pr tidsenhet}}$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

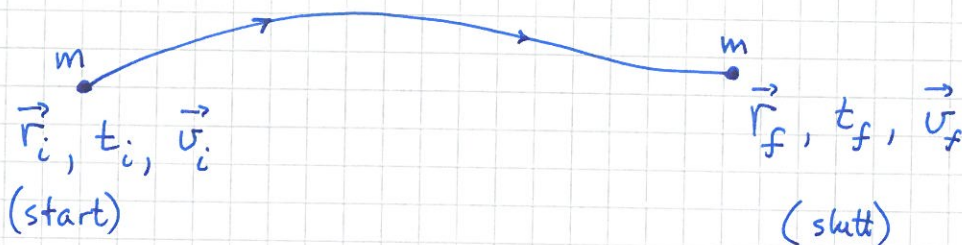
$$[P] = [W/t] = \text{J/s} = \text{W (watt)}$$

Eks: Om p\u00e5 1000 W st\u00e5r p\u00e5 i 1 time. Energi forbruk = ?

L\u00f8sn:  $\Delta W = P \cdot \Delta t = 1 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h} = \underline{\underline{1 \text{ kWh}}} = 1000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = \underline{\underline{3.6 \text{ MJ}}}$

# Kinetisk energi [ YF 6.2; TM 6.1; LL 4.2; HS 3.1 ]

(19)



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} dt = m \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{=u^2} \right) dt$$
$$= \frac{1}{2} m u_f^2 - \frac{1}{2} m u_i^2$$

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2 = \text{kinetisk energi}$$

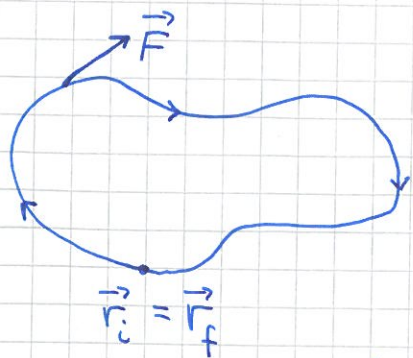
$$\Rightarrow \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

Arbeid  $W$  utført av (netto) ytre kraft  $\vec{F}$  tilsvarende endringen  $\Delta K$  i legemets kinetiske energi

## Konservativ kraft. Potensiell energi. Energibevarelse.

[ YF 7.1-7.4; TM 7.1-7.3; LL 4.3-4.5; HS 3.2.1 ]

Konservativt system = system uten tap av mekanisk energi (dvs uten dissipasjon) til andre energiformer (som varme)



(rundtur; lukket kurve)

Hvis  $\vec{F}$  er konservativ, er  $K_f = K_i$  (og  $u_f = u_i$ ); dvs  $W = \Delta K = 0$ .

$$\text{Dermed: } \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Standard notasjon:

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

$\oint$  : integral rundt lukket kurve

Potensiell energi:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Her er  $\vec{F}$  en kons. kraft, og vi har valgt  $U(\vec{r}_0) = 0$

Mekanisk energibevarelse:

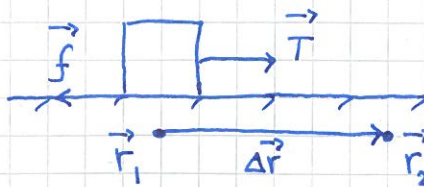


$$U_1 - U_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

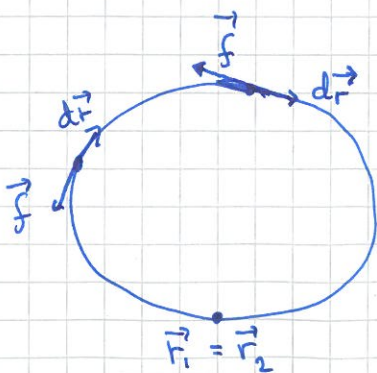
Dvs: Total mekanisk energi,  $E = K + U$ , er konstant for et konservativt system

Friksjonsarbeid:



$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{fordi } \vec{f} \text{ er rettet mot } d\vec{r}$$

$\Rightarrow$  friksjonsarbeidet  $W_f$  "går tapt" (som varme)

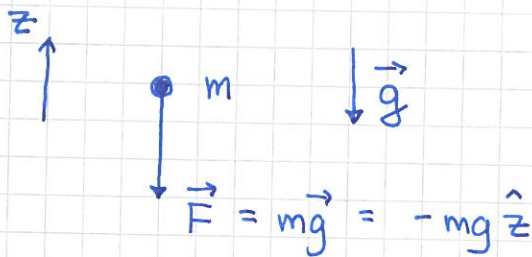


$$\Rightarrow \oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$$

$\Rightarrow$  friksjonskraft  $\vec{f}$  er ikke konservativ

## Eks: Tyngdefeltet

(21)

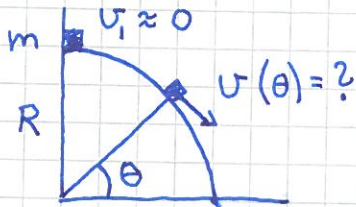


- Velg  $U(0) = 0$  og bestem  $U(z)$
- Anta  $v(0) = 0$  og bestem  $v(z)$  ( $z < 0$ )

Løsning: •  $U(z) = - \int_0^z \underbrace{(-mg\hat{z})}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{(\hat{z} dz)}_{d\vec{r}} = \underline{\underline{mgz}}$

•  $E(0) = U(0) + K(0) = 0 = U(z) + K(z)$   
 $= mgz + \frac{1}{2} m v(z)^2$   
 $\Rightarrow v(z) = \underline{\underline{\sqrt{-2gz}}}$  ( $z < 0$ )

## Eks: Gli på kuleflate (uten friksjon)



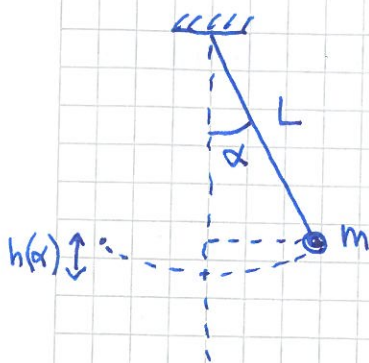
Løsn: E er bevart

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v(\theta)^2 + mgR \sin \theta = mgR$$

$$\Rightarrow v(\theta) = \underline{\underline{\sqrt{2gR(1 - \sin \theta)}}$$

[Spm: Fra der hvor normalkrafta  $N$  fra underlaget forsvinner ( $N=0$ ) har vi et "skrått kast". Ved hvilken vinkel  $\theta$  skjer dette?]

## Eks: Matematisk pendel



Bestem  $E(\alpha, \dot{\alpha})$ .

Løsn:  $U(\alpha) = mgh(\alpha) = mgL(1 - \cos \alpha)$  [Velgen  $U(0) = 0$ ]

$$K(\dot{\alpha}) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (L\dot{\alpha})^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\alpha}^2 + mgL(1 - \cos \alpha)}}$$

# Swingninger

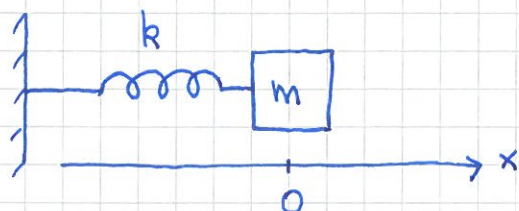
[YF 14; TM 14; LL 9; HS 6]

(22)

= oscillasjoner = periodisk oppførsel omkring likevekt

Eks: masse/fjær, pendel, gitarstreng, vibrerende atomer i krystall, ...

## Harmonisk oscillator [YF 14.2; TM 14.1; LL 9.1-9.3; HS 6.1]



Likevekt ( $F=0$ ) med  $m$  i  $x=0$ .

Strukket fjær ( $x > 0$ ):

Sammenpresset fjær ( $x < 0$ ):

$$\vec{F} = -k \times \hat{x}$$

Hookes lov

Ideell fjær:  $F \sim |x|$

$$N2: -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\text{Innfør } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Ligning for  
harm. osc. i  
1D

Generell løsning:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{evt. } x(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t$$

2.ordens diff. lign.  $\Rightarrow$  2 integrasjonskonstanter,

[A og  $\varphi$  fastlegges via 2 initialbetingelser,  $\varphi$  f.eks.  $x(0) = x_0$  og  $\dot{x}(0) = v_0$  ]

[ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \Rightarrow$  sammenheng mellom A,  $\varphi$  og B, C ]

A = amplitude = max utsving

$\omega$  = vinkel frekvens = vinkelhastighet

$[\omega] = s^{-1}$

T =  $2\pi/\omega$  = periode = tid pr svingning

$[T] = s$

f =  $T^{-1}$  = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet

$[f] = Hz = s^{-1}$

$\omega t + \varphi$  = svingningens fase

$\varphi$  = fasekonstant

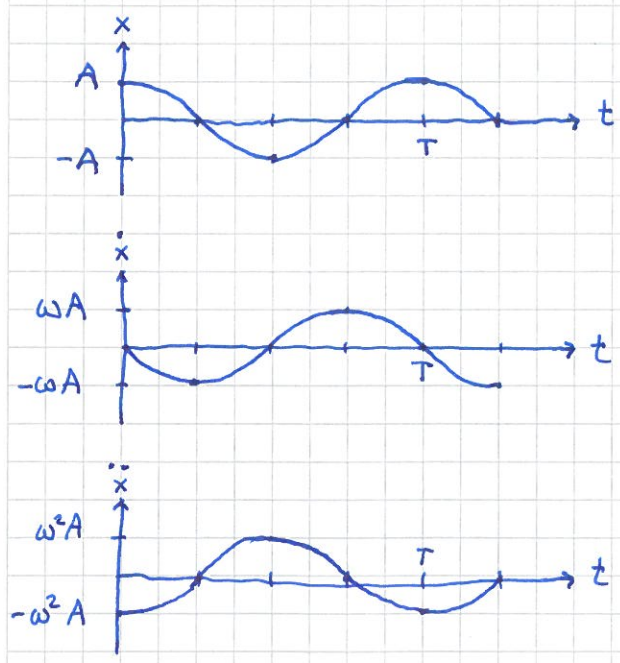
$[\varphi] = 1$

$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

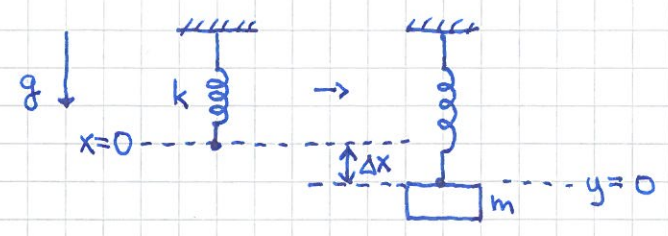
$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = \omega A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$

$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi) = -\omega^2 x(t)$

Anta f.eks.  $\varphi = 0$  og  $A > 0$ :



Hvis vertikalt i tyngdefeltet (Øving 3 og Lab):



$\Rightarrow$  Harmonisk svingn. om  $y=0$ , med  $\omega = \sqrt{k/m}$  som før.

# Energi i harmonisk oscillator

[YF 14.3; TM 14.2; LL 9.4 ~~§~~ §§]

Massens kinetiske energi:

$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} m \underbrace{\omega^2 A^2}_{=k} \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Potensiell energi i fjara:

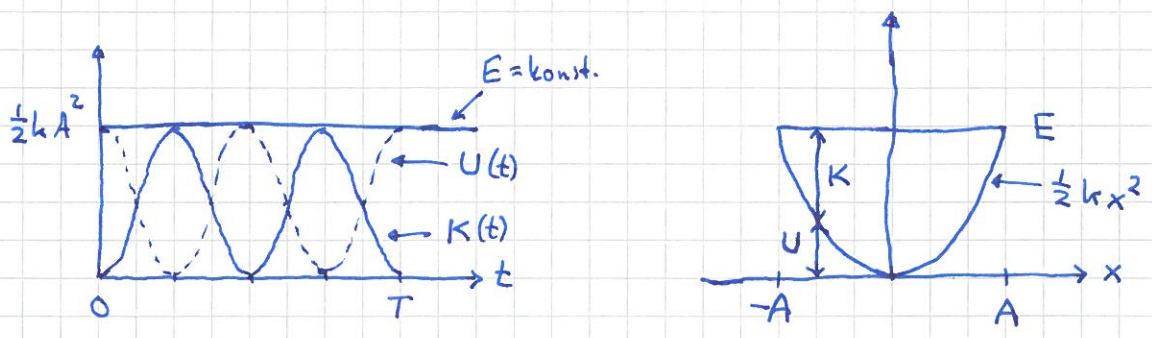
$$U = - \int_0^x F(x) \cdot dx = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\Rightarrow U(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Total energi:  $E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \text{konstant}$

$\Rightarrow$  vi har konserverbart system;  $E$  er bevart

Anta  $\varphi = 0$ :



Enkel harmonisk oscillator, oppsummering:

- $F$  er proporsjonal med utsvinget fra likevekt
- $U$  ————— " ————— kvadraten av utsvinget
- Bevegelsesligning:  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
- "Utsving" kan være lengde, vinkel etc

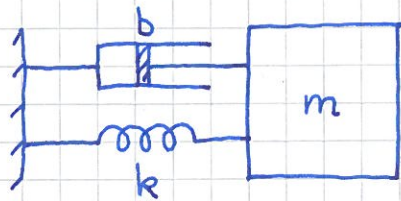


Fra sist:



$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 0; \quad \omega = \sqrt{k/m} \\ x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \text{ Enkel harmonisk oscillator}$$

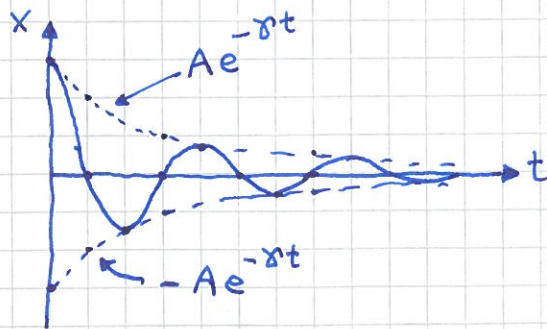
## Dempet svingning [YF 14.7; TM 14.4; LL 9.7; HS 6.2.1]

Friksjon  $\Rightarrow$  fri svingninger dempes (og dør ut)Antar  $f = -b\dot{x}$  (som for langsom bevegelse i fluid; s.14)

$$\begin{aligned} \text{N2: } -kx - b\dot{x} &= m\ddot{x} \\ \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ [\gamma] &= [\omega_0] = \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Underkritisk demping,  $\gamma < \omega_0$  (dvs  $b < 2m\sqrt{k/m} = \sqrt{4k \cdot m}$ )

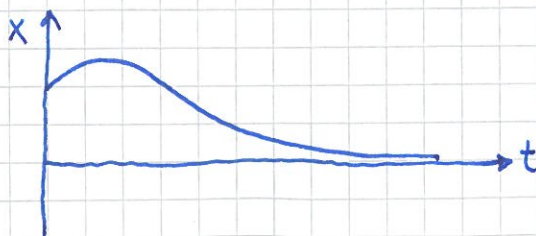
$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi); \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



- redusert frekvens pga demping ( $\omega < \omega_0$ )
- amplituden,  $Ae^{-\gamma t}$ , avtar eksponentielt med  $t$
- $A, \varphi$  fastlegges med 2 initialbetingelser:

Overkritisk demping,  $\gamma > \omega_0$ 

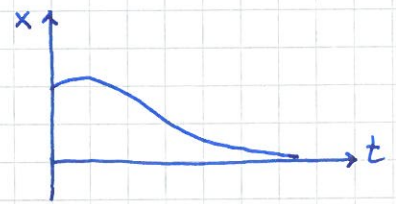
$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}; \quad \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$



(dvs ingen svingninger)

Kritisk demping,  $\delta = \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\delta t} + B t e^{-\delta t}$$

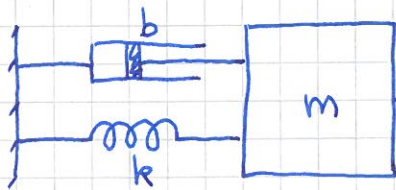


(26)

Eks: Støtdempere i bil dempes nær kritisk

$\Rightarrow$  mest behagelig på humpete vei

TVungen svingning. Resonans [YF 14.8; TM 14.5; LL 9.9; HS 6.3]



$F_y(t) = F_0 \cos \omega t =$  ytre kraft, antas harmonisk

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

[inhomogen 2.ordens diff.ligning]

Løsning:  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

der homogen løsn.  $x_h$  oppfyller  $\ddot{x}_h + 2\delta\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$

og partikulær løsn.  $x_p$  — " —  $\ddot{x}_p + 2\delta\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$

I starten (dvs: før  $e^{-\delta t}$  blir mye mindre enn 1) bidrar både  $x_h$  og  $x_p$  til et (som regel) komplekst innsvingningsforløp (jf Laboppg.).

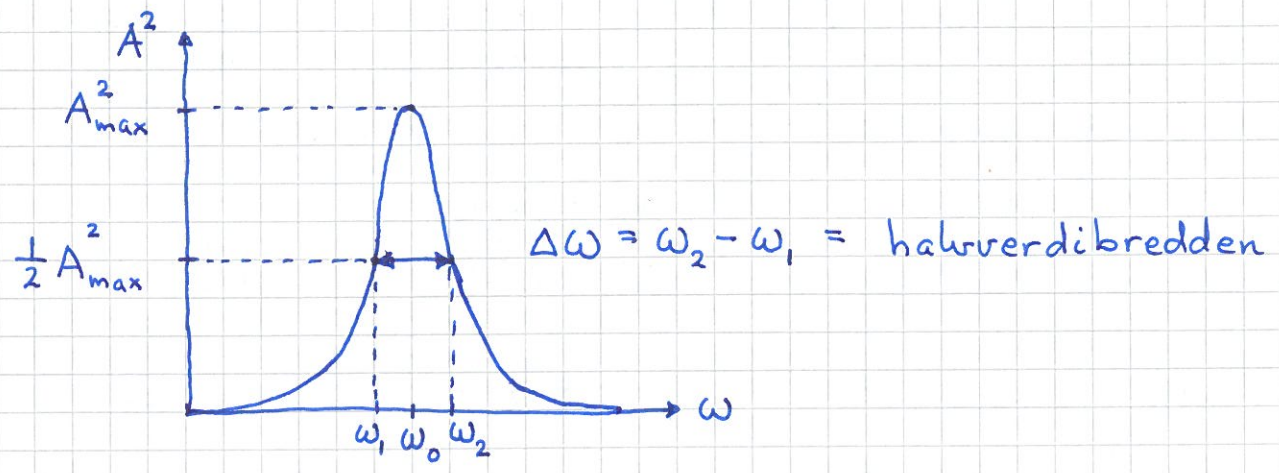
Etter "lang tid", slik at  $\delta t \gg 1$  og  $e^{-\delta t} \approx 0$ , vil

$x_h(t) \rightarrow 0$ , og  $x(t) \approx x_p(t)$ .

"Gjetter"  $x_p(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$ , verifiseres ved innsetting, og finner den frekvensavhengige amplituden.

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\delta = \frac{b}{m}$$

som viser at vi får resonans: Med svak demping (dvs liten  $\delta$ ) og ytre kraft med frekvens  $\omega$  i nærheten av systemets egenfrekvens  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , så blir amplituden A stor:



$\Delta\omega$  refererer til oscillatorens energi, som er prop. med  $A^2$  (se s. 24). Liten  $\delta \Rightarrow$  skarp resonans, med  $\Delta\omega \approx 2\delta$ .

Resonanstoppens Q-faktor (Q for "quality"):

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (\gg 1 \text{ hvis } \delta \ll \omega_0)$$

Frekvensavhengig fasekonstant:

$$\varphi(\omega) = \arctan \left\{ \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega} \right\}$$

Tilført effekt av  $F_y(t) = F_0 \cos \omega t$  ved resonans,  $\omega \approx \omega_0$ :

$$P(t) = F_y(t) \cdot \dot{x}_p(t) = F_0 \cos \omega t \cdot \omega A(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = \arctan 0 = 0, \text{ og } A = A(\omega_0) = A_{\max} = \frac{F_0}{b \cdot \omega_0}$$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{F_0^2}{b} \cdot \cos^2 \omega_0 t \geq 0 \text{ hele tiden;}$$

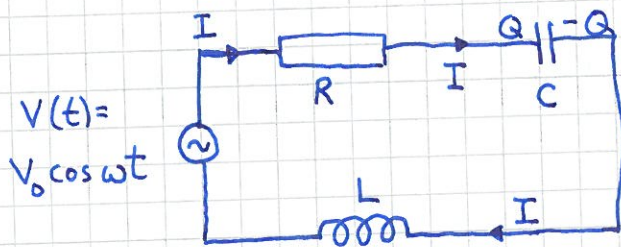
dvs maksimal tilført effekt ved resonans!

# Elektrisk svingekrets

(Mer om dette mot slutten av kurset, men nevnes nå, da det kommer på laben.)

(27B)

4104  
12.09.1  
4115  
17.09.13



$$I = dQ/dt = \dot{Q}$$

- R : motstand
- C : kondensator
- L : spole

- Spenning over motstand R :  $V_R = R \cdot I = R \cdot \dot{Q}$  (Ohms lov)
- " ———— kapasitans C :  $V_C = Q/C$
- " ———— induktans L :  $V_L = L \cdot dI/dt = L \cdot \ddot{Q}$

Kirchhoffs spenningsregel  $\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \cos \omega t$

Dvs nøyaktig samme diff.lign. for Q, ladningen på kondensatoren, som for x, massens utsving fra likevekt, i det mekaniske svingesystemet :  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

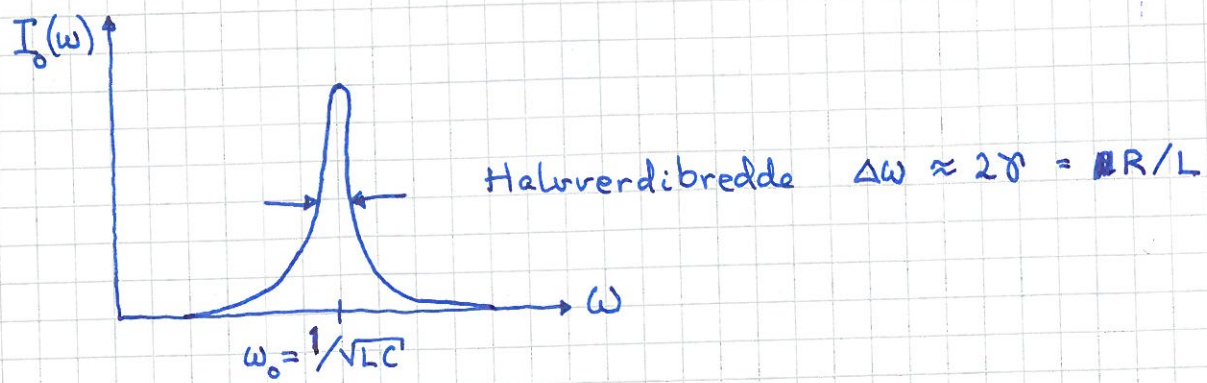
Vi har dermed analoge ("tilsvarende") størrelser :

$m \leftrightarrow L, \quad b \leftrightarrow R, \quad k \leftrightarrow 1/C, \quad x \leftrightarrow Q, \quad \dot{x} \leftrightarrow I$   
 $\omega_0^{mek} = \sqrt{k/m} \leftrightarrow \omega_0^{el} = \sqrt{1/LC} \quad osv.$

$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = \omega Q_0(\omega) \cos(\omega t + \phi)$

med  $Q_0(\omega) = (V_0/L) / \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$  ;  $2\gamma = R/L$

Resonans, dvs stor strømamplitude  $I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$ , når  $\omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$  :



Eks (LAB):  $L = 22 \text{ mH}, \quad C = 0.15 \mu\text{F}, \quad R = 20 \Omega$

$\Rightarrow f_0 = 2.77 \text{ kHz}, \quad \Delta f \approx 0.29 \text{ kHz}, \quad Q = f_0/\Delta f \approx 20$

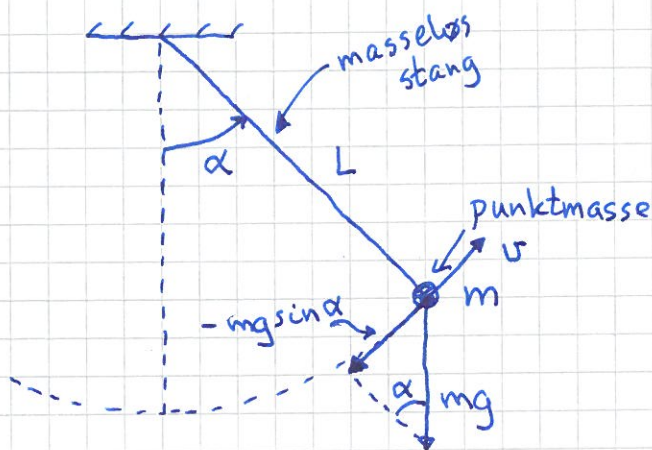
# Eksempel, inkl. numerisk løsningsmetode

[TM 5.4]

(28)

(Øving 4, oppgave 1)

Matematisk pendel (se s. 21, samt øving 2, oppg. 4) :



N2 || sirkelbuen :

$$-mg \sin \alpha = m a_{||}$$

$$a_{||} = L \ddot{\alpha}$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{g}{L} \sin \alpha = 0$$

Hvis små utsving,  $|\alpha| \ll 1$  :  $\sin \alpha \approx \alpha$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{g}{L} \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \left. \vphantom{\alpha(t)} \right\} \text{ Enkel harmonisk oscillator}$$

med  $\omega = \sqrt{g/L}$ , dvs  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$

Hvis større utsving :  $\ddot{\alpha} + \frac{g}{L} \sin \alpha = 0$  kan ikke løses analytisk ; numerisk løsningsmetode er nødvendig.

Enkleste metode er såkalt "forward Euler" :

Vi har (pr def.)

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t+dt) - \dot{\alpha}(t)}{dt} \Rightarrow \dot{\alpha}(t+dt) = \dot{\alpha}(t) + \ddot{\alpha}(t) dt$$

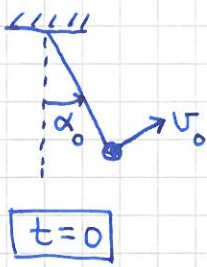
$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\alpha(t+dt) - \alpha(t)}{dt} \Rightarrow \alpha(t+dt) = \alpha(t) + \dot{\alpha}(t) dt$$

La  $dt \rightarrow$  endelig tidssteg  $\Delta t$  og " $=$ "  $\rightarrow$  " $\approx$ " :

$$\alpha(t+\Delta t) \approx \alpha(t) + \dot{\alpha}(t) \Delta t$$

$$\dot{\alpha}(t+\Delta t) \approx \dot{\alpha}(t) + \ddot{\alpha}(t) \Delta t \quad \stackrel{\text{her}}{=} \dot{\alpha}(t) - \Delta t \cdot \frac{g}{L} \cdot \sin \alpha(t)$$

Dermed, med initialbetingelser  $\alpha(0) = \alpha_0$  og  $v(0) = v_0$ , (29)  
 dvs  $\dot{\alpha}(0) = v_0/L$ :



$$\alpha(\Delta t) \approx \alpha(0) + \dot{\alpha}(0) \Delta t = \alpha_0 + \frac{v_0}{L} \Delta t$$

$$\dot{\alpha}(\Delta t) \approx \dot{\alpha}(0) + \ddot{\alpha}(0) \Delta t = \frac{v_0}{L} - \Delta t \cdot \frac{g}{L} \cdot \sin \alpha_0$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha[(n+1) \cdot \Delta t] &\approx \alpha[n \cdot \Delta t] + \dot{\alpha}[n \cdot \Delta t] \cdot \Delta t \\ \dot{\alpha}[(n+1) \cdot \Delta t] &\approx \dot{\alpha}[n \cdot \Delta t] + \ddot{\alpha}[n \cdot \Delta t] \cdot \Delta t \end{aligned} \right\} n=0,1,2,\dots$$

Kan nå blant annet:

- plote  $\alpha(t)$ ,  $\dot{\alpha}(t)$  etc.
- regne ut  $K(t)$ ,  $U(t)$  og  $E(t)$  og sjekke energibevarelse (se s. 21)
- sammenligne numerisk løsning med harm. osc.-tilnærmelsen
- inkludere friksjon, med  $f = -bv$  evt  $f = -Dv^2$  (se s. 14)
- inkludere ytre kraft  $F_y(t)$

etc. etc.

Andre (og bedre) num. metoder for løsn. av ordinære diff.lign:

- Verlet
- Runge-Kutta

Verlet: 
$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t+\Delta t/2) - \dot{\alpha}(t-\Delta t/2)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} - \frac{\alpha(t) - \alpha(t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\alpha(t+\Delta t) - 2\alpha(t) + \alpha(t-\Delta t)}{\Delta t^2}$$

## Impuls og impulsbevarelse [YF8; TM8; LL5; HS 3.6,3.7] (30)

[Terminologi: impuls  $\equiv$  beregelsesmengde]

[Engelsk: (linear) momentum]

N2 for legeme med (konstant) masse  $m$ :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

impuls = masse  $\cdot$  hastighet

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad [p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Dermed:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad \text{N2}$$

som gir

Loen om impulsbevarelse:

Hvis sum av ytre krefter p  et legeme er null, er legemets impuls bevart:  $\vec{F}=0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$

Kollisjoner [YF 8.3+8.4; TM 8.3; LL 5.3; HS 3.7.1]

= (som regel kortvarige) st t mellom legemer

Elastisk st t:  $\Delta K = 0$  (energien er bevart)

Uelastisk st t:  $\Delta K < 0$  (— " — ikke bevart)

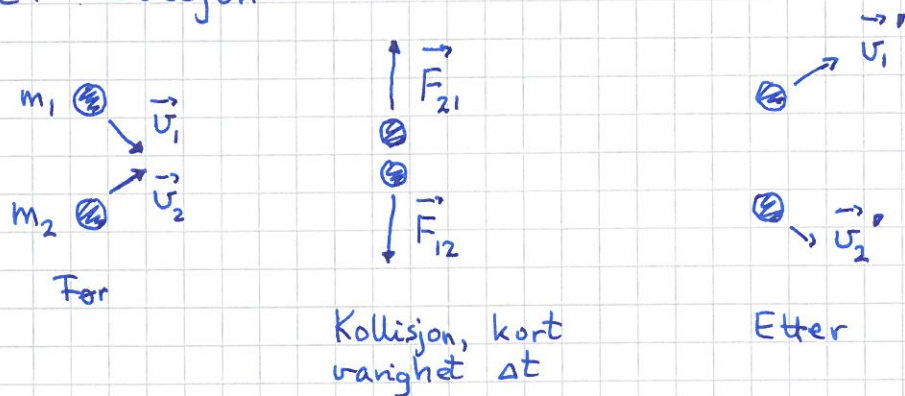
Fullstendig uelastisk støt: Legemene henger sammen og har felles hastighet etter kollisjonen.

(Gir maksimalt energitap  $|\Delta K|$ .)

Tapt mekanisk energi  $\Delta K \rightarrow$  deformasjon, varme, lyd, ...

Men: Dersom  $\vec{F}_{\text{ytre}} = 0$  (evt. neglisjerbar) under kollisjonen, er  $\Delta \vec{p} = 0$  for alle typer kollisjoner.

Har typisk store men ukjente indre krefter i en kollisjon:



N3 garanterer impulsbevarelse for systemet  $m_1 + m_2$ :

$$\vec{F}_{21} \stackrel{N3}{=} -\vec{F}_{12}$$

$$\stackrel{N2}{\Rightarrow} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\Rightarrow d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

Eks: Fullstendig uelastisk støt.

$m \xrightarrow{u} \quad \leftarrow V \quad M$  Før

$m+M \rightarrow v'=?$  Etter

Løsn:  $p_{\text{før}} = mu - MV$   
 $= p_{\text{etter}} = (m+M)v'$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v' = \frac{mu - MV}{m+M}}}$$



Eks:  $\langle F \rangle$  på bordtennisball = ?  $\langle F \rangle / mg = ?$

(32)

Løsning:  $m = 2.7 \text{ g}$ ,  $v_i \sim 10 \text{ m/s}$ ,  $v_f \sim 30 \text{ m/s}$ ,  $\Delta t \sim 1 \text{ ms}$

$$\Rightarrow \langle F \rangle = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = \frac{2.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 40 \text{ m/s}}{10^{-3} \text{ s}} = \underline{108 \text{ N}}$$

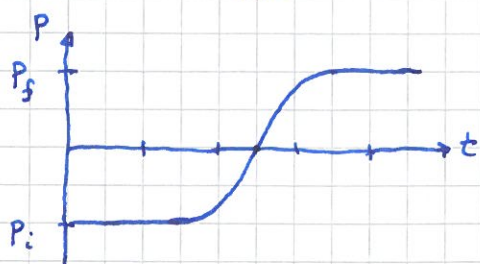
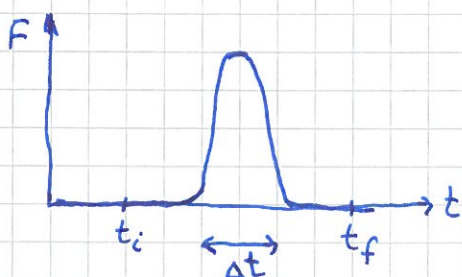
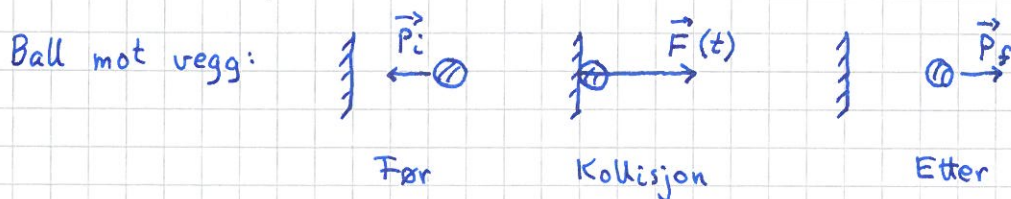
$$\langle F \rangle / mg \approx \frac{\Delta v}{g \Delta t} = \frac{\langle a \rangle}{g} \approx \frac{40 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2}{10 \text{ m/s}^2} = \underline{4000}$$

Dvs: Heft OK å neglisjere ytre kraft  $mg$  i støtet

### Kraftstøt [YF 8.1; TM 8.3; LL 5.2; HS 3.7.1]

(Eng: impulse) ("kraftimpuls")

= impulsendring i støt



Ballens impulsendring i kollisjonen:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt \quad \approx \text{kraftstøket (fra vegg på ballen)}$$

[Hva blir veggen impulsendring i denne kollisjonen?]

# Sentralt støt [YF 8.2-8.4; TM 8.3; LL5.3; HS 3.7.1]

(33)

Før:  $\begin{array}{ccc} \textcircled{\ominus} \rightarrow v & & V \leftarrow \textcircled{\ominus} \\ m & & M \end{array} \quad (i)$

(  $\leftarrow$   $\rightarrow$  )

Etter:  $\begin{array}{ccc} v' \leftarrow \textcircled{\ominus} & & \textcircled{\ominus} \rightarrow V' \\ m & & M \end{array} \quad (f)$

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mv + MV}_{P_i} = \underbrace{mv' + MV'}_{P_f} \quad (\text{alle typer støt})$$

(a) Elastisk støt,  $\Delta K = 0$ :

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2}_{K_i} = \underbrace{\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2}_{K_f}$$

Omskriving:

$$m(v+u')(v-u') = M(v'+V)(v'-V) \quad (1) \quad (\Delta K=0)$$

$$m(v-u') = M(v'-V) \quad (2) \quad (\Delta p=0)$$

Triks: Ta (1)/(2)

$$\Rightarrow v + u' = V + v'$$

$$\text{dvs } v' - V' = -(v - V) \quad (3) \quad (\text{relativhastigheten skifter fortegn})$$

Finnes  $u'$  og  $V'$  fra (2) og (3):

$$v' = \frac{M}{m+M} \left\{ 2V + v \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$
$$V' = \frac{m}{M+m} \left\{ 2v + V \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$

(merk ombytte  $m \rightarrow M$ ,  
 $v \rightarrow V$  etc. når  $v' \rightarrow V'$ )

(b) Fullstendig uelastisk støt:

$$v' = V' = \frac{mv + MV}{m+M} \quad (\text{fra } \Delta p = 0)$$

(c) Delvis uelastisk støt: Har kun 1 ligning ( $\Delta p = 0$ ) for 2 ukjente ( $v', V'$ ).  
Trenger en ekstra opplysning for å bestemme både  $v'$  og  $V'$ .

Eks: Elastisk kollisjon med vegg



Sjekk: Er  $\Delta p = 0$ ? Er  $\Delta K = 0$ ?

Løsning:

$$v' = \frac{M}{m+M} \left\{ 0 + v \cdot \frac{m-M}{M} \right\} \approx \frac{M}{M} \cdot v \cdot \left( \frac{-M}{M} \right) = \underline{\underline{-v}} \quad (\text{som ventet})$$

$$V' = \frac{m}{M+m} \{ 2v + 0 \} \approx \frac{m}{M} \cdot 2v \approx \underline{\underline{0}} \quad (-''-)$$

Er  $\Delta p = 0$ ?

$$p' = mv' = -mv, \quad P' = MV' \approx M \cdot \frac{m}{M} \cdot 2v = 2mv$$

$$p = mv, \quad P = MV = 0$$

$$\Rightarrow p' + P' = p + P = mv \quad \text{Ok!}$$

Er  $\Delta K = 0$ ?

$$K_m' = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m v^2, \quad K_M' = \frac{1}{2} M V'^2 \approx \frac{1}{2} M \cdot \left( \frac{m}{M} \cdot 2v \right)^2 \\ = 2 \cdot \frac{m^2}{M} \cdot v^2 \approx 0$$

$$K_m = \frac{1}{2} m v^2, \quad K_M = \frac{1}{2} M V^2 = 0$$

$$\Rightarrow K_m' + K_M' = K_m + K_M = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{Ok!}$$

# Rakettprinsipp [YF 8.6; TM 8.5; LL 5.4; HS 3.7.2]

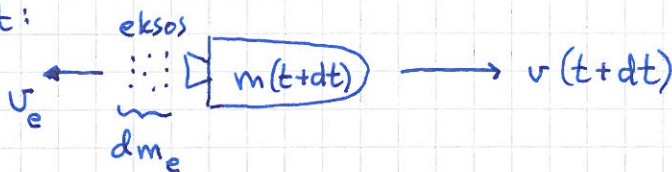
(35)

Ved tid  $t$ :



$$p(t) = m(t)v(t)$$

Ved tid  $t+dt$ :



$$p(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)}_{m(t)+dm} \cdot \underbrace{v(t+dt)}_{v(t)+dv} + \underbrace{dm_e}_{-dm} \cdot \underbrace{v_e(t)}_{v(t)+u, \text{ der } u = \text{eksosens hastighet relativt raketten}}$$

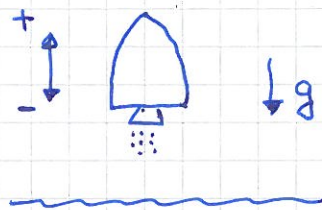
$$= \underbrace{m(t)v(t)}_{= p(t)} + m(t)dv + \underbrace{dm \cdot v(t)}_{= 0} - dm \cdot v(t) - u dm$$

"Outer space":  $F_{\text{ytre}} = 0 \stackrel{N_2}{\Rightarrow} p(t+dt) = p(t) \Rightarrow m(t)dv = u dm$

$$\Rightarrow m(t) \cdot \frac{dv}{dt} = u \cdot \frac{dm}{dt} = u \dot{m} \quad (u < 0, \dot{m} < 0)$$

$$\Rightarrow \text{Skyrkraft: } F_{\text{skyr}} = u \dot{m} > 0$$

I tyngdefeltet:  $F_{\text{ytre}} = -m(t)g$



$\Rightarrow$  Totalkraft på (rest-)raketten:

$$F_{\text{skyr}} + F_{\text{ytre}}$$

$$\stackrel{N_2}{\Rightarrow} u \dot{m} - mg = ma$$

Øving 5: Saturn V, tinn 1. [TM Ex. 8.19; litt andre tall]

[HS 3.7.2; - " - ]

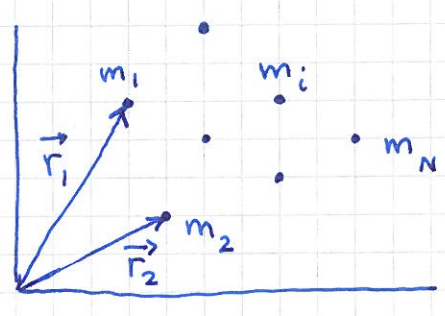
Så langt i kurset: Punktmasser (eller: form og størrelse på legemet uten praktisk betydning)

Nå: Partikkelsystemer; for det meste stive legemer.

Rotasjonsdynamikk blir et aktuelt tema!

Men aller først:

Massesenter, tyngdepunkt [YF 8.5; TMS.5; LL 5.6+5.8; HS 3.5]



System med N partikler, masser  $m_1, m_2, \dots, m_N$  i posisjoner  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

Massesenteret (CM = center of mass):

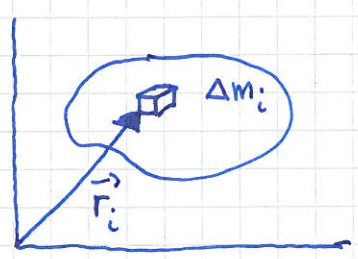
$$\vec{R}_{CM} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Total masse:  $M = \sum_i m_i$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

(Med konstant g over hele systemet er tyngdepunktet samme sted som massesenteret.)

Med kontinuerlig massefordeling: [YF oppg 8.115 + 8.116; TM 5.5; LL 6.1; HS 3.5]



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\int dm \cdot \vec{r}}{\int dm}$$

$M = \int dm = \text{total masse}$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

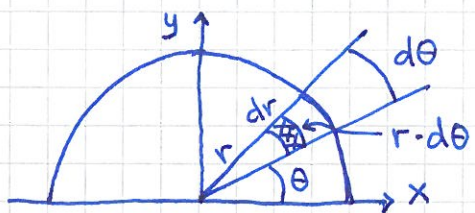
Her går integralet "over legemet" (der massen er!)

Masselementet:

$$dm = \begin{cases} \rho \cdot dV; & \rho = \text{masse pr volumenet}; & dV = \text{volumenelement} & (3D) \\ \sigma \cdot dA; & \sigma = \text{---"--- flate ---}; & dA = \text{flate ---} & (2D) \\ \lambda \cdot dl; & \lambda = \text{---"--- lengde ---}; & dl = \text{linje ---} & (1D) \end{cases}$$

Et hensiktsmessig koordinatsystem velges ut fra legemets form og eventuell symmetri.

Eks: Halvsirkulær tynn skive, radius R, masse  $\sigma$  pr flateenhet



$$dm = \sigma \cdot dA = \sigma \cdot r d\theta \cdot dr$$

$$M = \sigma \cdot \frac{1}{2} \pi R^2$$

$$\vec{r} = \hat{x} x + \hat{y} y = \hat{x} r \cos \theta + \hat{y} r \sin \theta$$

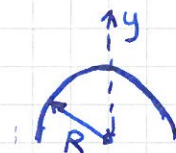
Ser at  $X_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{R}_{CM} = Y_{CM} \hat{y}$

$$\text{med } Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \cdot dm = \frac{2}{\sigma \pi R^2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} r \sin \theta \cdot \sigma \cdot r d\theta \cdot dr$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \left( \int_0^R r^2 dr \right) \cdot \left( \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \right) = \frac{4}{3\pi} R \approx 0.42 R$$

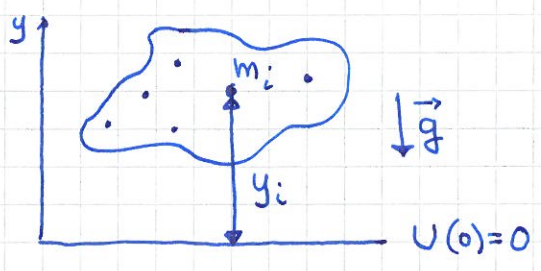
$\int_0^R r^2 dr = \frac{1}{3} R^3$        $\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \int_0^{\pi} (-\cos \theta) = 1 + 1 = 2$

Oppg, 1D: Vis at  $Y_{CM} = \frac{2}{\pi} R$  for halvsirkel



Oppg, 3D: Vis at  $Y_{CM} = \frac{3}{8} R$  for halvkule

# Potensiell energi for partikkelsystem i tyngdefeltet



$$U = \sum_i U_i = \sum_i m_i g y_i$$

$$\stackrel{\text{anta}}{=} \underset{g=\text{konst.}}{g} \sum_i m_i y_i = \underline{g M Y_{CM}}$$

Dvs: Som om hele massen  $M = \sum_i m_i$  var samlet i høyden  $Y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i$ , og da f.eks. i massesenteret  $\vec{R}_{CM}$ .

## Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5; TM 5.5; LL 5.8; HS 3.5]

Ser på system med  $N$  masser,  $m_1, m_2, \dots, m_N$ .

N2 for  $m_i$ :  $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$  ( $i=1,2,\dots,N$ )

- der  $\vec{F}_{i,ytre}$  = ytre kraft på  $m_i$
- $\vec{F}_{ji}$  = ("indre") kraft fra  $m_j$  på  $m_i$
- $\Rightarrow \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$  = total indre kraft på  $m_i$

Ta  $\sum_i$  av ligningen ovenfor:  $\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_{i,ytre} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} (M \cdot \vec{R}_{CM}) = M \cdot \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft på systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_{31} + \vec{F}_{13}}_{=0} + \dots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0 \quad (\text{pga N3})$$

Dermed:  $M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}$

Dvs:  $\vec{R}_{CM}$  beveger seg som om hele  $M$  var samlet i  $\vec{R}_{CM}$  og ble utsatt for summen av alle ytre krefter som virker på systemet. I tillegg kommer rotasjonen om CM.  
[+ evt. vibrasjoner, som ikke er tema her]

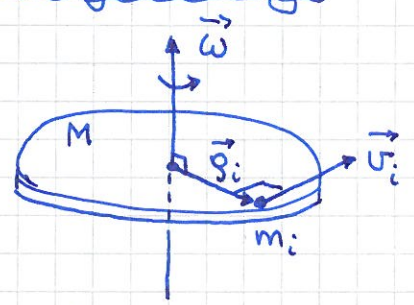
# Rotasjon

[YF 9+10; TM 9+10; LL 5.5+5.9+6; HS 4+5]

Først: Rask gjennomgang av ren rotasjon om fast akse.

Derneft: Grundigere og mer generell gjennomgang.

## Rotasjonsenergi



$$\begin{aligned}
 K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\
 &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i r_i^2 \right\} \omega^2
 \end{aligned}$$

s.B:  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ ;  $v_i = r_i \omega$

## Tregghetsmoment

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i r_i^2 = \text{legemets tregghetsmoment (om gitt akse)}$$

Dermed:

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \left[ \text{Translasjonsanalogi: } K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M V^2 \right]$$

Hvis kontinuerlig massefordeling:

$$m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} dm, \text{ og } \sum_i \rightarrow \int_{\text{(over legemet)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int r^2 dm}$$

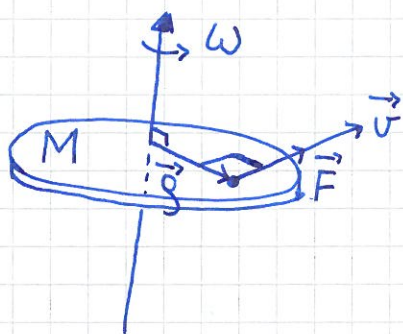
(der  $r$  = avstand fra rotaksen til masseelementet  $dm$ )



## Dreiemoment

(evt: Kraftmoment; eng: Torque)

(40)



antar her  $\vec{F} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{g}$

$\tau \stackrel{\text{def}}{=} F \cdot g = F$ 's dreiemoment om rot.aksen

## N2 for rotasjon om fast akse

Ser på tilført effekt:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = F \cdot g \cdot \omega = \tau \cdot \omega$$

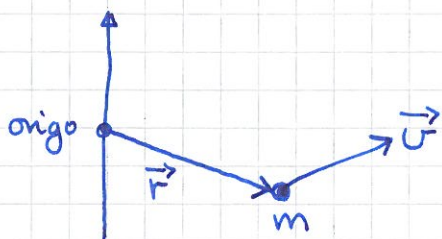
Dessuten:

$$P = \frac{dK_{\text{rot}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I \omega^2 \right) \stackrel{\substack{\text{anta} \\ I = \text{konst.}}}{=} I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I \dot{\omega}} \quad [\text{Transl. analogi: } F = M \dot{V} \text{ (N2)}]$$

## Dreieimpuls

(evt: spinn)



$$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

=  $m$ 's dreieimpuls (relativt origo)

## Dreiemoment som vektor

$$\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{F}$$
's dreiemoment (relativt origo)

# Dreieimpulsbevarelse

(41)

Hva gir endring i  $\vec{L}$ ? La oss se på  $\dot{\vec{L}}$ :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = m \left\{ \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{=\vec{v} \times \vec{v} = 0} + \underbrace{\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}}_{=\vec{r} \times \vec{F}/m \text{ (N2!)}} \right\} = \vec{\tau}$$

N2 for rotasjon, inkl. bevaring av  $\vec{L}$ :

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}; \text{ ders } \vec{L} = \text{konst. hvis } \vec{\tau} = 0$$

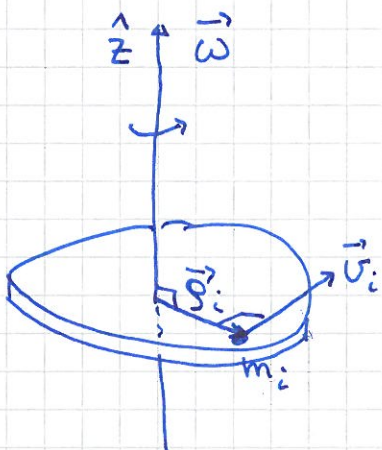
[Transl.analogi:  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ ; ders  $\vec{p} = \text{konst. hvis } \vec{F} = 0$ ]

For isolert system:  $E$ ,  $\vec{p}$  og  $\vec{L}$  er bevart.

Hva er  $\vec{L}$  for ren rotasjon om fast akse?

Svar:  $\vec{L} = I \vec{\omega}$ .

Bewis:



$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{r}_i \times \vec{v}_i = r_i v_i \hat{z} = r_i^2 \omega \hat{z}$$

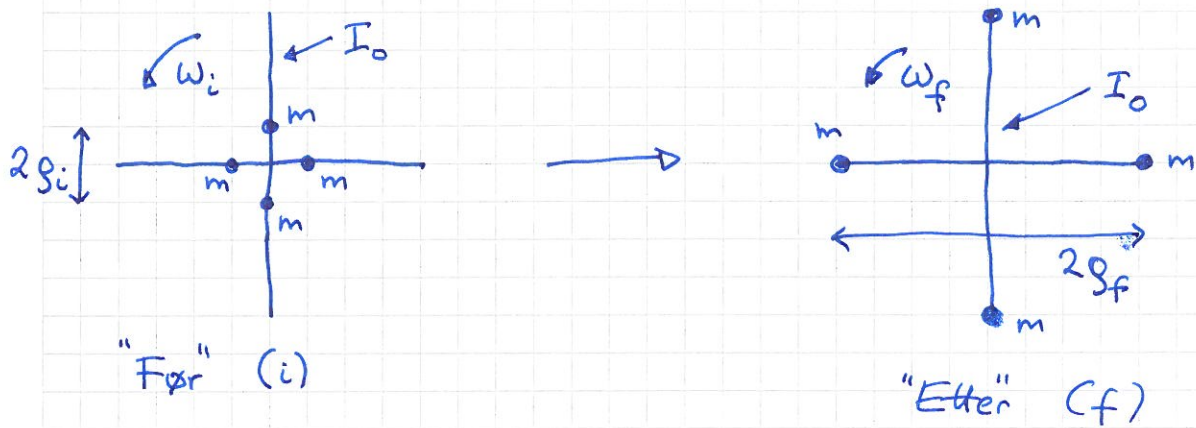
$$\Rightarrow \vec{L} = \underbrace{\left( \sum_i m_i r_i^2 \right)}_{=I} \cdot \underbrace{\omega \hat{z}}_{=\vec{\omega}}$$

$$= I \vec{\omega} \quad \text{qed}$$

[Translasjonsanalogi:  $\vec{p} = M \vec{V}$ ]

Relevans for LAB-oppg. om rotasjon:

(42)



$$I_i = I_0 + 4mg_i^2$$

$$I_f = I_0 + 4mg_f^2 > I_i$$

Inlet ytre dreiemoment fra (i) til (f)

$$\Rightarrow L_i = L_f \quad (\text{dreieimpulsbevarelse!})$$

$$\Rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f \quad \Rightarrow \omega_f = \omega_i \cdot \frac{I_i}{I_f} < \omega_i$$

Hva med energibevarelse?

$$K_i = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$$

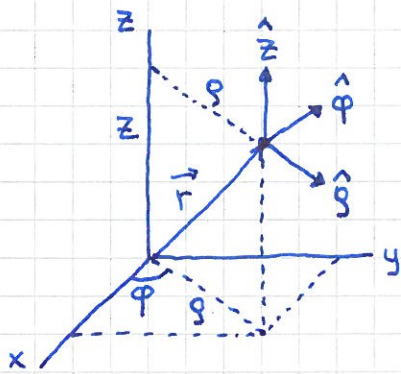
$$\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{1}{2} I_f \cdot \left( \omega_i \frac{I_i}{I_f} \right)^2 = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \cdot \frac{I_i}{I_f} \\ &= K_i \cdot \frac{I_i}{I_f} < K_i \end{aligned}$$

Hmm...!? Hvor ble det av  $|\Delta K| = |K_f - K_i|$ ?

# Sirkelbevægelse [YF 9.1-9.3; TM 9.1; LL 1.8; HS 2.1.2] (43)

(Delvis repetisjon, se s. 6-8.)

Anta rotasjon om z-aksen  $\Rightarrow$  velger sylinderkoordin.  $(\rho, \varphi, z)$

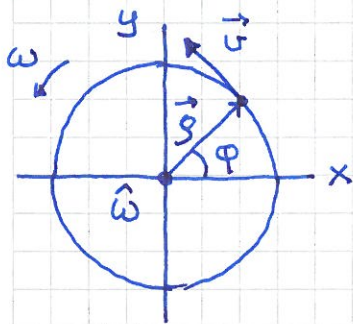


$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{\varphi} = \omega \hat{\varphi}$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z} = \omega \hat{\omega}, \quad \vec{\rho} = \rho \hat{\rho}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$T = 2\pi/\omega =$  periode,  $f = 1/T =$  frekvens

$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} =$  vinkelakselerasjon

$v = \omega\rho =$  banehastighet

$a_{\parallel} = \dot{v} = \dot{\omega}\rho = \alpha\rho =$  baneaks. ( $\vec{a}_{\parallel} = \alpha\rho\hat{\varphi}$ )

$a_{\perp} = v^2/\rho = \omega v = \omega^2\rho =$  sentripetalaks. ( $\vec{a}_{\perp} = -\omega^2\rho\hat{\rho}$ )

$$\begin{aligned} \text{[ Total aks.: } \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} \\ &= \dot{\omega}\rho\hat{\varphi} - \omega v\hat{\rho} = a_{\parallel}\hat{\varphi} - a_{\perp}\hat{\rho} \end{aligned}$$

Med stivt legeme:

- felles  $\omega$  og  $\alpha$  for hele legemet
- $v$  og  $a$  øker med  $\rho$  ( $\rho =$  avstand fra rot.aksen)

# Trehetsmoment [YF 9.4; TM 9.3; LL 6.2, 6.3; HS 4.2] (44)


For ren rotasjon om fast akse:

$$K = K_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

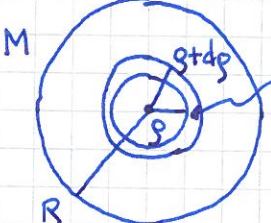
der  $I = \sum_i m_i r_i^2$  (evt.  $I = \int r^2 dm$ ) er legemets trehetsmoment mhp <sup>rot.</sup>aksen.

Notasjon:  $I = I_0$  hvis akse gjennom legemets CM.

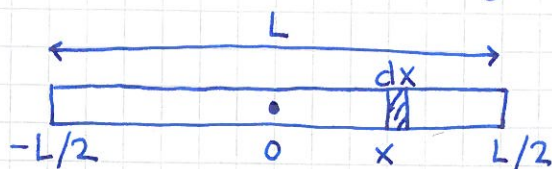
Eks 1: Ring (og "sylinderskall")


$$I_0 = \int_{\text{ring}} r^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

Eks 2: Sirkulær skive (og kompakt sylinder)


$$dm = M \cdot \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{2\pi r \cdot dr}{\pi R^2} = \frac{2M}{R^2} r dr$$
$$I_0 = \int_0^R r^2 \frac{2M}{R^2} r dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \frac{1}{4} r^3 = \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}}$$

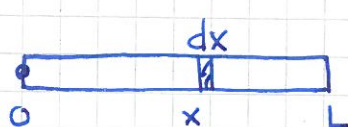
Eks 3: Tynn stang



$$dm = M \cdot \frac{dx}{L}, \quad r = x$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{3} x^3 = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$

Eks 4: Om stangas ende



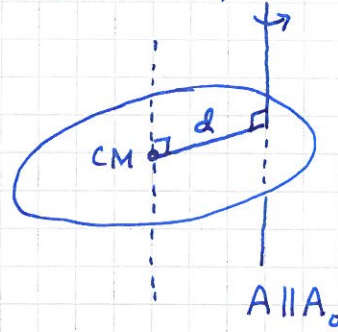
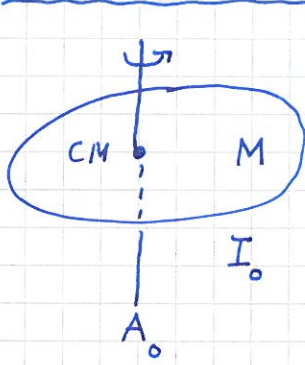
$$I = \int_0^L x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

Øving 6: Kuleskall:  $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$  Kompakt kule:  $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

# Steiners sats

[YF 9.5; TM 9.3; LL 6.3; HS 4.3]

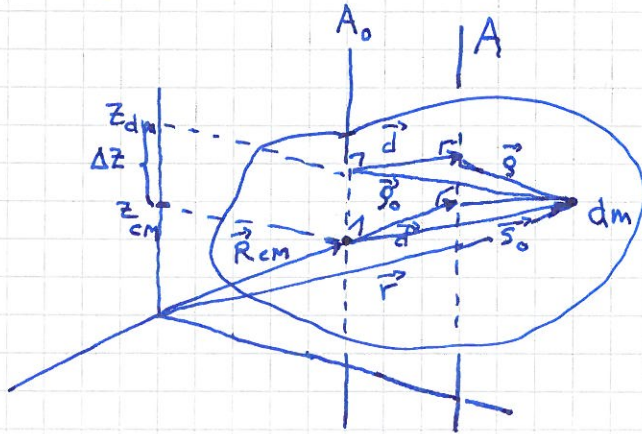
(45)



$$I = I_0 + Md^2$$

Bevis:

[Bedre figur på s. 45B]



$$\vec{s}_0 = \vec{d} + \vec{s}$$

$$I_0 = \int s_0^2 dm$$

$$s^2 = s_0^2 + d^2 - 2\vec{d} \cdot \vec{s}_0$$

$$\Rightarrow I = \int s^2 dm = \underbrace{\int s_0^2 dm}_{= I_0} + d^2 \underbrace{\int dm}_{= M} - 2\vec{d} \cdot \int \vec{s}_0 dm$$

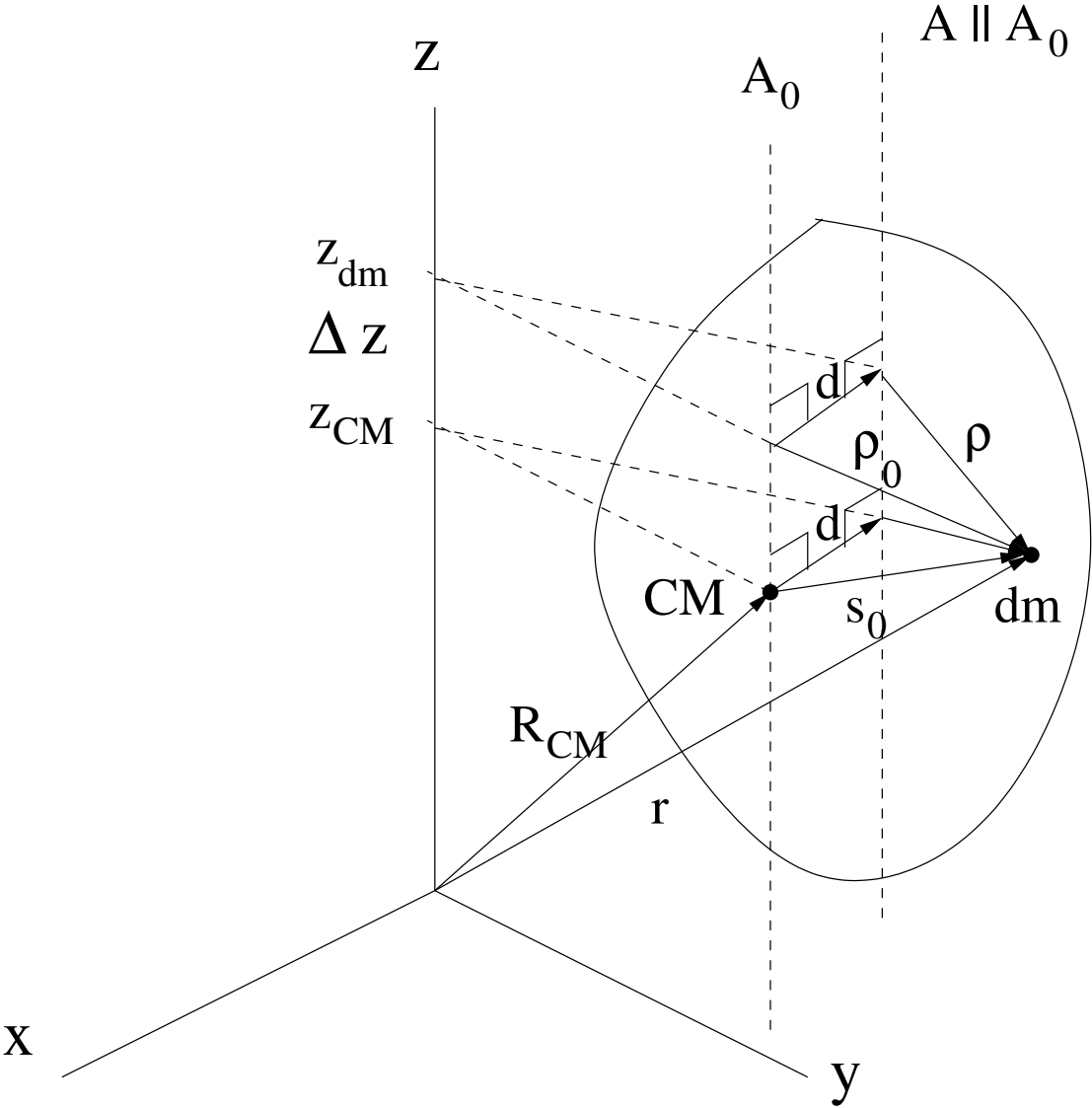
$$\vec{r} = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_0 = \vec{R}_{CM} + \Delta z \cdot \hat{z} + \vec{s}_0$$

$$\Rightarrow \vec{d} \cdot \vec{s}_0 = \vec{d} \cdot (\vec{r} - \vec{R}_{CM}) - \Delta z \underbrace{\vec{d} \cdot \hat{z}}_{= 0}$$

$$\Rightarrow \vec{d} \cdot \int \vec{s}_0 dm = \vec{d} \cdot \underbrace{\int \vec{r} dm}_{= M\vec{R}_{CM}} - \vec{d} \cdot \underbrace{\vec{R}_{CM} \int dm}_{= M} = 0$$

$$\Rightarrow I = I_0 + Md^2 \quad \text{qed}$$

[Terminologi: Steiners sats = Parallellaksetheorem]



$$\rho_0 = d + \rho$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_{CM} + \mathbf{s}_0$$

$$= \mathbf{R}_{CM} + \Delta z \hat{\mathbf{z}} + \rho_0$$

# Kinetisk energi for stirt legeme

[YF 10.3; TM 9.3; LL 6.6; HS 4.1]

## Generell beregelse for stirt legeme:

Translasjon av CM + Rotasjon om akse  $A_0$  gjennom CM.

Skal vise at: 
$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

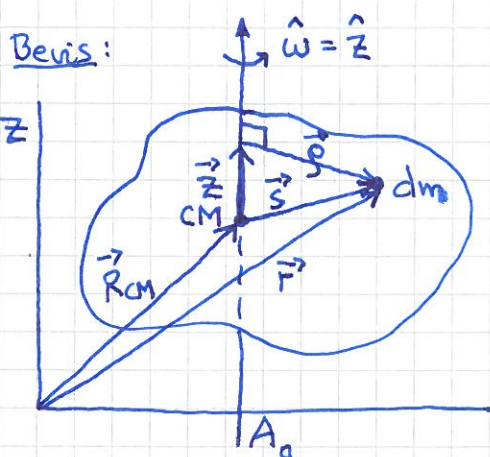
der

$M$  = legemets masse

$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{\text{CM}}$  = hastigheten til CM

$I_0$  = legemets treghetsmoment om aksene  $A_0$

$\vec{\omega}$  = vinkelhastigheten for rotasjonen om  $A_0$



$$\vec{r} = \vec{R}_{\text{CM}} + \vec{s} = \vec{R}_{\text{CM}} + \vec{z} + \vec{g}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = dm\text{'s hastighet}$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \text{CM's } \text{---} \text{---}$$

$$\vec{u} = \dot{\vec{s}} = \dot{\vec{g}} = dm\text{'s hastighet}$$

relativt CM  $\Rightarrow \vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$

$$dK = \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = dm\text{'s kinetiske energi}$$

$$\Rightarrow K = \int dK = \int \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = \text{legemets kinetiske energi}$$

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (\vec{V} + \vec{u}) \cdot (\vec{V} + \vec{u}) = V^2 + u^2 + 2\vec{V} \cdot \vec{u}$$

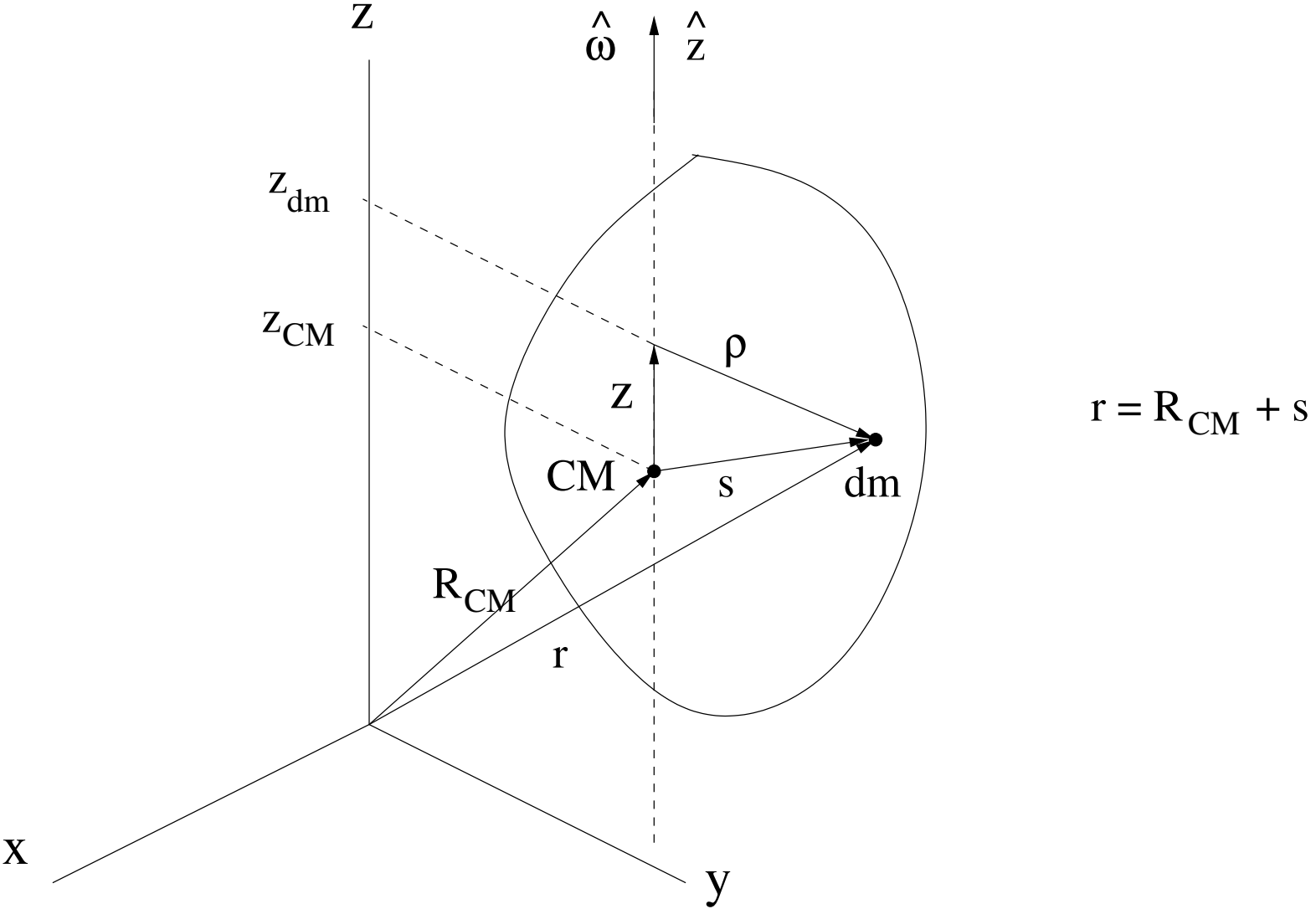
$$\frac{1}{2} \int dm V^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} M V^2}}$$

$$\frac{1}{2} \int dm u^2 = \frac{1}{2} \int dm (g\omega)^2 = \frac{1}{2} (\int dm g^2) \omega^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} I_0 \omega^2}}$$

$$\int dm \vec{V} \cdot \vec{u} = \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \int dm \vec{g} = \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \int dm (\vec{r} - \vec{R}_{\text{CM}})$$

$$= \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \underbrace{\int \vec{r} dm}_{= M \cdot \vec{R}_{\text{CM}}} - \vec{R}_{\text{CM}} \underbrace{\int dm}_{= M} \right\} = \underline{\underline{0}} \quad \text{qed!}$$





# Rotasjonsdynamikk

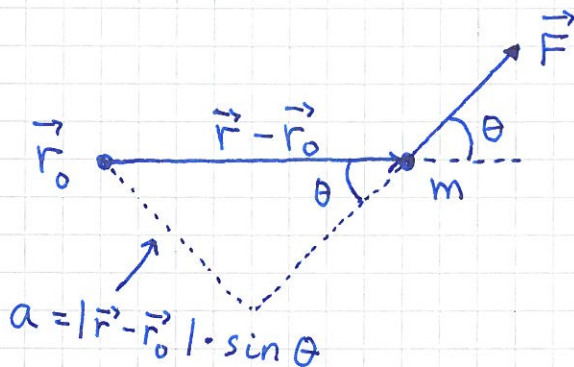
[YF 10; TM 10; LL 6 og 5; HS 5]

(47)

(nesten helt) generell beskrivelse

## Dreiemoment

[YF 10.1; TM 10.2; LL 5.5, 6.4; HS 5.1]



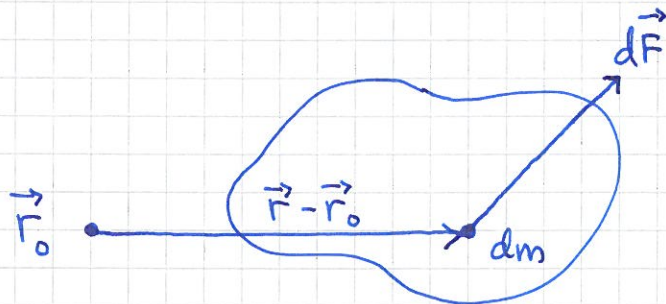
$$\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$$

=  $\vec{F}$ 's dreiemoment på m i posisjon  $\vec{r}$ , relativt (det fritt valgte) referansepunktet  $\vec{r}_0$ .

Retning:  $\vec{\tau} \perp \vec{F}$  og  $\vec{\tau} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$   
(h.h. regel  $\Rightarrow \vec{\tau}$  ut av planet i fig. over)

Absoluttverdi:  $|\vec{\tau}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\theta = a \cdot F$   
der  $a =$  "armen til  $\vec{F}$ "

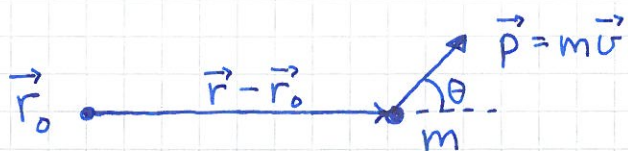
For partikkelsystem (f.eks. stivt legeme):



$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int_{\text{legemet}} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

# Dreieimpuls

[YF 10.5; TM 10.2; LL 6.6; HS 5.3] (48)



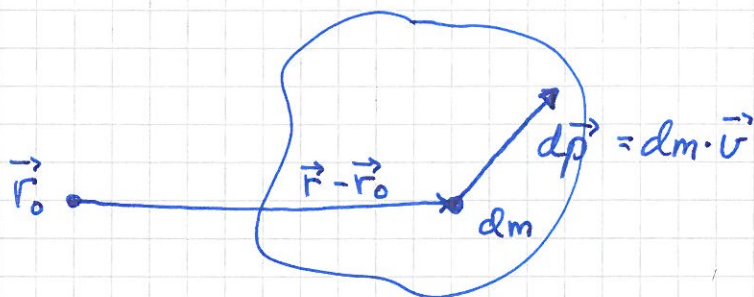
$$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p} = m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{u}$$

=  $m$ 's dreieimpuls relativt  $\vec{r}_0$

Retning:  $\vec{L} \perp \vec{p}$  og  $\vec{L} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$

Abs.verdi:  $|\vec{L}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin \theta = a \cdot p$  (se s. 47)

For partikkelsystem:



$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int_{\text{legemet}} dm (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{u}$$

N2, rotasjon [ YF 10.5; TM 10.3; LL 6.6; HS 5.2 ] (49)  
(="spinnsetsen")

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \{ m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \} = m(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_0) \times \vec{v} + m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \dot{\vec{v}}$$

Anta  $\dot{\vec{r}}_0 = 0$  (fast  $\vec{r}_0$ ) eller  $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$

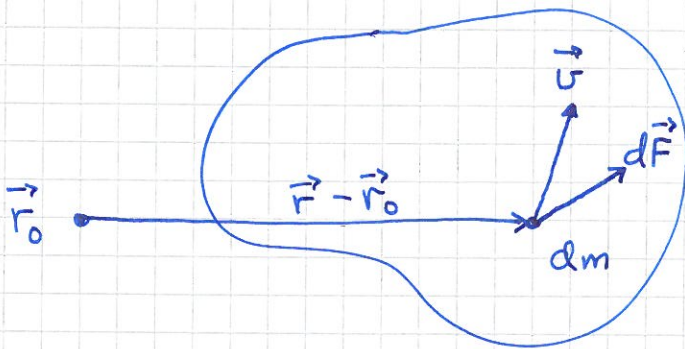
$$\text{slik at } \dot{\vec{r}}_0 \times \vec{v} = 0$$

Har (som s. 41):  $\dot{\vec{r}} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{v} = 0$

$$m \dot{\vec{v}} = m \vec{a} = \vec{F}$$

Dermed:  $\dot{\vec{L}} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$ , ders  $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$

For partikkelsystem:



$$\dot{\vec{L}} = \int d\dot{\vec{L}} = \int \frac{d}{dt} \{ dm(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \}$$

= .... som ovenfor, med  $\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{v} = 0$  fortsatt....

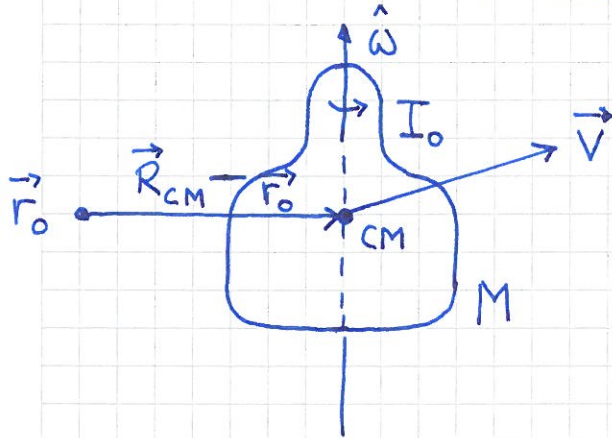
$$= \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F} = \int d\vec{\tau} = \vec{\tau}$$

med  $\vec{\tau} =$  totalt dreiemoment på systemet (relativt  $\vec{r}_0$ )

$\dot{\vec{L}} =$  total dreieimpuls for — " — ( — " — )

## Dreieimpuls for stvrt legeme [YF 10.5; TM 10.2; LL 6.6; HS 5.3] (50)

Anta at legemet har sylindersymmetri om (den instantane) rotasjonsaksen, "utpekt" med  $\hat{\omega}$ .



Fra s. 46:  $K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$

Spm: Kan  $\vec{L}$  p  samme m te skrives som en sum av to ledd, ett assosiert med massesenterets translasjonsbevegelse, og ett assosiert med legemets rotasjonsbevegelse om en akse gjennom CM?

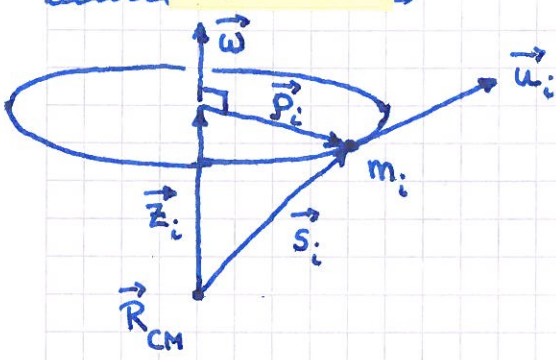
Svar: Ja! Med antagelsen om sylindersymmetri om  $\hat{\omega}$  kan det vises at legemets totale dreieimpuls kan skrives slik:

$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

Banedreieimpuls, relativt  $\vec{r}_0$ :  $\vec{L}_b = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V}$

Indre dreieimpuls ("spinn"; uavh. av  $\vec{r}_0$ ):  $\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$

[For bevis, som starter fra definisjonen  $\vec{L} = \int dm (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}$ , se s. 50 A og 50 B. Litt "kronglete", men ikke s rlig vanskeligere enn bevisene s. 45 og 46.]



$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_i \quad \leftarrow \text{relativkoordinat.}$$

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{u}_i \quad \leftarrow \text{relativhastighet}$$

$$(\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{s}}_i)$$

Fra figur:  $\vec{s}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM}$

Fra for:  $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i = \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM})$  (siden  $\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM} = 0$ )

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{v}_i$$

$$= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0 + \vec{s}_i) \times (\vec{V} + \vec{u}_i)$$

$$= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V}$$

$$+ \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i$$

1. sum:

$$\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = M (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = \vec{L}_{CM}$$

= bandedreieimpulsen relativt  $\vec{r}_0$  pga CM's bevægelse (jfr.  $\vec{L}$  for punktmasse)

2. sum:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = (M\vec{R}_{CM} - M\vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = 0$$

3. sum:

$$\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i = \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$$

$$= (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{s}_i}_{=0}) = 0$$

4. sum:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \vec{L}_{rel.} = \text{dreieimpuls pga masselementenes bevægelse relativt CM}$$

Dermed:

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i$$

som gjelder for vilkårlig partikkelsystem (ikke nødvis stivt legeme);  
alternativt  $\int_M dm (\vec{s} \times \vec{u})$  for  $\vec{L}_{rel}$  hvis kontinuerlig massefordeling.

Hvis stivt legeme:  $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$$

Identitet:  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

(kjedelig, men ikke vanskelig å bevisе!)

Dermed:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i) = \sum_i m_i \{ \vec{\omega} s_i^2 - \vec{s}_i (\vec{s}_i \cdot \vec{\omega}) \}$$

$$= \sum_i m_i \{ \vec{\omega} (z_i^2 + \rho_i^2) - (\vec{z}_i + \vec{\rho}_i) z_i \omega \}$$

$$= \sum_i m_i \{ \vec{\omega} (z_i^2 + \rho_i^2) - z_i^2 \vec{\omega} - z_i \omega \vec{\rho}_i \}$$

$$= \sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$$

$$= I_0 \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$$

Hvis syndrersymmetri om  $\hat{\omega}$ , dvs om  $\hat{z}$ :

$$\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i = \sum_i m_i z_i (x_i \hat{x} + y_i \hat{y}) = 0$$

fordi bidragene fra like store masselementer i  $(x_i, y_i, z_i)$   
og  $(-x_i, -y_i, z_i)$  kansellerer.

Dette er ofte tilfelle, men ikke alltid.

Men hvis syndrersymmetri om  $\hat{\omega}$ :  $\vec{L}_{rel} = I_0 \vec{\omega}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega} \quad \underline{\text{qed}}$$

## Bevaringslover

For isolert system (dvs: system som ikke påvirkes av ytre krefter) er energi, impuls og dreieimpuls bevarte størrelser.

$$W = 0 \quad (\text{dvs } P = \frac{dW}{dt} = 0) \Rightarrow E = \text{konst.}$$

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$$

$$\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konst.}$$

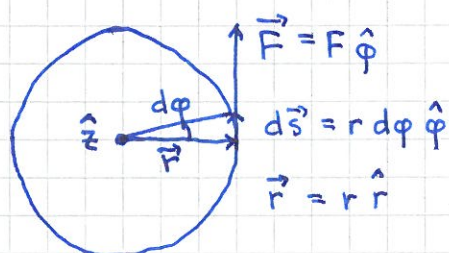
## Mekanisk likevekt (Statikk) [YF 11.1-11.3; TM 12.1-12.3; LL 7.1; HS 4.6]

Et stivt legeme er i ro,

$$\vec{p} = 0 \quad \text{og} \quad \vec{L} = 0$$

$$\text{bare dersom } \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \text{og} \quad \sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

## Arbeid utført ved rotasjon [YF 10.4; TM 9.5; LL 6.4; HS 4.4.1]

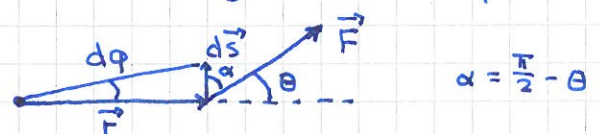


$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot r d\phi$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau d\phi} \Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = \tau \cdot \omega$$

Enn om  $\vec{F}$  og  $d\vec{s}$  ikke er parallele?



$$dW = F \cdot ds \cdot \cos \alpha = F \cdot r d\phi \cdot \sin \theta$$

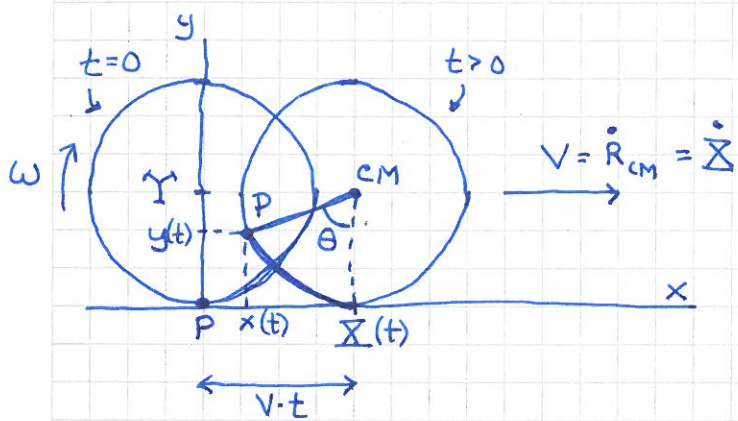
$$\tau = |\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \cdot \sin \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau d\phi}$$



Rulling [YF 10.3 ; TM 9.6 ; LL 6.7 ; HS 4.5.3 og 5.4.3]

Ren rulling:



Sammenhenger:

$\theta = \omega t$  (hvis  $\omega = \text{konst.}$ )

$\vec{X} = Vt = R\theta (= R\omega t)$

$V = \dot{\vec{X}} = R\omega$  (hvis  $\omega = \text{konst.}$ )

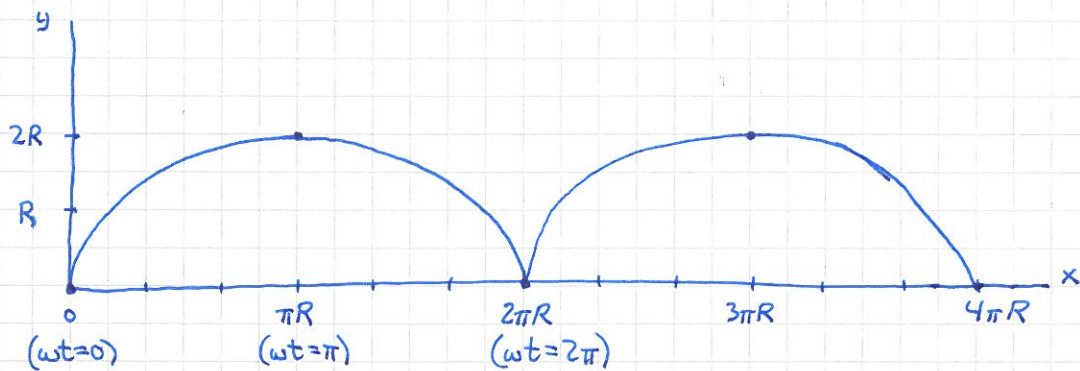
$A = \ddot{\vec{X}} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\alpha$

rullebetingelser

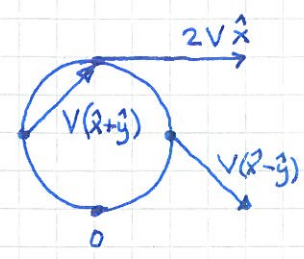
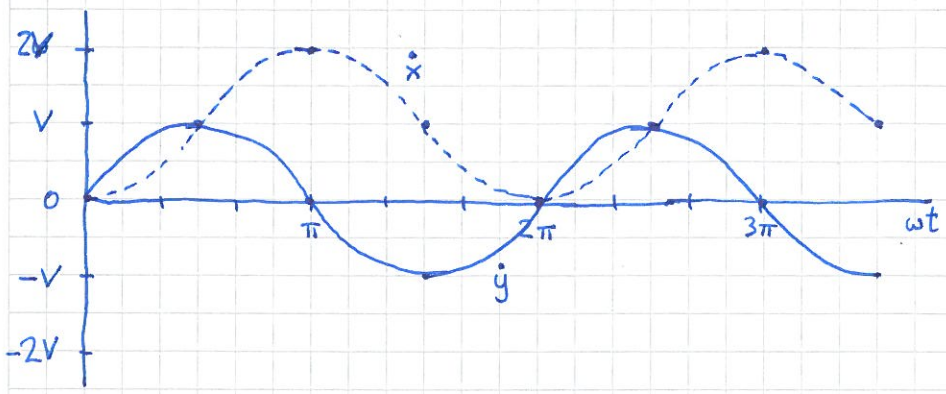
Ser fra fig. at banen til P (= punkt på periferien) blir en sykloide:

$x(t) = \vec{X}(t) - R \sin \theta = Vt - R \sin \omega t$ ;  $y(t) = R - R \cos \theta = R - R \cos \omega t$

[der vi nå antar  $\omega = \text{konst.}$ ]



P's hastighet:  $\dot{x} = V - \omega R \cos \omega t = V(1 - \cos \omega t)$   
 $\dot{y} = \omega R \sin \omega t = V \sin \omega t$  }  $\Rightarrow \vec{v}(\theta) = \hat{x} V(1 - \cos \theta) + \hat{y} V \sin \theta$



$\Rightarrow$  Ingen relativ bevegelse i kontaktpunktet ved ren rulling.

Kin. energi ved ren rulling:

$$K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \quad (s. 46)$$

$$I_0 = c \cdot MR^2 \quad (\text{med } c=1 \text{ for ring, } \frac{2}{5} \text{ for massiv kule osv})$$

$$\omega = V/R \quad (\text{rullebetingelse})$$

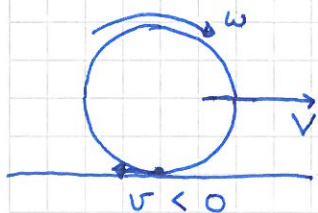
$$\Rightarrow K = (1+c) \cdot \frac{1}{2} MV^2$$

Sluring

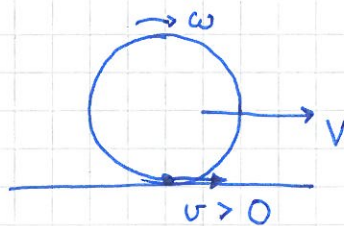
$\omega \neq V/R \Rightarrow$  kontaktpunktet får hastighet  $v = V - \omega R \neq 0$   
relativt underlaget

$\Rightarrow$  legemet roterer og glir samtidig

Hvis  $\omega > V/R$ :



Hvis  $\omega < V/R$ :

Friksjonens rolle

Hvis sluring: Friksjonskraft  $f = \mu_k N$  rettet mot  $\vec{v}$ .

$$\text{Effekttap: } P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$$

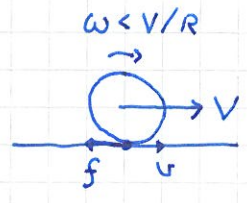
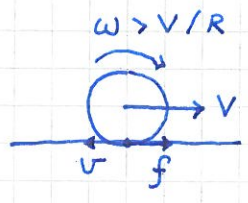
( $\Rightarrow$  redusert mekanisk energi)

$$\text{Hvis ren rulling: } P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$$

Null effekttap

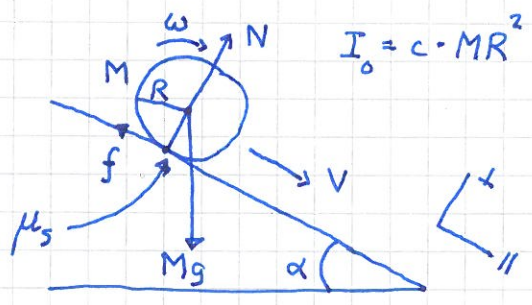
$$\text{Statisk friksjon: } f \leq \mu_s \cdot N$$

Sluring:



Ren rulling: Retningen på den statiske friksjonskraften bestemmes ved å besvare spørsmålet "Hva ville kontaktpunktets relativhastighet  $\vec{v}$  ha vært hvis det ikke var friksjon?"

Eks: Rulling på skrånplan



- $\dot{V} = ?$
  - $\mu_s^{min} = ?$
- } for ren rulling

- ren rulling  $\Rightarrow \omega = v/R$ , med klokka
- $V$  og  $\omega$  øker  $\Rightarrow$  dreiemoment  $\tau$  om CM i fråd med dette  $\Rightarrow$  friksjonskraft  $f$  oppover

N2:  $\sum F_{||} = M\dot{V}$ ,  $\sum \tau = I_o \dot{\omega}$ ,  $\sum F_{\perp} = 0$

$\downarrow$   $Mg \sin \alpha - f = M\dot{V}$        $\downarrow$   $f \cdot R = I_o \dot{\omega}$        $\downarrow$   $N = Mg \cos \alpha$

$\downarrow$   $f = (cMR^2 \cdot \frac{\dot{V}}{R}) / R = cM\dot{V}$

$\downarrow$   $Mg \sin \alpha - cM\dot{V} = M\dot{V}$

$\downarrow$   $\dot{V} = g \frac{\sin \alpha}{1+c}$

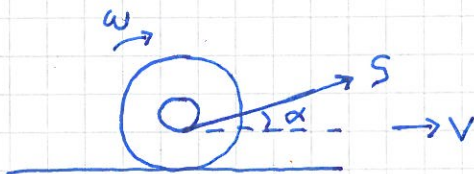
$$f \leq f_{\max} = \mu_s \cdot N$$

$$\Rightarrow c M g \frac{\sin \alpha}{1+c} \leq \mu_s M g \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu_s^{\min} = \frac{c}{1+c} \tan \alpha}} \quad (\text{for } \dot{a} \text{ ha ren rulling})$$

	c	$\dot{v}$	$\mu_s^{\min}$
Ring og hul sylinder	1	$\frac{1}{2} g \sin \alpha$	$\frac{1}{2} \tan \alpha$
Skive og kompakt sylinder	1/2	$\frac{2}{3} g \sin \alpha$	$\frac{1}{3} \tan \alpha$
Kompakt ball	2/5	$\frac{5}{7} g \sin \alpha$	$\frac{2}{7} \tan \alpha$

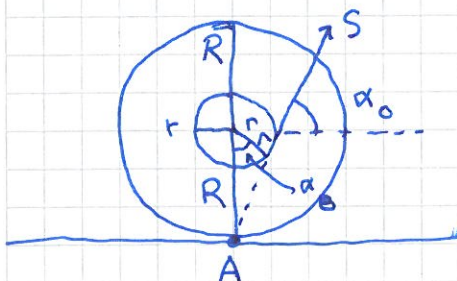
Eks: Snelle



liten  $\alpha \Rightarrow$  ruller mot høyre



stor  $\alpha \Rightarrow$  mot venstre



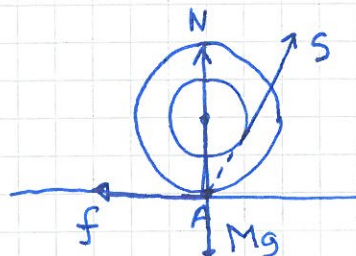
snelle i ro

når  $\alpha = \alpha_0$  gitt ved

$$\underline{\underline{\cos \alpha_0 = r/R}} \quad (\text{ses fra figur!})$$

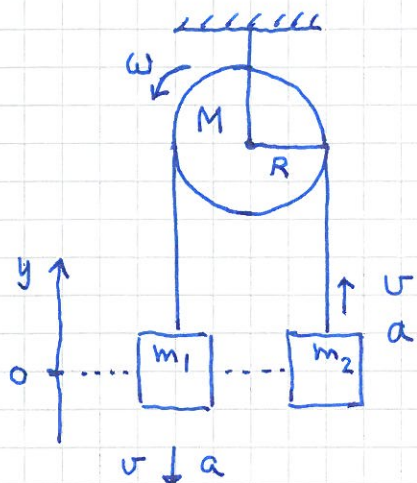
Da går alle krefter gjennom kontaktpunktet A ( $f, N, mg$  og  $S$ )

$$\Rightarrow \sum \tau_A = 0$$



Løses på øving med N2 trans. + rot. (evt kun N2 rot.)

Løses her med energibevarelse



- $m_1 > m_2$
- snora glir ikke på skiva  $\Rightarrow \omega R = v$
- $I_0 = \frac{1}{2}MR^2 =$  skivas tregh.mom.
- Anta  $U(y=0) = 0$ ; lodd i ro ved start
- Bestem loddenes akselerasjon  $a$

Løsning:

Total energi,  $E = U_i + K_i = 0$  ("initial")

$E$  er bevart

$\Rightarrow U_f + K_f = 0$  ("final")

$$\Rightarrow m_2 gy - m_1 gy + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = 0$$

(der  $y > 0$  er posisjon til  $m_2$ )

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MR^2 \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{4} Mv^2$$

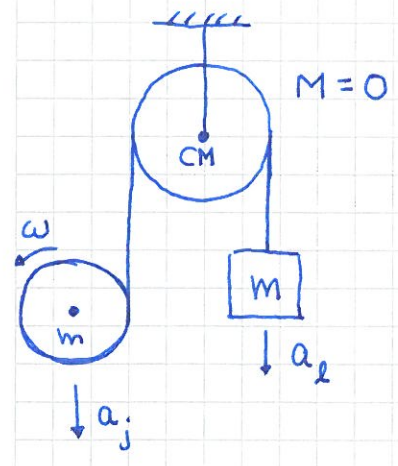
$$\Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = y \cdot \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + M/2}$$

Tar  $\frac{d}{dt}$  på begge sider:

$$\frac{1}{2} \cdot 2v \cdot \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{=a} = \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=v} \cdot \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + M/2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = g \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}}}$$

Eks: Atwood med ideell tråse og lodd + jojo,  $m_1 = m_2 = m$ .



Er  $a_j = a_e$  ?

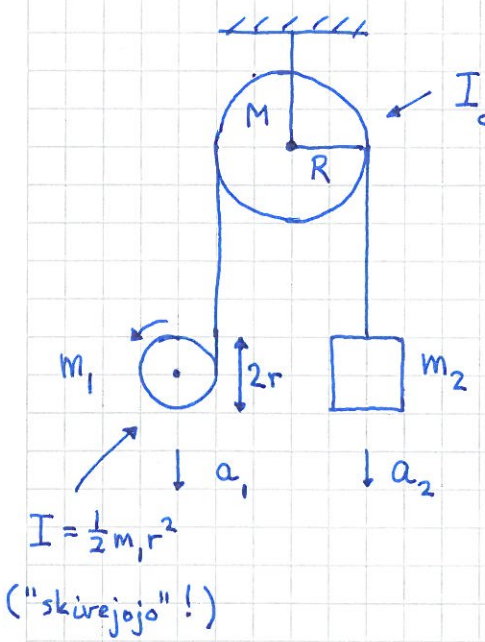
Ja:

Må ha likt snordrag på begge sider. Ellers ville trinsa ha vært utsatt for et netto dreiemoment mhp CM. Men med  $M=0$  ville trinsa da ha fått uendelig vinkelakselerasjon, umulig!

Med likt snordrag og like tyngde på begge sider blir akselerasjonen den samme:

$$m \cdot a_j = mg - S ; \quad m \cdot a_e = mg - S \quad \Rightarrow \quad a_j = a_e = g - S/m$$

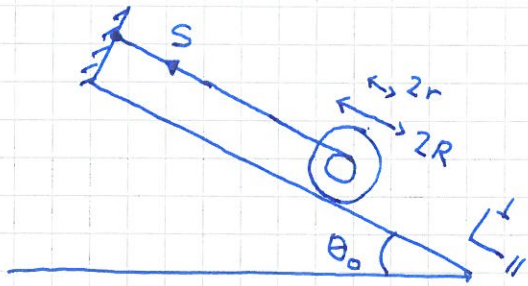
Utfordring: Atwood med lodd + jojo (generelt)



Bestem  $a_1$  og  $a_2$  !

("skurejojo" !)

Eks: Sluresnelle (demo + øving)



$\theta_0 = \text{max vinkel for snella glir (slurer) nedover skråplanet}$

Bestem  $\theta_0$ . Hvis er snordraget  $S$  da?

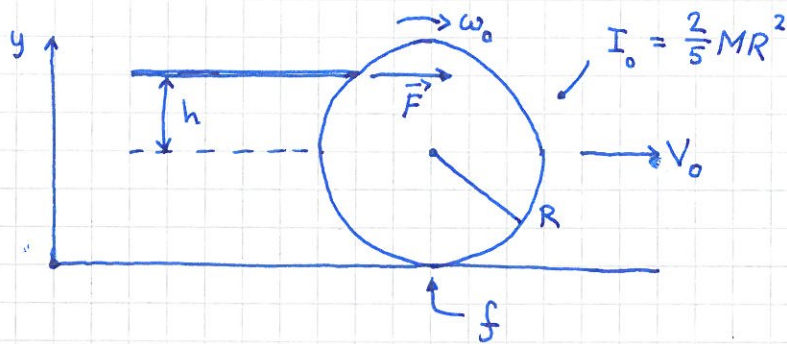
Tips: Bruk  $\sum F_{\parallel} = 0$  samt  $\sum \tau = 0$  (med snellas CM som ref.punkt)

Ved  $\theta = \theta_0$  er  $f = f_{\text{max}} = \mu_s \cdot N$

Ekstraoppg: Bestem snellas akselerasjon når  $\theta > \theta_0$ .

Tips:  $\sum F_{\parallel} = M \cdot a$ ,  $\sum \tau = I \dot{\omega}$ ,  $v = \omega r$  (siden det vikles av snorlengde  $2\pi r$  på tiden  $T = 2\pi/\omega$ , dvs  $v = 2\pi r/T = \omega r$ )

Eks: Snooker (øving)



Kortvarig stat,  $\Delta t \approx 0$ :

$$F \cdot \Delta t = \Delta p = M V_0$$

$$\tau \cdot \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0$$

$$\tau = F \cdot h$$

$$F \gg f$$

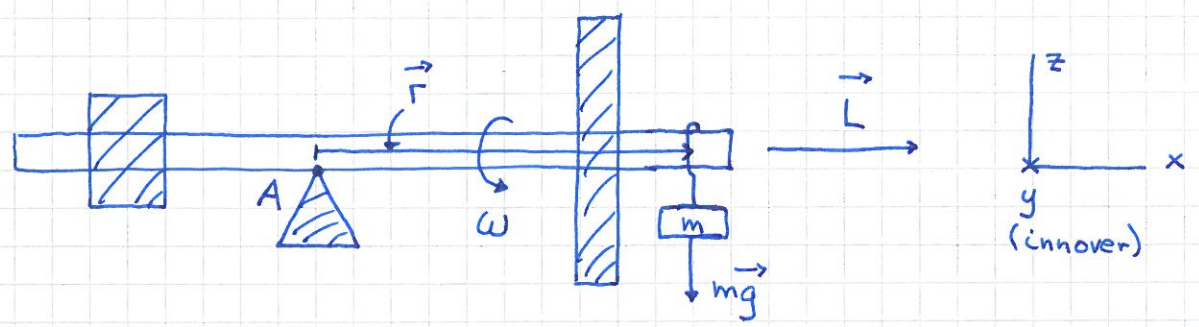
Hvis  $h > h_0$ : (sluring)

Hvis  $h = h_0$ : (ren rulling) ( $h_0 = ?$ )

Hvis  $h < h_0$ : (sluring)

# Presesjon

Gyroskop (kvalitativt):



Uten lodd: Dynamisk likevekt med roterende skive  
 $\vec{\omega} = \omega \hat{x}$ ,  $\vec{L}_A = L_A \hat{x}$ ,  $L_A = I_{skive} \cdot \omega$

Med lodd: Dreiemoment relativt A:

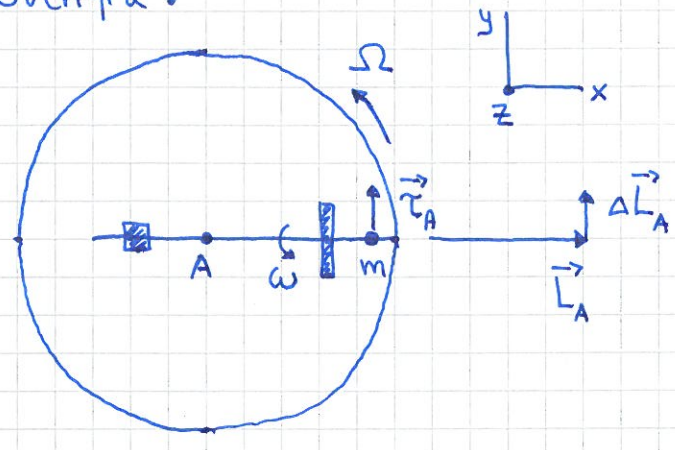
$$\vec{\tau}_A = \vec{r} \times m\vec{g} = r mg \hat{y}$$

$$N_{2,rot}: \vec{\tau}_A = \Delta \vec{L}_A / \Delta t$$

$\Rightarrow \Delta \vec{L}_A$  peker i retning  $\hat{y}$

$\Rightarrow$  rotasjon mot klokka om z-aksen,  
presesjon, med vinkelhastighet  $\Omega \ll \omega$

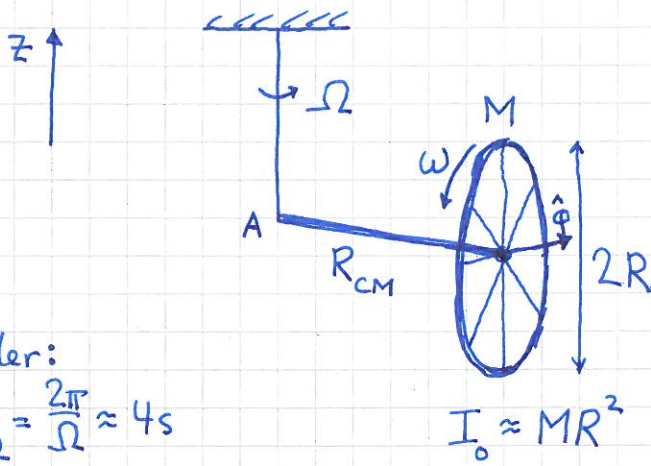
Ovenfra:



- større  $m\vec{g}$   $\Rightarrow$  raskere presesjon (større  $\Omega$ )
- større  $\vec{r}$  (lenger arm)  $\Rightarrow$  større  $\Omega$
- vipping opp og ned, "nutasjon"



# Sykkelhjul (halvkvantitativt):



Estimerer:

$$M \approx 5 \text{ kg}$$

$$R \approx \frac{3}{10} \text{ m}$$

$$R_{CM} \approx \frac{2}{10} \text{ m}$$

$$T_\omega = 2\pi/\omega \approx \frac{1}{3} \text{ s}$$

Finn estimat for  $T_\Omega$ !

Måler:

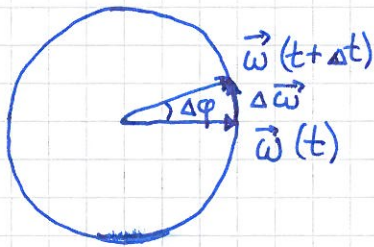
$$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 4 \text{ s}$$

$$I_0 \approx MR^2$$

Løsning: 
$$\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

$$\vec{L}_b = R_{CM} \cdot MV \hat{z} \approx \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_A \approx I_0 \dot{\vec{\omega}} = \vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} Mg \hat{\phi}$$



$$\Delta \vec{\omega} = \omega \cdot \Delta \phi \cdot \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \hat{\phi} = \omega \Omega \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow R_{CM} Mg = I_0 \omega \Omega = MR^2 \omega \Omega$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Omega = \frac{R_{CM} g}{R^2 \omega}}}$$

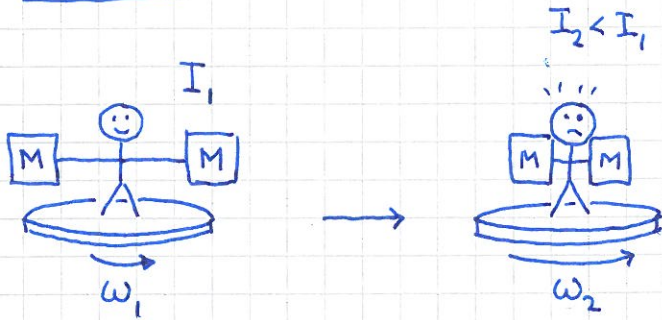
Dermed:

$$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi R^2 \omega}{R_{CM} g} = \frac{(2\pi R)^2 / T_\omega}{R_{CM} g} \approx \frac{(6\pi/10)^2 \text{ m}^2 / (\frac{1}{3} \text{ s})}{\frac{2}{10} \text{ m} \cdot 10 \text{ m/s}^2}$$

$$= \frac{27\pi^2}{50} \text{ s} \approx \underline{5 \text{ s}}, \text{ ikke verst !!}$$

To raske demonstrasjoner av dreieimpulsbevarelse helt til slutt:

Piruettt



$$\tau_{\text{ytre}} = 0 \Rightarrow L = \text{konst.}$$

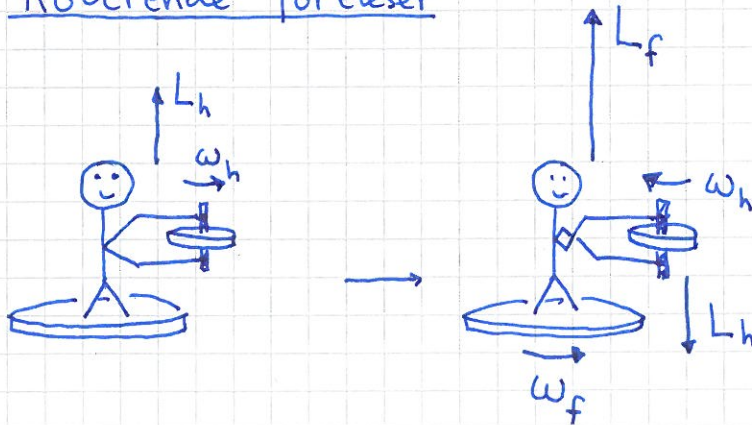
$$\Rightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 > \omega_1$$

$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \cdot \frac{I_1}{I_2} = K_1 \cdot \frac{I_1}{I_2} > K_1 !$$

Henter energi fra armmuskulene når bøkene trekkes inn, gir økt mekanisk energi. ]

Roterende foreleser



h: hjul  
f: foreleser

$$\Delta \vec{L} = 0 \Rightarrow L_f \approx 2 L_h$$

---

Slutten på del I av kurset.

# ELEKTRISITET OG MAGNETISME

(62)

Hovedinndeling:

YF		TM	LHL
21-24	I. Elektrostatikk. Ledere og isolatorer.	21-24	19-20
25-26	II. Elektrisk strøm. Likestrømkretser.	25	21-22
27-28	III. Magnetostatikk. Magnetisme.	26-27	23, 26
29-31	IV. Elektromagnetisk induksjon. Vekselstrømkretser.	28-29	24, 25, 27

Motivasjon / Plan:

Følge en sammenhengende vei fra Coulombs lov til virkemåten til kretselementene motstand ( $R$ ), kondensator ( $C$ ) og spole ( $L$ ).

## I. Elektrostatikk [TM 21-24; LHL 19-20] [YF 21-24]

### Elektrisk ladning [TM 21.1; LHL 19.1] [YF 21.1]

Materie = Atomer = Atomkjerne + Elektroner

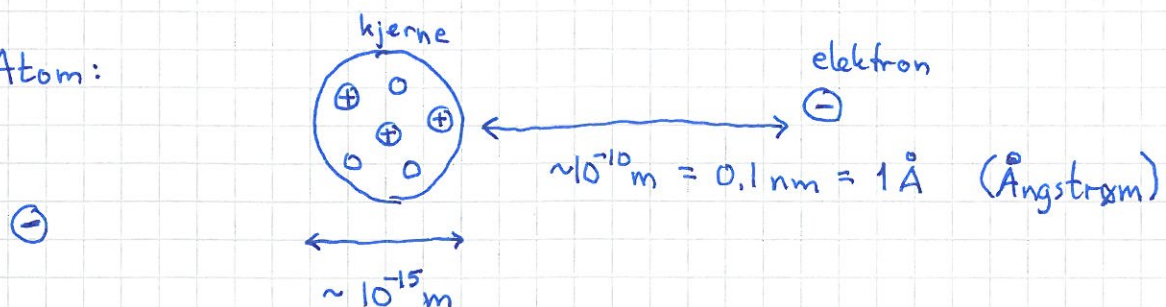
Atomkjerne = Protoner + Nøytroner

Proton, Nøytron = Kjernepartikler (←)

(1 kjernepartikkel = 3 kvarker)

Elementærpartikler

Atom:



⊖

Elementærpartiklene har kvantisert ladning og masse: (63)

$$\oplus \text{ proton} \quad q_p = +e \quad m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$0 \text{ nøytron} \quad q_n = 0 \quad m_n \approx \text{---''---}$$

$$\ominus \text{ elektron} \quad q_e = -e \quad m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

[Kvarker:  $q_k = \pm \frac{e}{3}, \pm \frac{2e}{3}$ ] Her er  $e = \text{elementærladningen}$ .

Ekspérimentelt ble kvantisert ladning først påvist av R. Millikan, i hans berømte oljedråpeforsøk. [Nobelpris 1923]

Nøytrale atomer (og molekyler):

$$Z \text{ protoner og } Z \text{ elektroner} \Rightarrow Q = Z \cdot (+e) + Z \cdot (-e) = \underline{0}$$

Ioner: Atomer/molekyler med overskudd eller underskudd på elektroner.

Eks:  $O^{2-}$  = oksygenatom med 2 ekstra elektroner,  $Q = -2e$

$O_2^-$  =  $O_2$ -molekyl med 1 ---''---,  $Q = -e$

Ladningsbevarelse:

Ekspérimentell erfaring: Netto ladning i lukket system er konstant.

Eks: Radioaktivitet ( $\beta$ -decay)

nøytron  $\longrightarrow$  proton + elektron + antineutrino

$$Q: \quad \underline{0} \quad \longrightarrow \quad +e + (-e) + 0 = \underline{0}$$

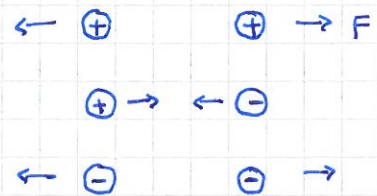
# Påvisning av ladning:

Ballongforsøk viser både tiltrekning og frastøtning:



Slutninger:

- To typer ladning: positiv og negativ
- Samme type  $\Rightarrow$  Frastøtning
- Ulik type  $\Rightarrow$  Tiltrekning



## Coulombs lov [TM 21.3; LHL 19,3] [YF 21.3]

Ekspenimenter av Coulomb med ladde kuler (ca 1785):



Observasjoner: [~ betyr her "proporsjonal med"]

- $F_{12} \sim q_1 \cdot q_2$
  - $F_{12} \sim 1/r_{12}^2$
  - $\vec{F}_{12} \sim \hat{r}_{12}$
- } absoluttverdien
- } retningen

Dvs:

$$\vec{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Coulombs lov

Samme form som Newtons gravitasjonslov:

(65)

$m_1 \odot \leftarrow \odot m_2$        $\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$  (se s. 10)

N3 gjelder også for Coulomb-krefter:

$\vec{F}_{21} \leftarrow \odot q_1$        $\odot q_2 \rightarrow \vec{F}_{12}$        $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

Enhet for ladning [TM 21.1; LHL 19.1] [YF 21.3]

$[q] = C$  (coulomb)

Med utgangspunkt i grunnenheten A (ampere) for strømstyrke:

$1 C = 1 A \cdot s$  = mengden ladning som passerer et tverrsnitt av en leder pr sekund når strømstyrken i lederen er 1 A

Med utgangspunkt i egenskaper til vakuum (tomt rom):

$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , der  $\epsilon_0 = 8.854 \dots \cdot 10^{-12}$  er den såkalte permittiviteten til vakuum. [Mer om dette senere!]

Da blir  $K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.98755 \dots \cdot 10^9 \approx 9 \cdot 10^9$ , og

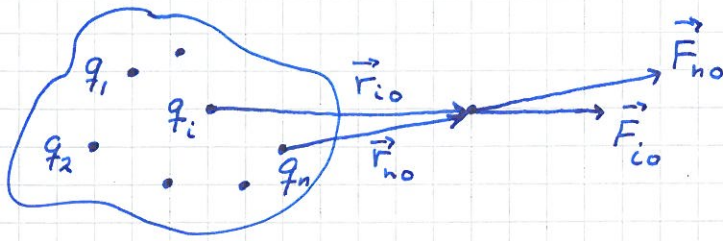
$1 C$  = ladningen til hver av to like ladninger som i innbyrdes avstand på 1 m frastøter hverandre med en kraft  $8.98755 \dots \cdot 10^9$  N.

Elementarladningen har verdien:  $e = 1.602 \dots \cdot 10^{-19}$  C

Enheten til permittivitet:  $[\epsilon_0] = [q^2 / r^2 \cdot F] = C^2 / m^2 \cdot N$

$[K_e] = [1/\epsilon_0] = N \cdot m^2 / C^2$

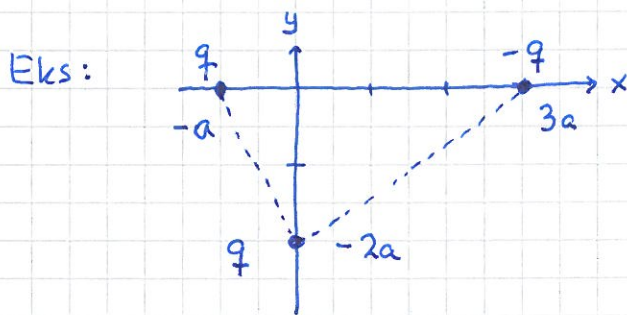
# Elektrisk kraft fra flere ladninger [TM 21.3; LHL 19.3] [YF 21.3] (66)



Superposisjonsprinsippet ("SPP"): Kraftene adderes (vektorielt) for å finne total kraft.

⇒ Total kraft på  $q_0$  fra  $\{q_1, \dots, q_n\}$ :

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + \dots + \vec{F}_{n0} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i \cdot q_0}{r_{i0}^2} \hat{r}_{i0}$$



Finn kraften  $\vec{F}$  på  $q$  som er i  $(0, -2a)$  fra de to andre.

Løsning:

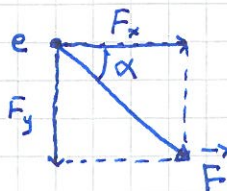
$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q^2}{5a^2} \cdot \frac{a\hat{x} - 2a\hat{y}}{\sqrt{5}a} + \frac{q \cdot (-q)}{13a^2} \cdot \frac{(-3a\hat{x} - 2a\hat{y})}{\sqrt{13}a} \right\} \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left\{ \left( \frac{1}{5\sqrt{5}} + \frac{3}{13\sqrt{13}} \right) \hat{x} - \left( \frac{2}{5\sqrt{5}} - \frac{2}{13\sqrt{13}} \right) \hat{y} \right\} \end{aligned}$$

Anta f.eks. at  $q=e$  og  $a=1\text{\AA} = 10^{-10}\text{m}$ :

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1.6^2 \cdot 10^{-38}}{10^{-20}} = 23 \cdot 10^{-9}\text{N}; \quad \vec{F} = (3.53\hat{x} - 3.13\hat{y})\text{nN}$$

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{3.53^2 + 3.13^2}\text{nN} = \underline{4.72\text{nN}}$$

Retning:

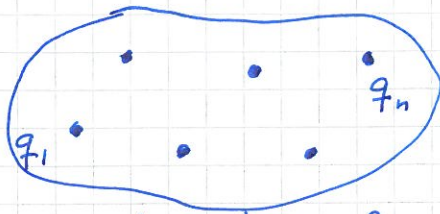


$$\alpha = \arctan \frac{F_y}{F_x} = \arctan \frac{3.13}{3.53} \approx \underline{41.6^\circ}$$

# Elektrisk felt

[TM 21.4; LHL 19.4] [YF 21.4]

(67)



område A med  
"referanseladninger"



punkt B med  
"testladning"  $q_0$

$\vec{F}$  = kraft på  $q_0$  fra  $\{q_1, \dots, q_n\}$

Da er det elektriske feltet  $\vec{E}$  i punkt B fra  
ref. l.  $\{q_1, \dots, q_n\}$  i område A:

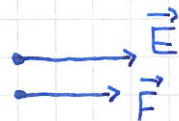
$\vec{E} \stackrel{\text{def.}}{=} \text{kraft } \vec{F} \text{ pr ladningsenhed}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{F} / q_0}$$

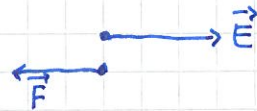
Enhet:  $[E] = \text{N/C}$

Retning på  $\vec{F}$  og  $\vec{E}$ :

$q_0 > 0 \Rightarrow \vec{F}$  samme retn. som  $\vec{E}$



$q_0 < 0 \Rightarrow \vec{F}$  modsatt retn. av  $\vec{E}$





# $\vec{E}$ fra punktladning

[TM 21.4; LHL 19.5] [YF21.4] (68)

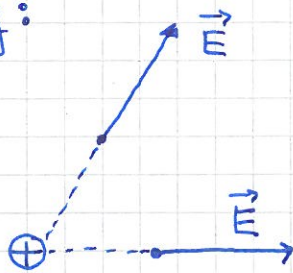


Elektrisk felt fra  $q$  i avstand  $\vec{r}$ :

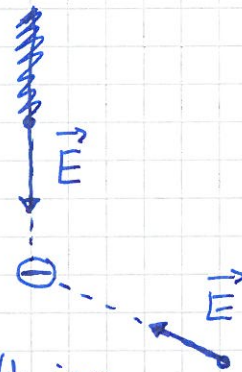
$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

(Uavhengig av  $q_0$ !)

Retning:

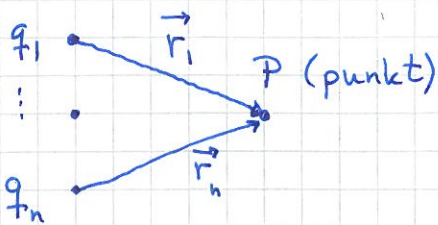


radielt ut fra positiv ladning



radielt inn mot negativ ladning

$\vec{E}$  fra flere punktladninger:



Med testladn.  $q_0$  i  $P$ :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_0}{r_i^2} \hat{r}_i$$

= kraft på  $q_0$  fra  $\{q_1, \dots, q_n\}$

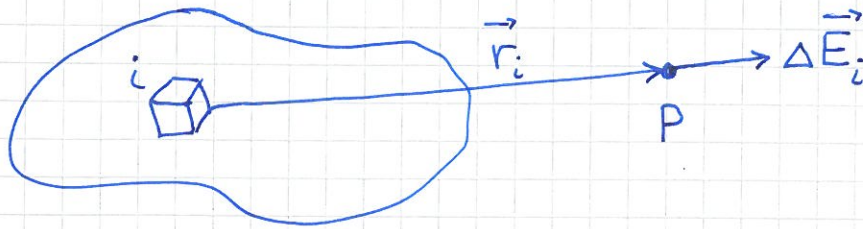
$\Rightarrow$  El. felt fra  $\{q_1, \dots, q_n\}$  i  $P$ :

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

Dvs:  $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ ; når SPP gjelder for  $\vec{F}$ , gjelder det også for  $\vec{E}$ .

## $\vec{E}$ fra kontinuerlig ladningsfordeling [TM 22.1; LHL 19.5] (69)

[YF 21.5]



Deler inn i små volum  $\Delta V_i$  (evt. areal  $\Delta A_i$ , evt. lengder  $\Delta l_i$ ) med liten ladning  $\Delta q_i$  ( $\approx$  punktladning), som gir bidrag

$$\Delta \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

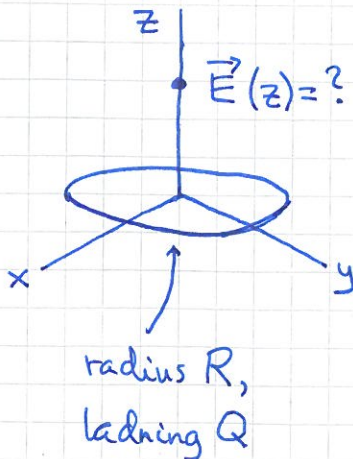
til totalt felt i  $P$ .

$\Rightarrow$  Totalt felt i  $P$ :

$$\vec{E} = \sum_i \Delta \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \xrightarrow{\Delta q_i \rightarrow dq} \int \frac{dq \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

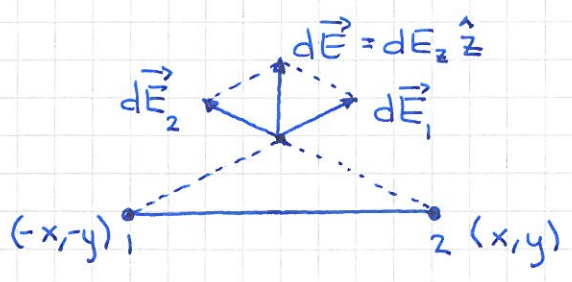
[Samme "oppskrift" som med kont. massefordeling, ved beregning av  $\vec{R}_{cm}$  (s.36) og  $I$  (s.39).]

Eks:  $\vec{E}$  på akse til jevnt ladet ring

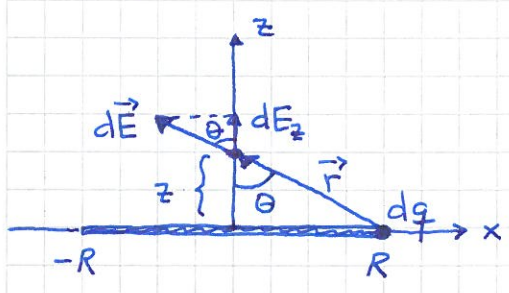


Løsning:

Symmetri  $\Rightarrow \vec{E}(z) = E_z \hat{z}$  ( $E_x = E_y = 0$ )



Bidrag til  $E_z$  fra liten bit med ladning  $dq$ :



$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = dE \cdot \hat{r}$

$dE_z = dE \cdot \cos\theta = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{z}{r}$

$r = \sqrt{z^2 + R^2}$

$\Rightarrow E_z = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int dq = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$

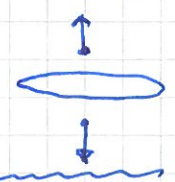
Sjekker svaret:

$[E_z] = [Qz/\epsilon_0 z^3] = [Q/\epsilon_0 z^2]$  (enhet OK)

$E_z(0) = 0$ ; OK (symmetri)

$z \gg R \Rightarrow E_z \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$ ; OK (ser punktladning Q i origo)

$z \rightarrow -z \Rightarrow E_z \rightarrow -E_z$ ; OK

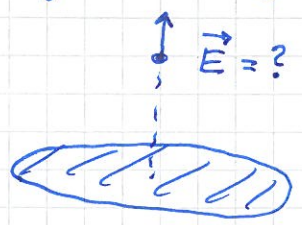


Øring 8: Tynn stav, jevnt ladet.



$\downarrow \vec{E} = ?$

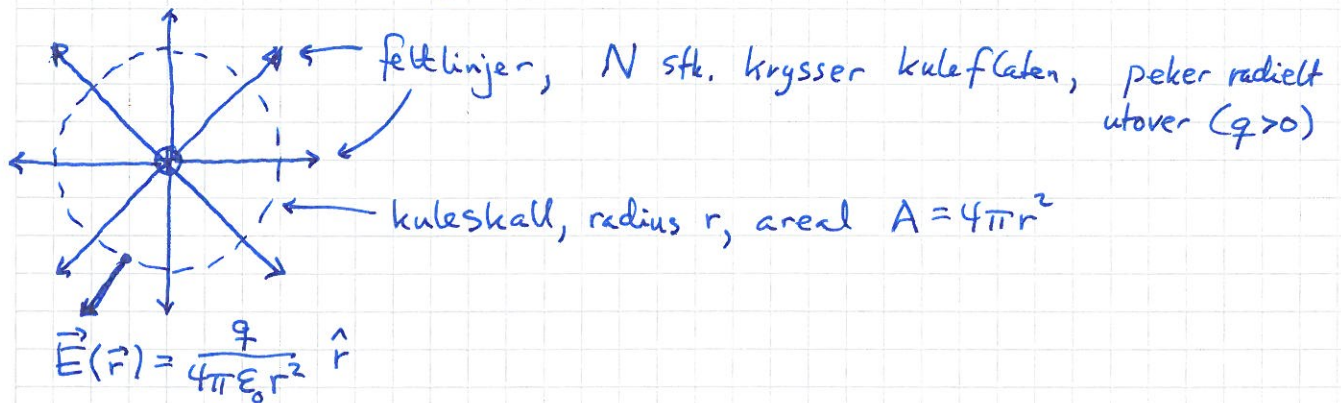
Tynn skive, jevnt ladet.



# Feltlinjer for $\vec{E}$ [TM 21.5; LHL 19.6] [YF 21.6] (71)

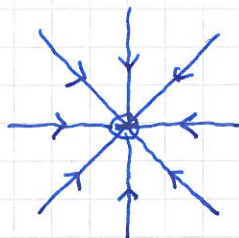
- gir et "bilde" av  $\vec{E}$  i et område
- $\vec{E} \parallel$  feltlinjene
- feltstyrken  $E = |\vec{E}|$  prop. med feltlinjetettheten (dvs antall feltlinjer som krysser en flate, pr flateenhet)

Eks: Punktladning  $q$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Feltlinjetetthet på kuleskallet: } \frac{N}{A} = \frac{N}{4\pi r^2} \sim \frac{1}{r^2} \\ \text{Feltstyrke } \text{---"---} = E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sim \frac{1}{r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{E \sim \frac{N}{A}}; \text{ OK!}$$

Negativ ladning:



radielt innover

Med andre ord:

Feltlinjer starter på  $\oplus$ , (evt.  $\infty$  langt borte)  
og ender på  $\ominus$ . (---"---)

# Elektrisk dipol. Dipolmoment [TM 21.4; LHL 19.10] (72)

[YF 21.7]

Veldig viktig:

De fleste molekyler er dipoler. ( $H_2O$  etc.)

Alle molekyler (og atomer) blir dipoler i ytre  $\vec{E}$ -felt,

$\Rightarrow$  relevant for å forstå materialers elektriske egenskaper.

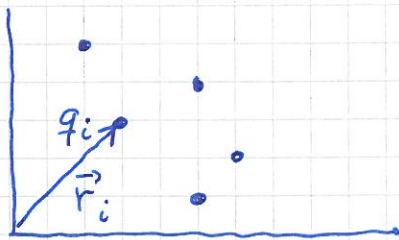
Enkleste dipol:

To punktladninger,  $q$  og  $-q$ , i innbyrdes avstand  $d$ :



Dipolmoment:  $\vec{p} = q\vec{d}$  (Netto ladd:  $Q = q - q = 0$ )

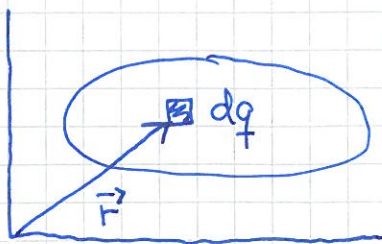
Hvis flere punktladninger:



$$\vec{p} = \sum_i \vec{r}_i q_i \quad (Q = \sum_i q_i = 0)$$

$$[\text{Jf CM i MekFys: } \vec{R}_{cm} = \sum_i \vec{r}_i m_i / M]$$

Hvis kontinuerlig ladningsfordeling:

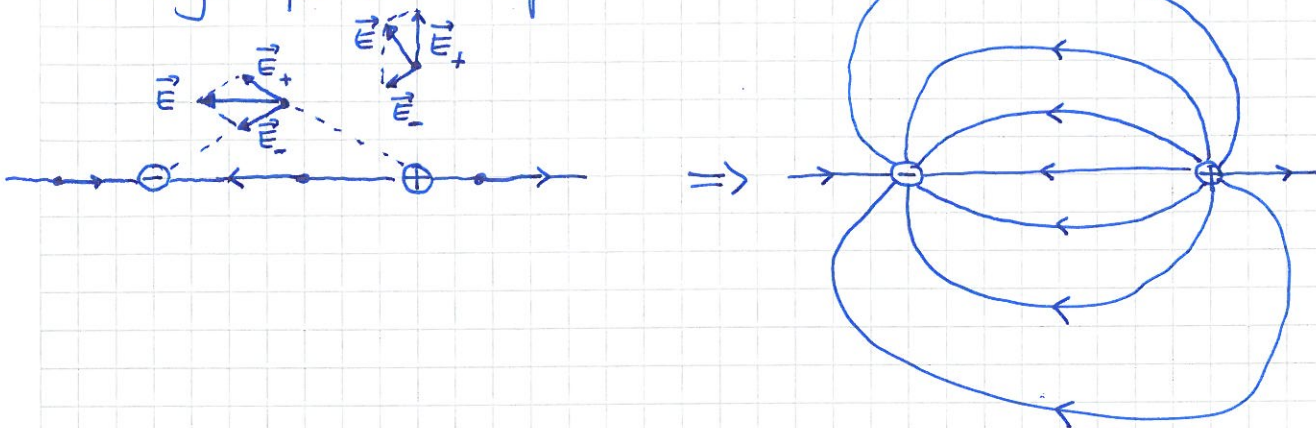


$$\vec{p} = \int \vec{r} dq$$

$$(Q = \int dq = 0)$$

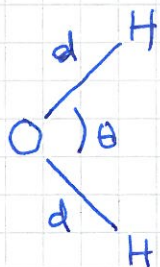
Enhet for dipolmoment:  $[p] = [q \cdot r] = C \cdot m$

Feltlinjer for enkel dipol:



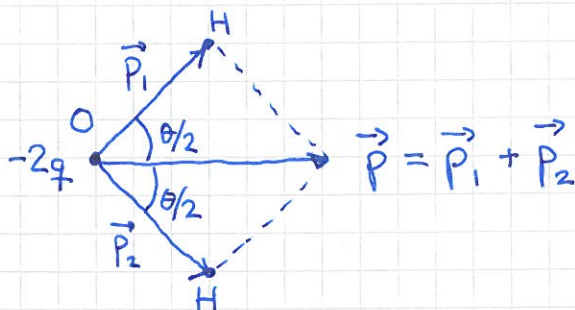
Eks:  $H_2O$ .  $\vec{p} = ?$

Løsn:



$$\left. \begin{aligned} d &= 0.96 \text{ \AA} \\ \theta &= 104.5^\circ \end{aligned} \right\} \text{exp.}$$

Modell med punktladninger:



$q \sim 0.4e$   
 (modell; estimat;  
 har egentlig en  
 kontinuerlig fordeling  
 "sky" av "elektronetthet"  
 i hele molekylet)

Dermed:  $p = 2qd \cos \frac{\theta}{2}$   
 $= 2 \cdot 0.4 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot 0.96 \cdot 10^{-10} m \cdot \cos 52.25^\circ$   
 $\approx \underline{7.5 \cdot 10^{-30} C \cdot m}$

(Eksperimenter gir ca  $6.2 \cdot 10^{-30} C \cdot m$ )

Eks: "Stardipol"

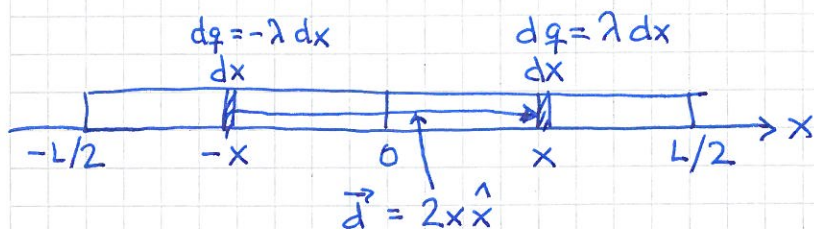
(74)



$\pm \lambda =$  ladning pr lengdeenhet

Bestem dipolmomentet  $p$ .

Løsning: Legg f.eks. staven langs  $x$ -aksen



Ladningsparet  $\pm dq = \pm \lambda dx$  i innbyrdes avstand  $2x \hat{x}$  har dipolmoment  $d\vec{p} = \lambda dx \cdot 2x \hat{x}$

$\Rightarrow$  Hele staven:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \int d\vec{p} = \int_0^{L/2} \lambda dx \cdot 2x \hat{x} = 2\lambda \hat{x} \int_0^{L/2} x dx \\ &= 2\lambda \hat{x} \left| \frac{1}{2} x^2 \right|_0^{L/2} = \underline{\underline{\frac{1}{4} \lambda L^2 \hat{x}}}\end{aligned}$$

Sjekk enheten:

$$[p] = [\lambda L \cdot L] = \left(\frac{C}{m} \cdot m\right) \cdot m = C \cdot m, \quad \text{OK!}$$

# Elektrisk potensial

[TM 23; LHL 19.9]  
[YF 23.2]

(75)

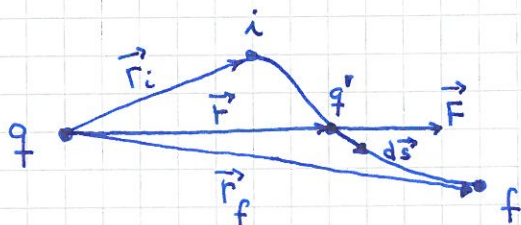
Coulombkraften  $\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$



har samme form som tyngdekraften,

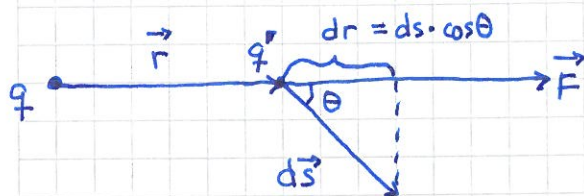
og er dermed konservativ,  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$  (se s. 19).

Potensiell energi for  $q'$  i det elektriske feltet fra  $q$ :



$$\Delta U = U_f - U_i = - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (s.20)$$

= endring i pot. energi når  $q'$  flyttes fra  $i$  til  $f$  ( $q$  står fast)



$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos\theta = F \cdot dr$$

$$\Rightarrow \Delta U = - \int_{r_i}^{r_f} \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_f} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_i} = U_f - U_i$$

Fra før:  $\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q'$

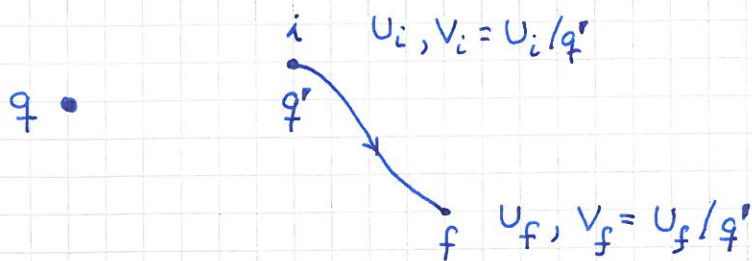
Tilsvarende defineres potensialet  $V$ :

$$V \stackrel{\text{def}}{=} U/q'$$

Dvs: elektrisk potensial  $V = \text{pot. energi } U \text{ pr ladningsenhet}$

SI-enhet:  $[V] = [U/q] = J/C = V$  (volt)





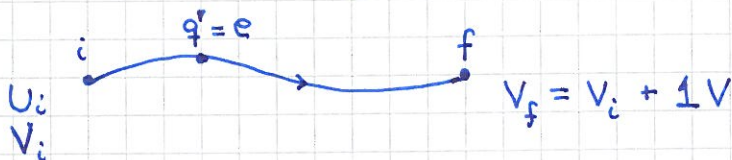
$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{U_f - U_i}{q'} = - \int_i^f \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{q'} = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\boxed{\Delta V = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \text{potensialforskjellen mellom } i \text{ og } f$$

$\Rightarrow$  Alternativ enhet for el. felt:  $[E] = [\Delta V/\Delta s] = \underline{V/m}$

Energienheten elektronvolt, eV: (Nyttig i fysikk.)

Se på elementær ladning som flyttes fra  $i$  til  $f$ :



Endringen i pot. energi blir:

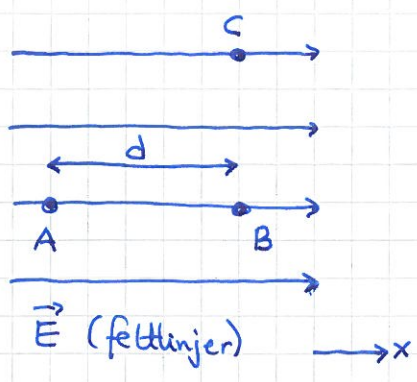
$$\Delta U = U_f - U_i = V_f \cdot e - V_i \cdot e = 1V \cdot e = \underline{\underline{1eV}}$$

$$1eV = \underbrace{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}_e \cdot \underbrace{1 \text{ J/C}}_{V \text{ (volt)}} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Eks: LHC ved CERN akselererte i 2012 protoner opp til energi  $4 \text{ TeV} = 4 \cdot 10^{12} \text{ eV}$ , for å produsere Higgs-partikkelen. Protonets hastighet er da  $v \approx c - 8 \text{ m/s}$  !

[Der  $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =$  lysets hastighet i vakuum]

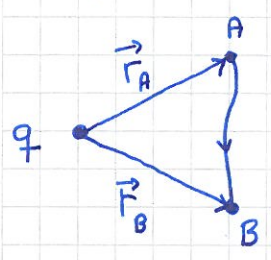
Eks:  $\Delta V$  i uniformt  $E$ -felt



$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E \int_{x_A}^{x_B} dx = \underline{\underline{-E \cdot d}}$$

$$V_C - V_B = - \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{da } \vec{E} \perp d\vec{s})$$

Eks:  $V(r)$  for punktladning [TM 23.2; LHL 19.9] [YF 23.2]



Med  $q'$  (som flyttes fra A til B):

$$\Delta U = U_B - U_A = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

$$\Rightarrow \Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

(uafhængig af  $q'$ , som ventet. Kjekt!)

Velg "referansested" A  $\infty$  langt borte:  $r_A \rightarrow \infty \Rightarrow V_A \rightarrow 0$   
 Og sett  $r_B = r$ :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Coulombpotensialet: Potensialet i afstand  $r$  fra punktladning  $q$

Generalisering til flere punktladninger, evt. kontinuert ladn.fordeling:



$$\begin{aligned} \text{Potensial i P: } V_P &= - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^P (\sum_i \vec{E}_i) \cdot d\vec{s} = \sum_i \left( - \int_{\infty}^P \vec{E}_i \cdot d\vec{s} \right) \\ &= \sum_i V_P^i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \end{aligned}$$

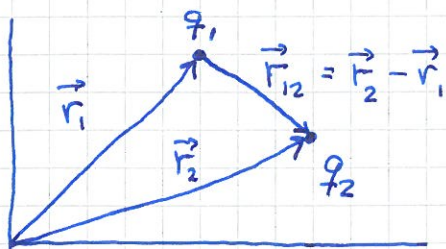
Kontinuert fordeling:  $q_i \rightarrow \Delta q_i \rightarrow dq$ ;  $\sum_i \rightarrow \int \Rightarrow V(r) = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$

# Potensiell energi for l adningssystem

[TM 23.6; LHL 19.9  
20.3]

(78)

[YF 23.1]



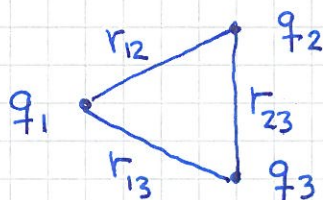
Potensial fra  $q_1$  i  $\vec{r}_2$  :  $V_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

----- " -----  $q_2$  i  $\vec{r}_1$  :  $V_2(\vec{r}_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

Pot. energi for l adningsparet :  $U_{12} = q_2 V_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

ert: ----- " ----- :  $U_{21} = q_1 V_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = U_{12}$

Hvis flere l adninger :



L adningene vekselvirker parvis.

⇒ Total potensiell energi, relativt "referansesystemet" der alle  $q_1, q_2, \dots, q_n$  er  $\infty$  langt fra hverandre (og dermed har null pot. energi) :

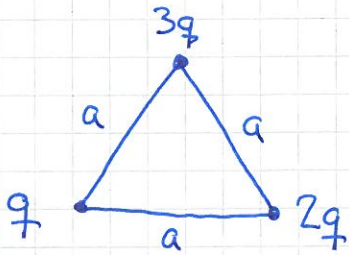
$$U = U_{12} + U_{13} + \dots + U_{1n} + U_{23} + \dots + U_{2n} + \dots + U_{n-1,n}$$
$$= \sum_{i < j} U_{ij} = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

[Her betyr  $\sum_{i < j}$  dobbeltsummen  $\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i) \\ (j > i)}}^n$  ]

## U for ladningssystem [TM 23.6; LHL 19.9, 20.3] [YF 23.1] (79)

$$\text{Fra rest: } U = \sum_{i < j} U_{ij} = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Eks:



$q = e, \quad a = 4 \text{ \AA}$   
Finn  $U$  i J og eV.

$$\text{Løsn: } U = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \{1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3\} = \frac{11 q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot 11 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2 / 4 \cdot 10^{-10} \text{ J} = \underline{\underline{6.3 \cdot 10^{-18} \text{ J}}}$$

$$= \frac{6.3 \cdot 10^{-18} \text{ J}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} \approx \underline{\underline{40 \text{ eV}}}$$

## Beregning av $\vec{E}$ fra $V$ [TM 23.3; LHL 19.9] [YF 23.5]

$$V = V(\vec{r}) = V(x, y, z)$$

$$\Rightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

(et såkalt totalt differensial, se Matematikk 2)

Med

$$\nabla V = \hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} = \text{gradienten til } V$$

og

$$d\vec{s} = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz = \text{veielementet}$$

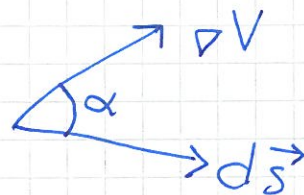
kan vi skrive:

$$\boxed{dV = \nabla V \cdot d\vec{s}}$$

Hva betyr  $\nabla V$  ?

80

$$dV = |\nabla V| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos \alpha$$



$\Rightarrow$  max verdi på  $dV$  når forflytningen er i en retning slik at  $d\vec{s} \parallel \nabla V$  (dvs  $\alpha=0$ )

$\Rightarrow \nabla V$  er en vektor som peker i den retningen som  $V$  øker raskest.

Og absoluttverdien av  $\nabla V$  er "hellingen", dvs "stigningstallet", dvs endringen i  $V$  pr lengdeenhet

Fra før har vi:  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$

Dermed må vi kunne skrive:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Dvs:  $E_x = -\partial V / \partial x$  etc.

Dermed:  $\vec{F} = q' \vec{E} = -q' \nabla V = -\nabla U$

(siden  $V = U/q'$ )

# Ekvipotensialflater [TM 23.5; LHL 19.11] [YF 23.4] (81)

= flater med  $V = \text{konst.}$  (evt. kurver med  $V = \text{konst.}$ )

Dvs:  $dV = 0$



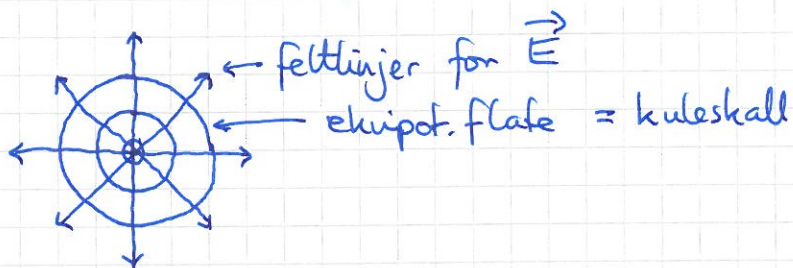
$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$



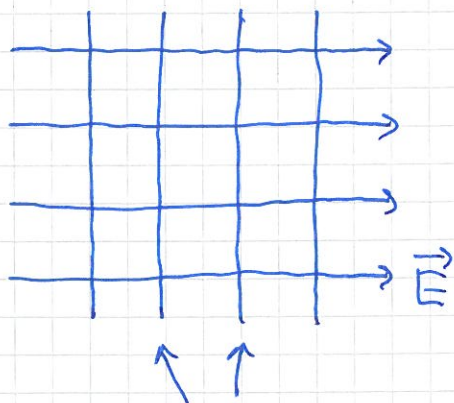
$\vec{E} \perp d\vec{s}$  når forflytningen  $d\vec{s}$  foregår på en ekvipot. flate

$\Rightarrow$   $\vec{E} \perp$  ekvipotensialflater

Eks 1: Punktladning



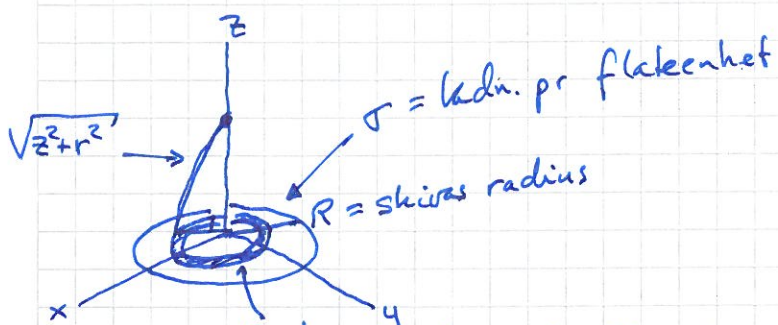
Eks 2: Uniformt  $\vec{E}$ -felt



ekvipot. flater = plan  $\perp \vec{E}$

Eks:  $V(z)$  og  $\vec{E}(z)$  på aksen til uniformt ladet skive  
(Jf. øving 8)

82



Smal ring, radius  $r$ , bredde  $dr$ , areal  $dA = 2\pi r \cdot dr$ ,  
ladning  $dq = \sigma dA = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$ , afstand  $\sqrt{z^2 + r^2}$  til  
punkt på  $z$ -aksen, bidrag  $dV = dq / 4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}$  til  
potensialet  $V(z)$ .

$$\Rightarrow V(z) = \int dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^R$$
$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ \sqrt{z^2 + R^2} - z \right\}$$

I grensen  $z \ll R$  (dvs stort plan):  $\sqrt{z^2 + R^2} \approx R$

$$\Rightarrow V(z) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R - z)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = -\hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} \quad (\text{som funnet i øving 8})$$

# Materialers elektriske egenskaper

83

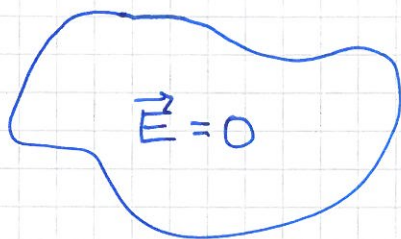
Metaller/Ledere: TM 21.2, 22.5; LHL 19.8 (YF 22.5)

Isolatorer/Dielektrika: TM 24.4, 24.5; LHL 20.5 (YF 24.4, 24.5)

## Metaller/Ledere

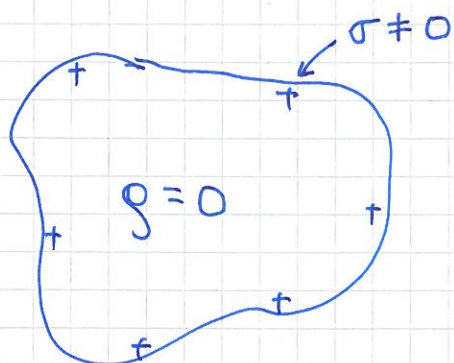
Har frie (mobile) ladninger som kan bevege seg i metallet hvis de utsettes for krefter.

Elektrostatiske egenskaper for metaller:



Inni metallet er  $\vec{E} = 0$

(Hvis ikke  $\vec{E}$  er lik null, er heller ikke kraften  $\vec{F} = q\vec{E}$  lik null på en fri ladning  $q$ , og da har vi ikke likevekt!)



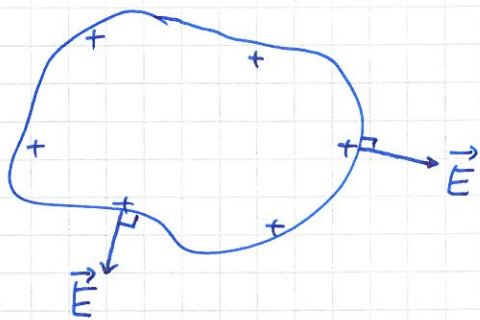
Hvis metallbiten har netto ladning, må all netto ladning ligge på overflaten.

(Forklares ofte med at enkeltladningene frastøter hverandre, og derfor velger  $e$  ligge på overflaten, "lengst mulig unna hverandre". Dette er bare delvis riktig! At ledningsfaktoren  $\rho = 0$  overalt inni metallet skyldes at  $F \sim 1/r^2$  (og ikke f.eks.  $1/r^{1.5}$  e.l.)



På metallens overflate er  $\vec{E} \perp$  overflaten.

(84)



(Hvis  $\vec{E}$  hadde komponent  $E_{||}$  tangentielt til overflaten, ville  $F_{||} \neq 0$  på frie ladninger på overflaten. Men da har vi ikke lenger likevekt, og ladninger ville flytte på seg, inntil  $E_{||} = 0$ .)

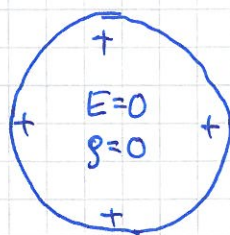
[Det kan vises at  $|\vec{E}| = \sigma / \epsilon_0$  på metallens overflate når den lokale ladning pr flateenhet er  $\sigma$ . Vi beviser ikke dette her.]

På og inni en metallbit er  $V = \text{konstant}$ , dvs en metallbit er et ekvipotensial i elektrostatisk likevekt.

( $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$ ; inni er  $\vec{E} = 0$ , på overflaten er  $\vec{E} \perp d\vec{s}$  når  $d\vec{s}$  er "i overflaten". Uansett blir  $dV = 0$ , dvs  $V = \text{konst.}$ )

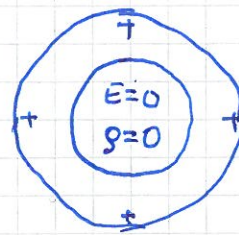
Leder med hulrom har  $E = 0$  i hulrommet, og all netto ladning på ytre overflate.

Bevis:

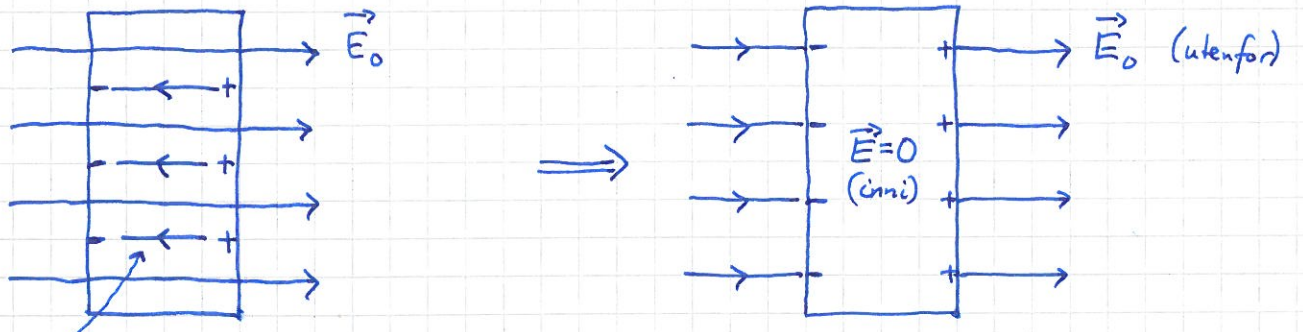


Komplett metall

Tabort  
nøytral bit  
inni; gjør  
da ingen endring,  
verken på  $\vec{E}$  eller  
 $\rho$



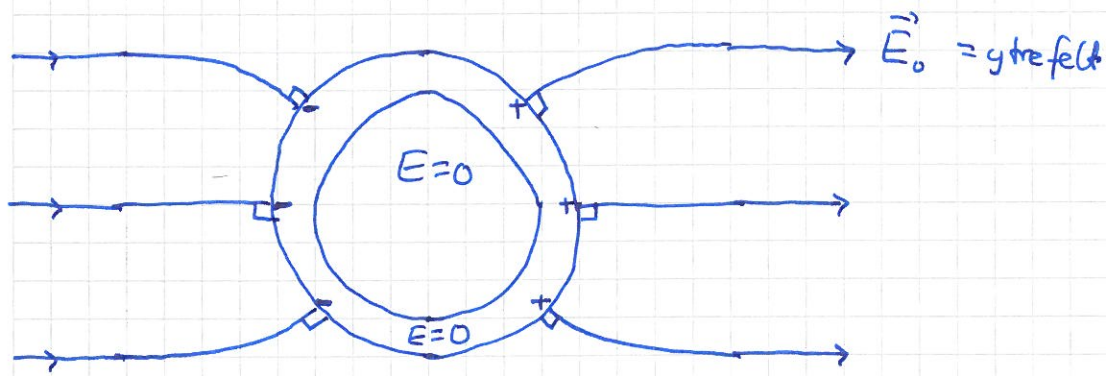
# Leder i ytre felt $\vec{E}_0$ :



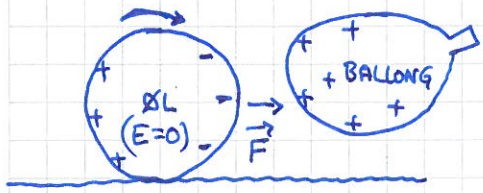
Feltlinjer for induert felt  
 $\vec{E}_{ind} = -\vec{E}_0$  inni  
 lederen

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ind} = 0 \text{ inni lederen}$$

## Faradaybur: Leder med hulrom



## Demo med ølboks (tom!) og ballong:



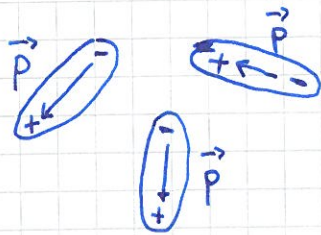
- Gnist ballong og tilfører den netto ladning.
- $\vec{E}$ -feltet fra ladd ballong (anta f.eks. pos. ladning) tiltrekker elektronene i metallet og inducerer overflateledning som vist i figuren.
- $E=0$  inni ølboksen (Faradaybur!)
- Kortest avstand fra pos. ladd på ballongen til negativ ladd på boksen  
 $\Rightarrow$  netto tiltrekning  
 $\Rightarrow$  boksen ruller mot høyre!

# Isolatorer / Dielektrika

[TM 24.4, 24.5; LHL 20.5] [YF 24.4, 24.5] (86)

Har ikke frie ladninger, men polariseres av et ytre felt  $\vec{E}_0$ :

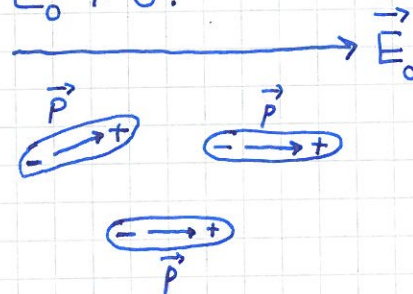
$$E_0 = 0:$$



$$\sum_i \vec{p}_i \approx 0$$

(Molekylære dipoler med dipolmoment  $\vec{p}$ . Vorden;  $\vec{p}$  i tilfeldige retninger.)

$$\vec{E}_0 \neq 0:$$

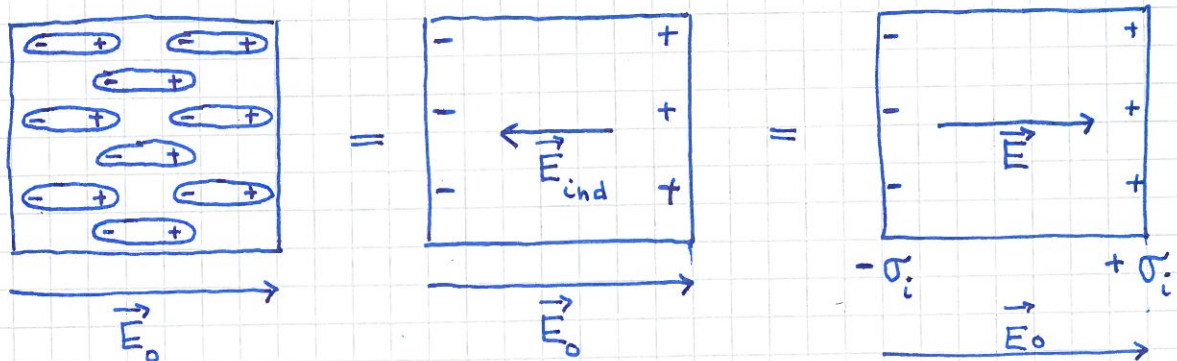


$$\sum_i \vec{p}_i \neq 0$$

(Molekylære dipoler med tendens til orientering slik at  $\vec{p}$  peker i samme retning som  $\vec{E}_0$ .)

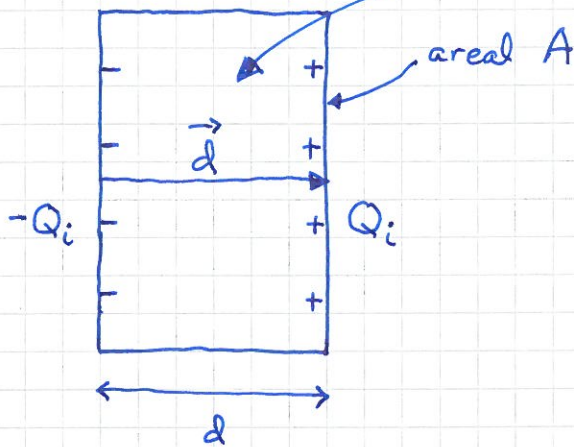
[Jf. øving 9]

Netto makroskopisk effekt av ytre felt  $\vec{E}_0$ :



- ytre  $\vec{E}_0 \Rightarrow$  innretning av dipoler ("polarisering")
- induert nettoladning på dielektrikumets overflate;  
ingen nettoladning inni dielektrikumet
- induert nettoladning ( $\pm \sigma_i$  pr flateenhet) gir opphav til induert felt  $\vec{E}_{ind}$  inni dielektrikumet, motsatt retning det ytre feltet, men  $|\vec{E}_{ind}| < |\vec{E}_0|$  [Jf metall, der  $|\vec{E}_{ind}| = |\vec{E}_0|$ ]
- får svekket feltet inni diel:  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ind}$ ;  $|\vec{E}| = |\vec{E}_0| - |\vec{E}_{ind}|$

# Polarisering $\vec{P}$ :



dielektrikum med volum  $V = A \cdot d$

Dette er en dipol, med dipolmoment (s. 72)

$$\vec{p} = Q_i \vec{d},$$

ders

$$p = |\vec{p}| = \sigma_i A d = \sigma_i \cdot V$$

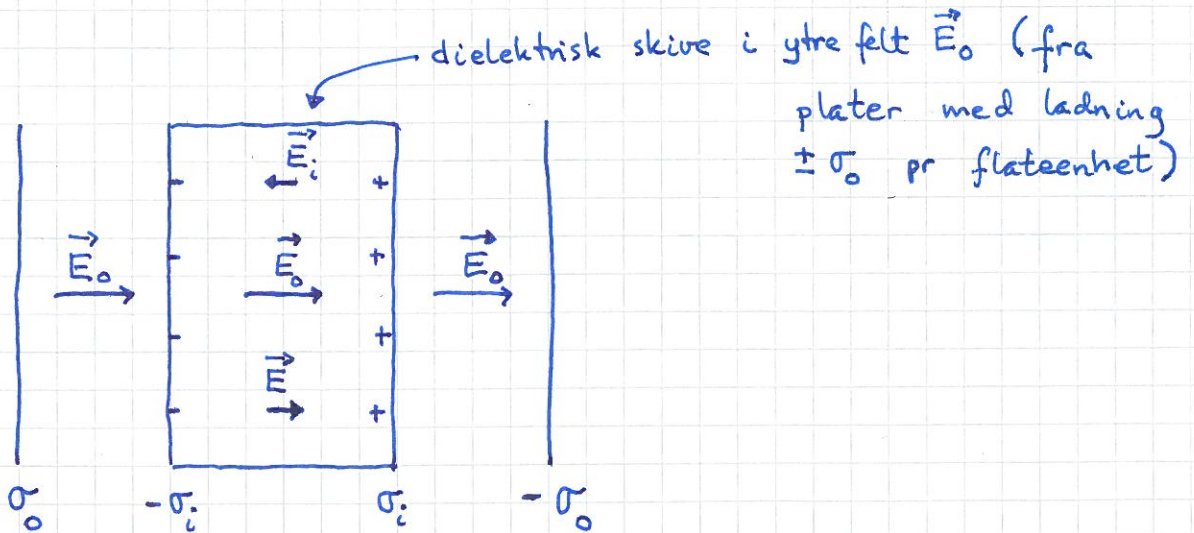
$\vec{P} \stackrel{\text{def}}{=} \text{dipolmoment pr volumenhet}$ :

$$\vec{P} = \vec{p} / V$$

$\Rightarrow P = |\vec{P}| = \sigma_i = \text{indusert overflateledning pr flateenhet}$

Enhet:  $[P] = [p/V] = \text{C} \cdot \text{m} / \text{m}^3 = \text{C} / \text{m}^2 (= [\sigma]; \text{OK!})$

## Indusert elektrisk felt $\vec{E}_i$ :



- Felt fra ett stort uniformt ladet plan:  $\sigma / 2\epsilon_0$  (s. 82 og Øving 8)
- Felt mellom to store plan med ladning  $\pm\sigma$  pr flateenhet:  $\sigma / \epsilon_0$  (SPP!)
- Felt utenfor  $\text{---} \parallel \text{---}$ : 0 (SPP!)
- Dermed:  $E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$ ,  $E_i = \sigma_i / \epsilon_0$
- Totalt felt inni dielektrisk skive:  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$ ,  $E = E_0 - E_i = \sigma_0 / \epsilon_0 - \sigma_i / \epsilon_0$

## Lineær respons:

(88)

Med "ikke for sterkt" ytre felt  $\vec{E}_0$  er polariseringen  $\vec{P}$  proporsjonal med  $\vec{E}_0$ , og dermed også prop. med  $\vec{E}$ :

$$\boxed{\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}} \quad \text{Lineær respons}$$

$\chi_e$  = isolatorens elektriske susceptibilitet;  $[\chi_e] = 1$  (dim.løs)

Dermed:

$$E = E_0 - E_i \quad \begin{matrix} P = \sigma_i \\ \implies \end{matrix} \quad \frac{\sigma_i}{\chi_e \epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\epsilon_0} \implies \sigma_i = \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \sigma_0$$

$$\implies \underline{E} = \frac{1}{\chi_e \epsilon_0} \sigma_i = \frac{1}{\chi_e \epsilon_0} \cdot \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \sigma_0 = \frac{1}{1 + \chi_e} \cdot \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \underline{\frac{1}{\epsilon_r} E_0}$$

Dvs: Feltet inni isolatoren,  $E$ , er svekket med faktoren  $1/\epsilon_r$ , der

$\epsilon_r \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \chi_e =$  isolatorens relative permittivitet  
(evt. dielektrisitetskonstant);  $[\epsilon_r] = 1$  (dim.løs)

[TM: dielectric constant  $\epsilon$ ; LHL:  $\epsilon$ ]

Kommentarer:

- Vakuum:  $\epsilon_r = 1$ . Tørr luft:  $\epsilon_r = 1.00054$ . Plast:  $\epsilon_r \sim 2-6$ .  
Rent vann:  $\epsilon_r = 80$ . Perfekt metall:  $\epsilon_r \rightarrow \infty \implies E = E_0 / \epsilon_r = 0$ ,  $\sigma_k!$
- Kan skrive  $E = \sigma_0 / \epsilon$ , med  $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 =$  mediets permittivitet.  
Dermed blir vakuum (= tomt rom) et "medium", med permittivitet  $\epsilon = 1 \cdot \epsilon_0 = \epsilon_0$ .
- Lysets hastighet i et stoff bestemmes av stoffets elektriske og

magnetiske egenskaper. I vakuum:  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$  (89)

[ $\mu_0 =$  vakuumpermeabiliteten  $= 4\pi \cdot 10^{-7}$ ; mer om det senere]

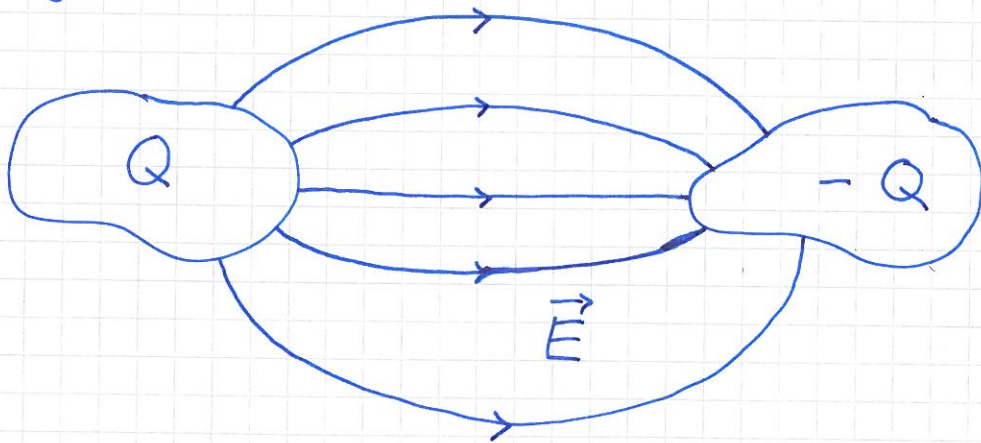
I isolator med permittivitet  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 > \epsilon_0$  (og  $\mu = \mu_0$ )

blir lysfarten  $v = 1/\sqrt{\epsilon \cdot \mu} = 1/\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0} = c/\sqrt{\epsilon_r} < c$ ,  
dvs redusert med faktoren  $1/\sqrt{\epsilon_r}$ .

[Brytningsindeksen:  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  for umagnetisk stoff med  $\mu = \mu_0$ ]

## Kondensator og kapasitans [TM 24; LHL 20] [YF 24]

en kondensator består av to adskilte ledere, med  
ladning  $\pm Q$ :



Coulombs lov  $\Rightarrow E$  prop. med  $Q$

$$\Rightarrow V = V_+ - V_- = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$\Rightarrow V$  er også prop. med  $Q$

Kondensatoren har kapasitans  $C$ , definert slik:

$$C = \frac{Q}{V}$$

( $C > 0$  pr def.)

Enhet:  $[C] = \frac{C}{V} = F$  (farad)

Merknader:

90

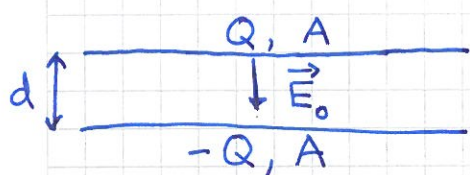
• Kretssymbol: 

• Lagrer ladning og energi.

• Verdien på  $C$  avhenger av geometri (utforming) og type medium mellom lederne.  $C$  er uavhengig av  $Q$  og  $V$ .

• Beregning av  $C$ : Anta ladning  $\pm Q$  på de to lederne. Regn ut  $V = V_+ - V_- (= -\int \vec{E} \cdot d\vec{s})$ . Da er  $C = Q/V$ .

Eks 1: Platekondensator (luftfylt)

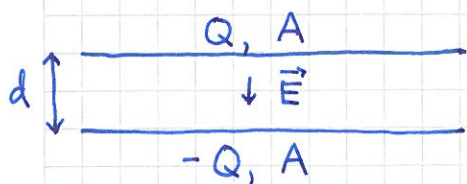


$d \ll \sqrt{A} \Rightarrow$  konstant  $\vec{E}_0$  mellom platene,  
 $E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0 = Q / A \epsilon_0$

$$V = E_0 \cdot d = (Q / A \epsilon_0) \cdot d \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}}{\quad}$$

(medium)                      (geometri)

Eks 2: Platekondensator fylt med isolator (dielektrikum)



$$E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0 = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Q/A}{\epsilon_0}$$

$$V = E \cdot d = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Q \cdot d}{A \cdot \epsilon_0} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}}{\quad}$$

(medium)                      (geometri)

Dvs:  $C$  er økt med faktor  $\epsilon_r$

[Alternativ enhet for permittivitet:  $[\epsilon] = [C \cdot d / A] = F \cdot m / m^2 = F/m$ ]

# Kobling av flere kapasitanser [TM 24.3; LHL 20.2] [YF 24.2] (91)

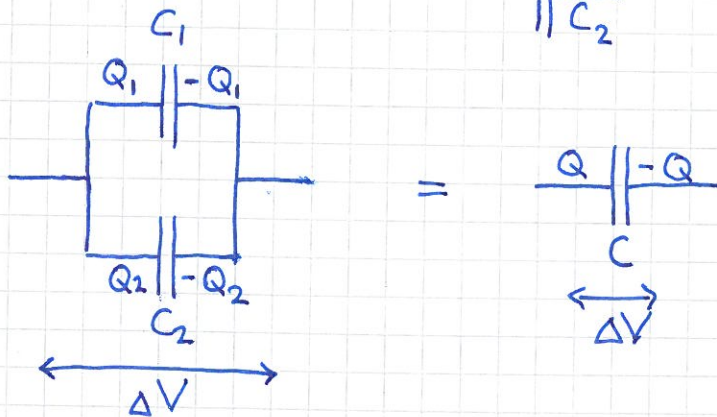
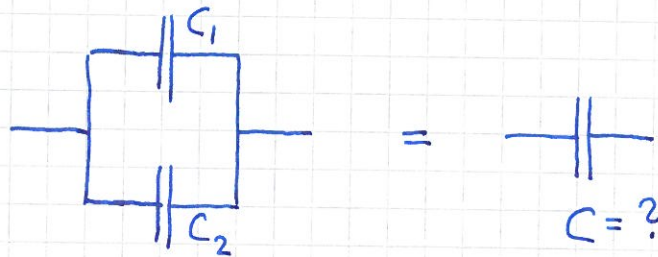
Seniekobling: 



$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = \Delta V \Rightarrow \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

N stk i serie:  $\boxed{C^{-1} = \sum_{j=1}^N C_j^{-1}}$

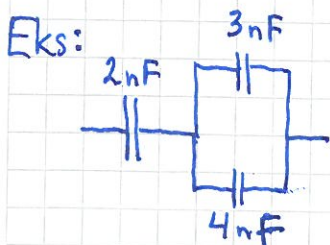
Parallellkobling:



$$Q_1 + Q_2 = Q, \quad \Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

$$\Rightarrow C_1 \Delta V + C_2 \Delta V = C \Delta V \Rightarrow \boxed{C = C_1 + C_2}$$

N stk i parallell:  $\boxed{C = \sum_{j=1}^N C_j}$



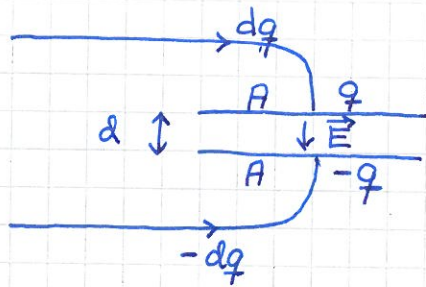
$$\text{Total kapasitans: } C = \left\{ \frac{1}{2 \text{ nF}} + \frac{1}{3 \text{ nF} + 4 \text{ nF}} \right\}^{-1} = \left( \frac{7+2}{2 \cdot 7} \right)^{-1} \text{ nF}$$

$$= \underline{\underline{14/9 \text{ nF}}}$$



## Energi lagret i elektrisk felt [TM 24.2; LHL 20.4] [YF 24.3] (92)

Pot. energi lagret i  $\vec{E}$ -feltet i kondensator må tilsvare arbeidet påkrevd for å lade opp kondensatoren til ladning  $\pm Q$ :



$\downarrow v(q) = q/C =$  potensialforskjellen mellom platene når ladn. er  $\pm q$

Økning fra  $\pm q$  til  $\pm(q+dq)$  tilsvarer at vi flytter  $dq$  fra negativt til positivt ladd plate, krever et arbeid

$dW = v(q) dq$ , og gir økning  $dU = v(q) dq$  i pot. energi

$\Rightarrow$  Opplading, fra  $q=0$  til  $q=Q$ , gir pot. energi

$$U = \int dU = \int_0^Q v(q) dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \underline{\underline{\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}}$$

Med  $C = Q/V$  :  $U = Q^2/2C = QV/2 = CV^2/2$

Fra s. 90, Eks 1:  $C = \epsilon_0 A/d$ ,  $V = E \cdot d$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} \cdot (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot \underbrace{(A \cdot d)}$$

= volumet mellom platene (der  $E \neq 0$ )

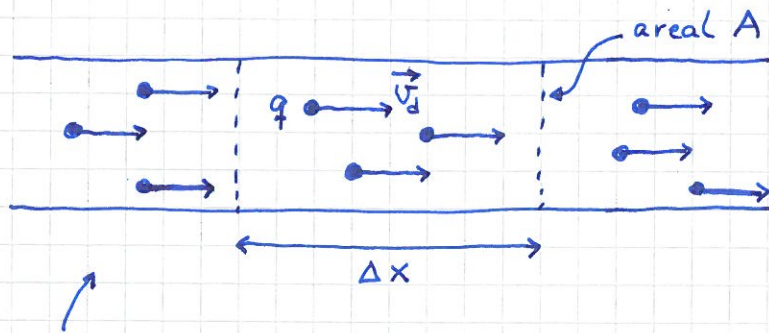
$\Rightarrow$  Energi pr volumenhet i elektrisk felt er:

$$\boxed{u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}$$

(som gjelder generelt)

# Elektrisk strøm [TM 25; LHL 21,22] [YF 25,26] (93)

## Strøm $I$ og strømteethet $\vec{j}$ [TM 25.1; LHL 21.1] [YF 25.1]



Leder med frie (mobile) ladninger  $q$  med midlere driftshastighet  $\vec{v}_d$  langs lederen.

Elektrisk strømstyrke:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dQ}{dt} = \text{ladning som passerer et tverrsnitt av lederen (areal } A) \text{ pr tidsenhet}$$

$$[I] = C/s = A \text{ (ampere)}$$

$$\Delta N = \text{antall mobile ladn. i volum } \Delta V = A \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow n = \frac{\Delta N}{\Delta V} = \text{antall mobile ladn. pr volumenhet; } [n] = m^{-3}$$

$$\Rightarrow \Delta Q = q \cdot \Delta N = nq \Delta V = nqA \Delta x = \text{mobil ladn. i } \Delta V$$

$$\Rightarrow I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqA \frac{\Delta x}{\Delta t} = nqA v_d$$

[På tiden  $\Delta t = \frac{\Delta x}{v_d}$  passerer alle  $\Delta N$  (i snitt) (som er i  $\Delta V$ ) flaten med areal  $A$ .]

Strømteethet:  $\vec{j} = I/A = \text{strøm pr flateenhet; } [j] = A/m^2$

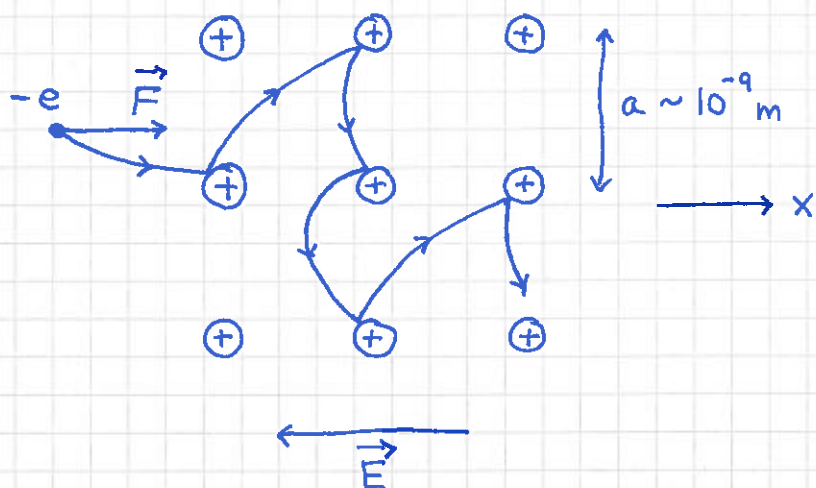
$$\Rightarrow \vec{j} = nq\vec{v}_d \Rightarrow \boxed{\vec{j} = nq\vec{v}_d}$$

$$I \text{ metall: } q = -e \Rightarrow \vec{j} = -ne\vec{v}_d \Rightarrow$$



# Ohms lov [TM 25.2, 38.2; LHL 21.2, 21.4] [YF 25.2, 25.6] (94)

Enkel mikroskopisk modell: [P.K. Drude, 1900]



Fri elektroner kolliderer (ustanselig!) på sin vei gjennom metallet.

⊕ = gitter av ioner

Partikkelhastighet  $v_T$  ved temperatur  $T$ :

$$\frac{1}{2} m_e v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K}}{9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \sim 10^5 \text{ m/s}$$

Midlere tid  $\tau$  mellom kollisjoner (for gitt elektron):

$$\tau \sim a/v_T \sim 10^{-9} \text{ m} / 10^5 \text{ m/s} = 10^{-14} \text{ s}$$

Anta  $\langle v_x \rangle = 0$  etter kollisjon, dvs tilfeldig retning etter kollisjon.

Newtons 2. lov:

$$-eE_x = m_e \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow \int_0^{v_x} dv_x = -\frac{eE_x}{m_e} \int_0^\tau dt \Rightarrow \langle v_x \rangle \approx -\frac{e\tau}{m_e} E_x$$

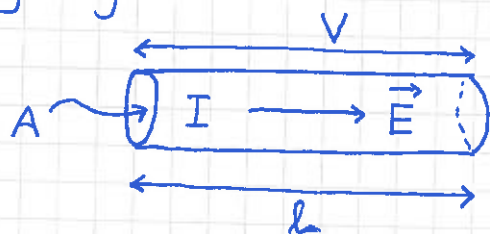
$$\Rightarrow \text{Driftshastighet langs } (-) \vec{E}: \vec{v}_d = -\frac{e\tau}{m_e} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{Strømtetthet: } \vec{j} = -ne\vec{v}_d = \frac{ne^2\tau}{m_e} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{Ohms lov: } \boxed{\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}} \quad \leftarrow \text{"Drude konduktivitet"}$$

med  $\sigma = ne^2\tau/m_e = \text{elektrisk ledningsevne (konduktivitet)}$

For leder (eller motstand!) med tverrsnitt  $A$  og lengde  $l$ :



$$V = E \cdot l \quad [\text{s. 77}; V = \text{pot. forskjell}]$$

$$I = j \cdot A \quad [\text{s. 93}]$$

$$j = \sigma E \Rightarrow \frac{I}{A} = \sigma \frac{V}{l} \Rightarrow I = G \cdot V$$

med  $G = \sigma A / l =$  lederens konduktans

$$\Rightarrow \boxed{V = R \cdot I}$$

med  $R = G^{-1} = \frac{l}{\sigma \cdot A} =$  lederens resistans (motstand)

Evt.  $R = g \cdot \frac{l}{A}$ , med  $g = \sigma^{-1} =$  ledermaterialets resistivitet

Enheter:

$$[R] = V/A = \Omega \text{ (ohm)}$$

$$[G] = \Omega^{-1}$$

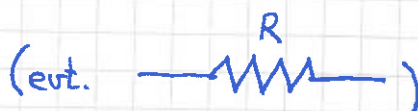
$$[g] = \Omega \cdot m$$

$$[\sigma] = \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$$

Merk:

$\sigma$  og  $g$  er materielspesifikke størrelser, mens  $G$  og  $R$  dessuten avhenger av lederens dimensjoner

Kretssymbol for motstand:



Eks: Anslå resistiviteten  $\rho$  i sølv (Ag)

(96)

Løsn: Volum pr Ag-atom er ca  $(4\text{\AA})^3 \sim 6 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$ .

Med 1 fritt elektron pr atom blir tettheten av frie elektroner dermed  $n \sim 2 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

Med elektr. ledneene fra s. 94:

$$\sigma = ne^2 \tau / m_e \sim 2 \cdot 10^{28} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 10^{-14} / 10^{-30} \\ \sim 5 \cdot 10^6 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$\Rightarrow \rho = 1/\sigma \sim 2 \cdot 10^{-7} \text{ } \Omega \text{ m}$$

[Eksperimentelt er  $\rho_{\text{Ag}} \approx 1.5 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega \text{ m}$  ved  $0^\circ \text{C}$ ]

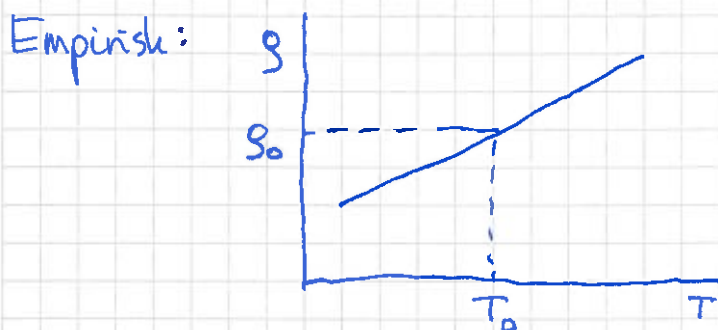
Noen omtrentlige tallverdier for ulike materialtyper:

<u>Materiale</u>	<u><math>\rho</math> (<math>\Omega \text{ m}</math>)</u>
Gode ledere (Metaller)	$10^{-8}$
Isolatorer (Dårlige ledere)	$10^{10} - 10^{14}$
Perfekt leder	0
Perfekt isolator	$\infty$

Temperaturhengigheten til  $\rho$  [YF 25.2; TM 25.2; LHL 21.2+21.5]

Metaller:

Økt  $T \Rightarrow$  Flere kollisjoner  $\Rightarrow$  Økt  $\rho$



$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$$

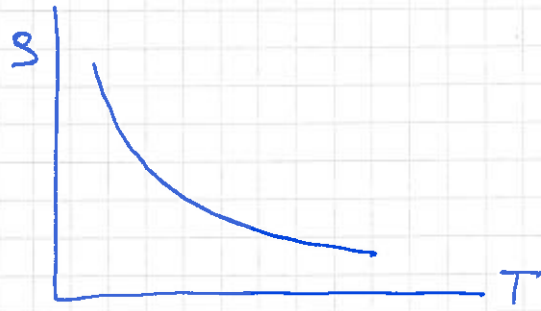
$$\alpha_{\text{Al}} = 0.004 \text{ K}^{-1}$$

( $[T] = \text{K} = \text{kelvin}$ )

## Halvledere: [TM 38.6]

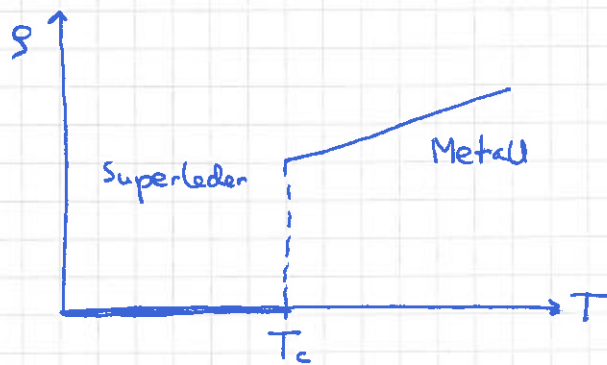
(97)

- Isolator ved  $T=0$
- Økt  $T \Rightarrow$  Flere mobile ladninger  $\Rightarrow$  Redusert  $\rho$



## Superledere: [TM 38.8]

- $\rho=0$  for  $T < T_c =$  "kritisk temperatur"



H. Kammerlingh-Onnes (1911):

Kvikksølv (Hg),  $T_c \approx 4.12$  K

I dag: "High- $T_c$  superconductivity"

$T_c$  opp mot 130-140 K

for noen materialer

# Kobling av flere motstander [TM 25.4; LHL 21.3] [YF 26.1] (98)

Seri kobling:

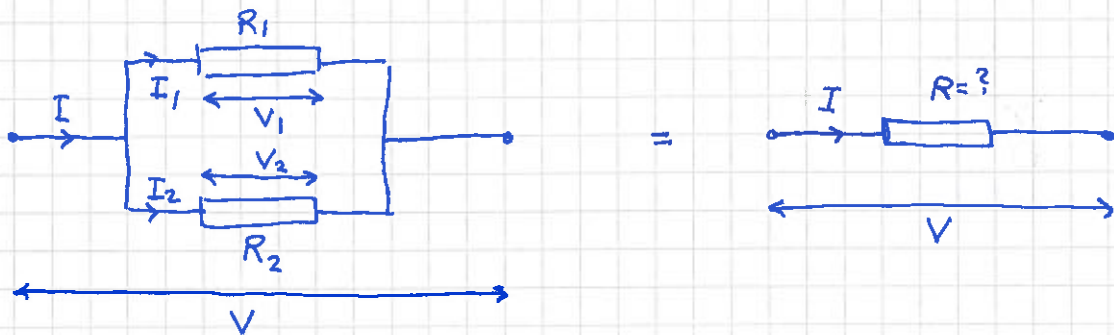


$$V = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I ; \quad V = \underline{R} I$$

$$\Rightarrow \boxed{R = R_1 + R_2}$$

$$\boxed{N \text{ stk i serie: } R = \sum_{j=1}^N R_j}$$

Parallellkobling:

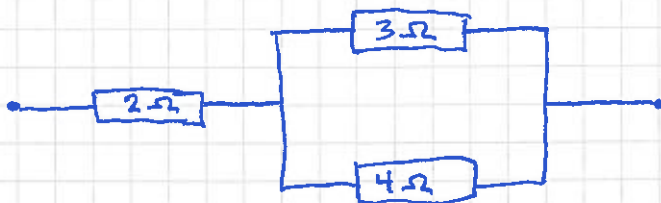


$$I = I_1 + I_2 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) ; \quad I = V \cdot \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

$$\boxed{N \text{ stk i parallell: } R^{-1} = \sum_{j=1}^N R_j^{-1}}$$

Eks:

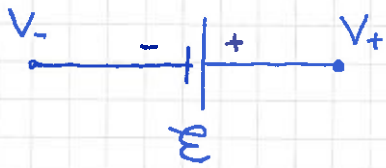


Total motstand:

$$R = 2 \Omega + \left\{ \frac{1}{3 \Omega} + \frac{1}{4 \Omega} \right\}^{-1} = 2 \Omega + \left\{ \frac{4+3}{3 \cdot 4 \Omega} \right\}^{-1} = 2 \Omega + \frac{12}{7} \Omega$$
$$= \underline{\underline{\frac{26}{7} \Omega}}$$

# Likestrømkretser [TM 25; LHL 22] [YF 26 (25)] (99)

Likespenningskilde:



Sørger for spenning (potensialforskjell)

$$\mathcal{E} = V_+ - V_-$$

mellom polene.  $\mathcal{E}$  er en såkalt elektromotorisk spenning (ems).  $\mathcal{E}$  representerer tilført energi pr ladningsenhet.

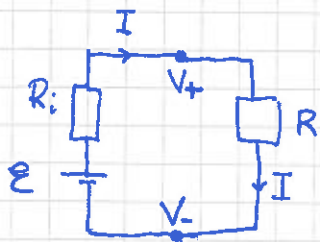
Eksempler på spenningskilder: kjemisk batteri, solcelle



$R_i$  = indre motstand i spenningskilden

Ideell kilde har  $R_i = 0$ .

Eks: Reell kilde koblet til ytre motstand  $R$  (feks. lyspære)



$$\mathcal{E} = R_i I + R I$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} - R_i I \text{ er spenningen } (V_+ - V_-)$$

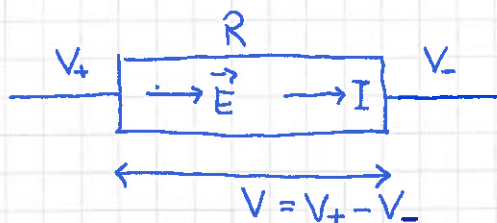
som "leveres" av den reelle kilden

(dvs mindre enn  $\mathcal{E}$  hvis  $I > 0$ )



# Elektrisk effekt [TM 25.3; LHL 22.2] [YF 25.5]

100



Effekttap:  $\mathcal{P} = \frac{dU}{dt}$  = tapt pot. energi pr tidsenhet  
når strømmen  $I$  går gjennom motstanden,  
som har spenningen  $V$  mellom den ene og  
den andre siden.

Spenningen / Potensialforskjellen  $V$  er pr def

$$V = \frac{dU}{dQ}$$

ders tapt pot. energi pr ladningsenhet. Med andre ord:

I løpet av tiden  $dt$  passerer en mengde ladning  $dQ$  et  
tverrsnitt av lederen. På venstre side av motstanden går  $dQ$   
inn i motstanden ved potensialet  $V_+$ , samtidig går  $dQ$   
ut av motstanden på høyre side, ved potensialet  $V_-$ .

Pot. energi for  $dQ$  som går inn er  $V_+ \cdot dQ$ , pot. energi for  
 $dQ$  som går ut er  $V_- \cdot dQ$ , så tapt pot. energi blir

$$dU = V_+ dQ - V_- dQ = V \cdot dQ$$

Dermed:

$$\mathcal{P} = \frac{dU}{dt} = \frac{V \cdot dQ}{dt} = \underline{\underline{V \cdot I}}$$

Energien tapes i motstanden pga kollisjoner ( $\Rightarrow$  varme!)

Med såkalt ohmsk motstand er  $V = R \cdot I$  (Ohms lov),  
da har vi alternative uttrykk:

$$\mathcal{P} = RI^2 \quad \text{ent.} \quad \mathcal{P} = V^2/R$$

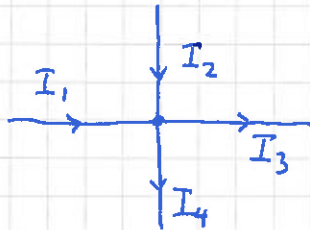
# Kirchhoffs regler [TM 25.5; LHL 22.3] [YF 26.2] (101)

$$\sum_j I_j = 0 \quad \text{i alle knutepunkt}$$

(rett og sløtt pga ladningsbevarelse)

Kirchhoffs  
strømregel /  
knotepunktregel

Eks:



La oss velge positive  $I$   
inn mot et knutepunkt.

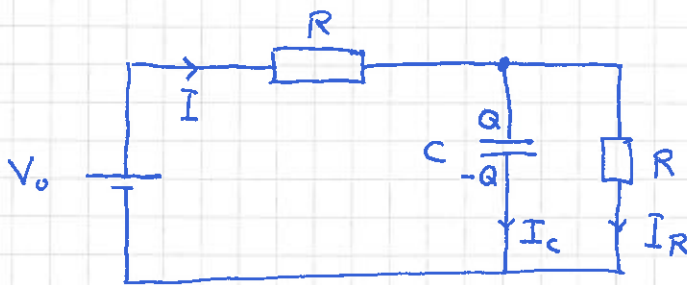
$$\Rightarrow I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

$$\sum \text{potensialendringer} = 0 \quad \text{for alle sløyfer}$$

(rett og sløtt pga energibevarelse)

Kirchhoffs spenningsregel / sløyferegul

Eks:



Ytre sløyfe:  $+V_0 - RI - RI_R = 0$

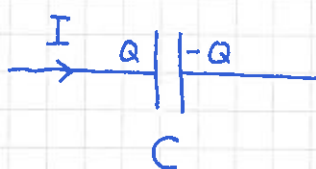
"Venstre" sløyfe:  $+V_0 - RI - \frac{Q}{C} = 0$

"Høyre" sløyfe:  $-RI_R + \frac{Q}{C} = 0$

[Samt  $I - I_C - I_R = 0$ ]

TM kaller sløyferegelen ("loop rule") for "first rule" og knutepunktregelen ("junction rule") for "second rule".

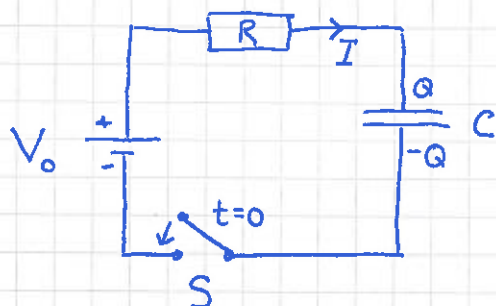
Personlig pleier jeg å gjøre omvendt; "K1" og "K2" for hhv. strømregel og spenningsregel.



$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} ; \quad V = \frac{Q}{C}$$

[Råd: Velg fortegn som her, dvs I inn mot plate med ~~+~~ Q, slik at  $I = dQ/dt$  (og ikke med minustegn).]

Opplading av kondensator i RC-krets.



Bryter S lukkes ved  $t=0$ .  
 $Q(t) = ?$   $I(t) = ?$   
 $[Q(0) = 0]$

$$K2 \Rightarrow V_0 - RI - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow R \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{C} + V_0 = -\frac{Q - V_0 C}{C}$$

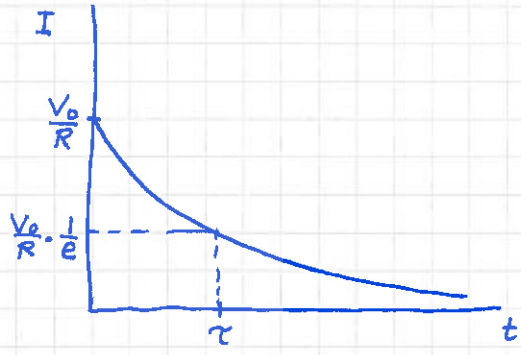
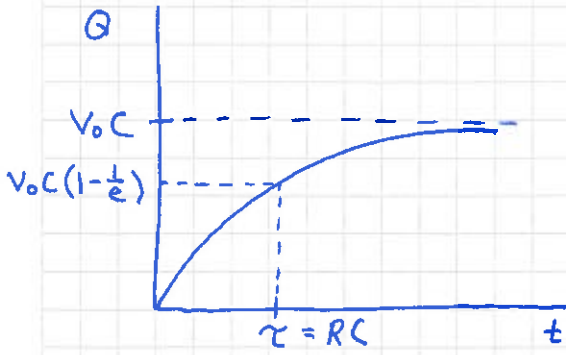
$$\Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{Q - V_0 C}{-V_0 C} \right\} = -\frac{t}{RC}$$

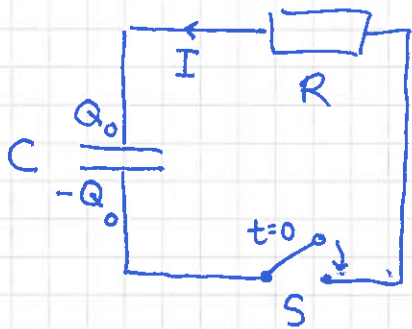
$$\Rightarrow \underline{Q(t) = V_0 C \{ 1 - e^{-t/RC} \}}$$

$$\Rightarrow \underline{I(t) = \dot{Q} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}}$$

Produktet av R og C, "tidskonstanten"  $\tau = RC$ , forteller hvor lang tid det tar å lade opp kondensatoren. F.eks. når det har gått en tid  $3 \cdot \tau = 3 \cdot RC$ , har Q blitt  $V_0 C (1 - e^{-3}) \approx 0.95 V_0 C$ , dvs 95% av maxverdien  $V_0 C$ .



Utlading av en oppladet kondensator i en RC-krets (uten andre komponenter som spenningskilde etc) blir enda enklere:



$Q(0) = Q_0$

$Q(t) = ? \quad I(t) = ?$

$K2 \Rightarrow -\frac{Q}{C} - R\dot{Q} = 0$

$\Rightarrow \int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$

$\Rightarrow \ln \frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$

$\Rightarrow \underline{Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}} \quad ; \quad \underline{I(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}}$

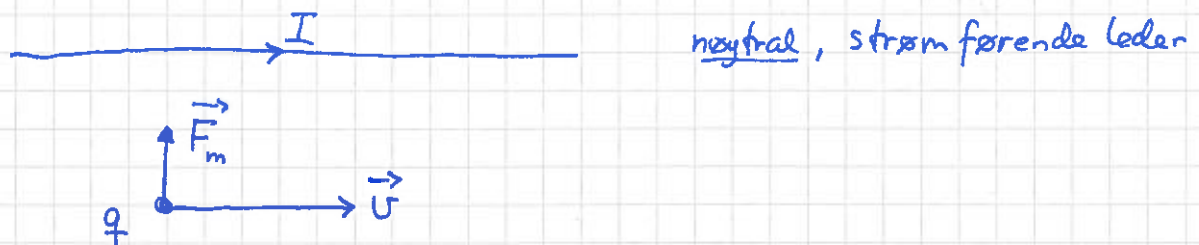
Merk at utregnet  $I(t)$  fikk negativt fortegn. Det visste vi egentlig på forhånd: Vi valgte  $I$  inn mot positivt ladet plate, for å kunne bruke  $I = +dQ/dt$ . Her ser vi at strømmen må gå andre veien når kondensatoren lades ut.

# Magnetostatikk [TM 26+27; LHL 23] [YF 27+28] (104)

Aller først litt om magnetisme som et relativistisk fenomen. (Ikke pensum.) Vi skal se at hvis vi "tror på" Coulombs lov og Einsteins spesielle relativitetsteori, så må det være slik at en elektrisk strøm  $I$  gir opphav til en kraft  $\vec{F}_m$  på en ladning  $q$  som er i bevegelse, med hastighet  $\vec{v}$ .

Denne kraften  $\vec{F}_m$  kan uttrykkes ved hjelp av et vektorfelt  $\vec{B}$ , som nettopp er magnetfeltet.

Vi gjør følgende eksperiment:



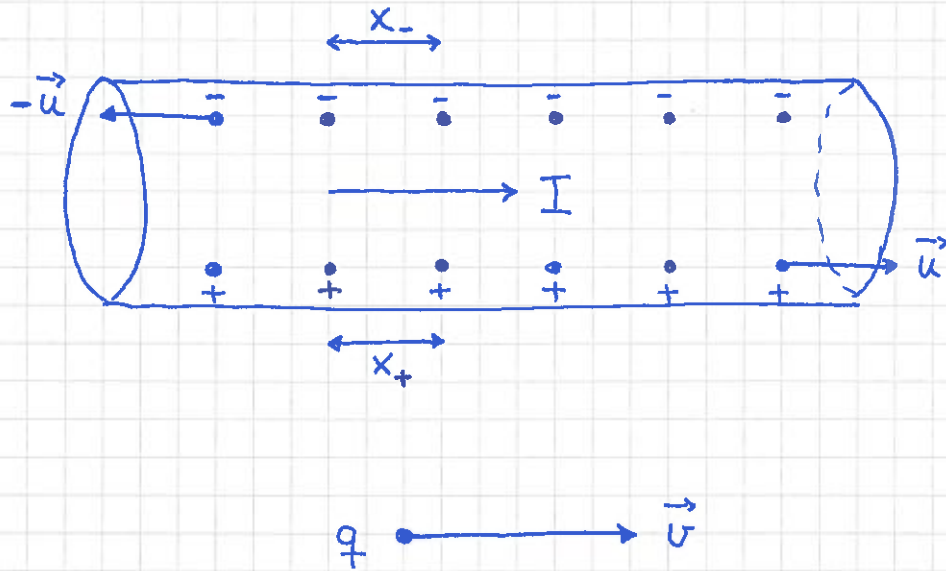
Dvs: Ledningen  $q$ , som har hastighet  $\vec{v}$ , trekkes mot den neutrale ~~og~~ strømførende lederen, med kraft  $\vec{F}_m$  !

Hvor kom  $\vec{F}_m$  fra?

Einstein: "Objekter i bevegelse er kortere enn når de er i ro."

(såkalt lengdekontraksjon)

Anta (f.eks.) at strømmen  $I$  skyldes både negative og positive ladningsbærere: (105)



$\vec{u}$  (som står i ro på laben) og ladningen  $q$  (som har hastighet  $\vec{v}$ ) er i ulike referansesystem (ert. inertialsystem).

$x_-$  og  $x_+$  : avstand mellom hlv. neg. og. pos. ladninger, målt av oss;  $x_- = x_+$ ; dvs vi ser en elektrisk neutrale leder.

$\tilde{x}_-$  og  $\tilde{x}_+$  : tilsvarende, men målt av ladningen  $q$ ;  $\tilde{x}_- < \tilde{x}_+$ ; dvs  $q$  ser en leder med netto negativ ladning, fordi  $q$  ser negative ladm. med større hastighet enn de positive, slik at lengdekontraksjonen blir størst for avstanden mellom de negative ladningene! For  $q$  ser det da ut som om negative ladm. i ledere ligger tettere enn de positive, dvs  $q$  ser en negativt ladet leder!

Coulombs lov, brukt av  $q$ , tilsier dermed at  $q$  trekkes mot lederen pga en elektrisk kraft.

106

[Frastøtes hvis  $q$ ,  $\vec{v}$  eller  $I$  skifter fortegn.]

Einstein: "Fysikkens lover gjelder i alle inertialsystemer."

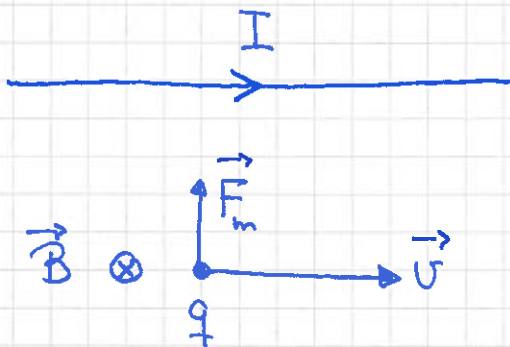
Dermed: Hvis  $q$  måler en kraft på seg selv, må også vi måle en kraft på  $q$ .

Vi måler en magnetisk kraft, som kan uttrykkes ved hjelp av et nytt vektorfelt,

$\vec{B}$  = magnetfeltet.

Det er strømmen  $I$  som er årsaken til magnetfeltet.

Vi innser at eksperimentet på side 104 ~~er~~ er i tråd med at vi lar  $\vec{B}$  peke inn i planet der  $q$  befinner seg, og samtidig uttrykker  $\vec{F}_m$  som et kryssprodukt mellom  $\vec{v}$  og  $\vec{B}$ :



$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

[ $\otimes$  : inn i planet  
 $\odot$  : ut av ""]

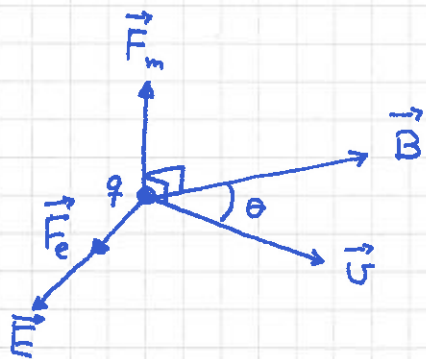
[Sidene 104-106 er ikke pensum, kun orienteringsstoff.]

# Lorentzkraften [LHL 23.4] [YF 27.2]

Ladninger er opphav til elektrisk felt  $\vec{E}$ ,  
og resulterer i en elektrisk kraft  $\vec{F}_e = q\vec{E}$   
på en (annen) ladning  $q$ . (Enten  $q$  er i ro eller i bevegelse.)

Strøm (dvs ladninger i bevegelse) er opphav til  
magnetfelt  $\vec{B}$ , og resulterer i en magnetisk kraft  
 $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$  på en (annen) ladning  $q$ . (I bevegelse.)

Med både  $\vec{E}$  og  $\vec{B}$  til stede (der  $q$  er):



$$\vec{F}_e = q\vec{E}; \quad F_e = |\vec{F}_e| = qE$$

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B};$$

$$F_m = |qvB \sin \theta| = |\vec{F}_m|$$

Total kraft på  $q$ :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Lorentzkraften

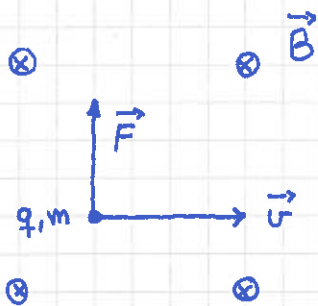
Enhet for  $\vec{B}$ :

$$[B] = [F/qv] = \frac{N}{C \cdot m/s} = \frac{N}{A \cdot m} = T \text{ (tesla)}$$



# Ladet partikkel i uniformt magnetfelt [FM 26.2; LHL 23.1+4]

[⊗ inn i planet; ⊙ ut av planet]



$$\vec{\Pi} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

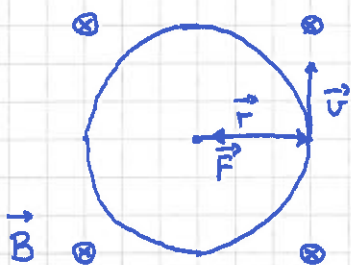
$$F = qvB \sin \theta \quad \vec{v} \perp \vec{B} = qvB$$

⇒ sirkelbevegelse med konstant  $v$ :

$$\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{F} \perp d\vec{s}/dt \Rightarrow dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Dvs: Magnetisk kraft  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  utfører null arbeid

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 = \text{konst.} \Rightarrow v = \text{konst.}$$



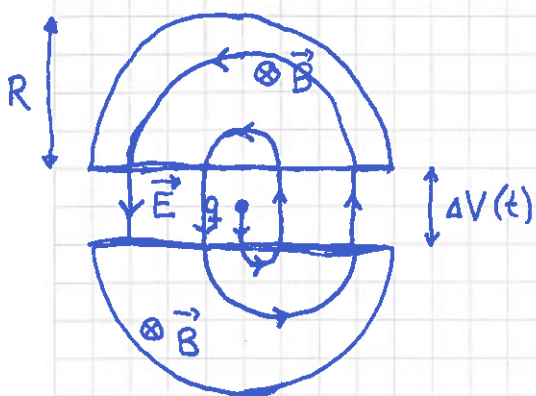
$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \hat{r} \quad (\text{sentripetalaksel.})$$

$$\Rightarrow qvB \stackrel{N2}{=} mv^2/r$$

$$\Rightarrow r = mv/qB$$

$$\Rightarrow \omega_c = v/r = \underline{qB/m = \text{syklotronfrekvensen}}$$

Eks: Prinsipp for partikkelakselerator (CERN; LHC)



- Når  $q$  er i  $\vec{B}$ : Sirkelbevegelse,  
 $r = mv/qB$ ,  $\omega_c = qB/m$

- Spenning  $\Delta V(t) = V_0 \cos \omega_c t$  over "gap"  
i midten  $\Rightarrow \vec{E}(t) \Rightarrow \text{\AA}kt v$  for  
hver passasje

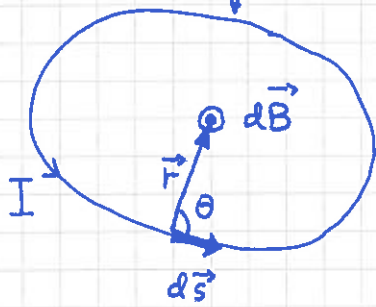
- $V_{\text{max}} = qBR/m$  [ikke-relativistisk]

- LHC:  $R \approx 4\text{km}$ ,  $B \approx 8\text{T}$ ,  $K_{\text{proton}} \sim 7\text{TeV} \Rightarrow V_{\text{proton}} \approx c$

# $\vec{B}$ fra elektrisk strøm [TM 27.2; LHL 23.5] [YF 28.2]

(109)

(Lukket) Strømløkke

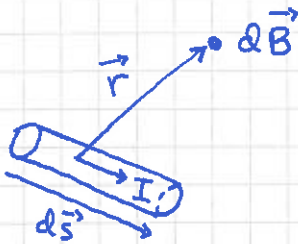


Empirisk lov:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Biot-Savarts lov

Bidraget  $d\vec{B}$  fra "strømelement"  $I \cdot d\vec{s}$ :



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Sammenlign med bidrag  $d\vec{E}$  (til elektrisk f(t)) fra "ladningselement"  $dq$ :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{dq \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (\text{Coulombs lov})$$

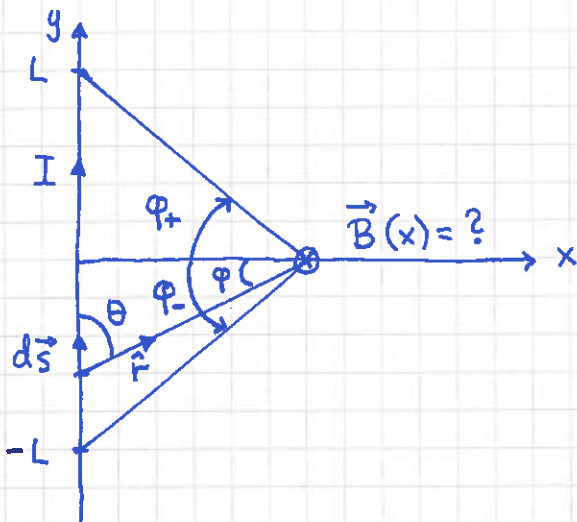
Vakuumpermeabiliteten:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$  (evt.  $\frac{V \cdot s}{A \cdot m}$ )

[Fra s. 89:  $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$ ;  $c =$  lysets hastighed i vakuum]

3 vigtige eksempler følger!

[Mål: Forstå kretselementet spole, jf. s. 62!]

Eksempel 1:  $\vec{B}$  fra rett strømførende leder [TM 27.2; LHL 23.5] [YF 28.3]



Fra figuren:

$$\sin \varphi_+ = L / \sqrt{x^2 + L^2}$$

$$\sin \varphi_- = -L / \sqrt{x^2 + L^2}$$

$$\sin \theta = \frac{x}{r} = \cos \varphi$$

$$\tan \varphi = y/x$$

Bidrag  $d\vec{B}$  fra  $I d\vec{s}$ : 
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$d\vec{s} \times \hat{r} = dy \cdot 1 \cdot \sin \theta \cdot (-\hat{z}) ; \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{x^2}$$

$$y = x \tan \varphi \Rightarrow dy = x \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(x) = \int d\vec{B} = - \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \underbrace{\frac{x d\varphi}{\cos^2 \varphi}}_{dy} \cdot \underbrace{\cos \varphi}_{\sin \theta} \cdot \underbrace{\frac{\cos^2 \varphi}{x^2}}_{1/r^2}$$

$$= - \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi x} \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \cos \varphi d\varphi = - \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi x} \left\{ \sin \varphi_+ - \sin \varphi_- \right\}$$

$$= 2L / \sqrt{x^2 + L^2}$$

$$= - \frac{\mu_0 I L \hat{z}}{2\pi x \sqrt{x^2 + L^2}} \quad (= \text{felt fra langde } 2 \cdot L)$$

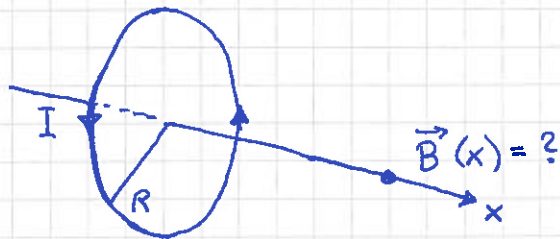
Hvis  $\infty$  lang:  $\sqrt{x^2 + L^2} \approx L$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(x) = - \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{z}}$$

# Eks 2: $\vec{B}$ på aksen til sirkulær strømsløyfe

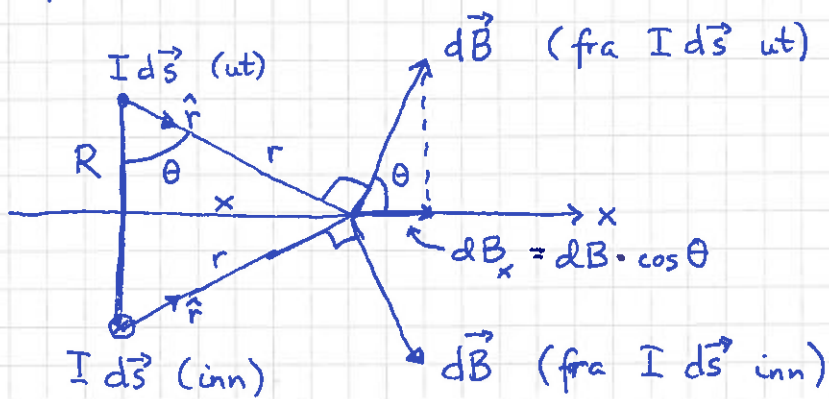
(111)

[TM 27.2; LHL 23.6] [YF 28.5]



- Strøm  $I$  i ring, radius  $R$ , sentrum i origo, ligger i  $yz$ -planet.
- Hva er  $\vec{B}(x)$  på  $x$ -aksen?

Sett fra siden:

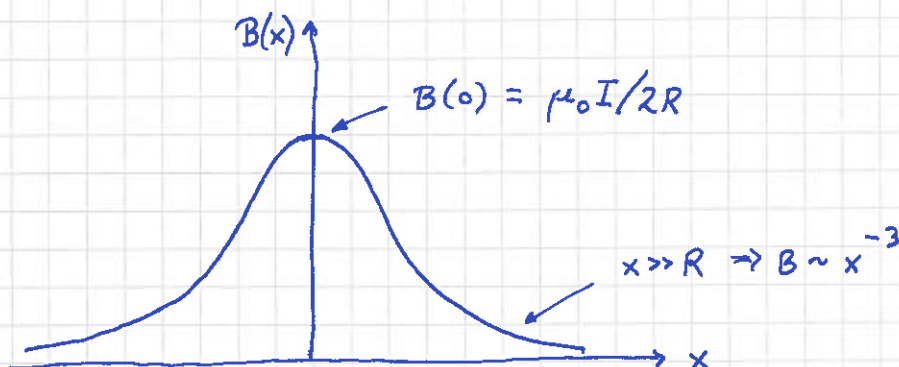


- symmetri  $\Rightarrow \vec{B}(x) = B(x) \hat{x}$  (for alle  $x$ )

$$dB = \left| \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi (x^2 + R^2)} \cdot \underbrace{ds \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2}}_{|d\vec{s} \times \hat{r}|}$$

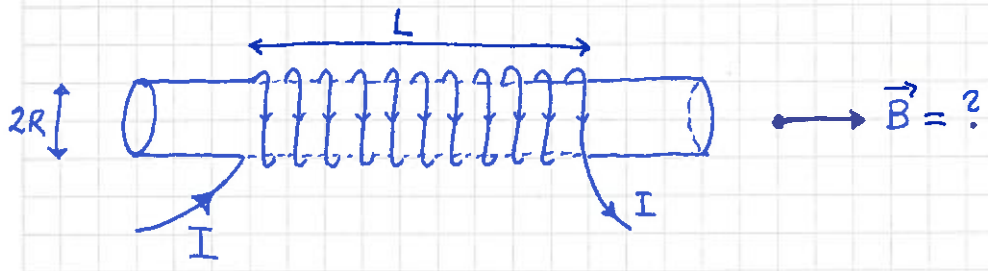
$$\cos \theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{(x^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow B(x) = \int dB_x = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \underbrace{\int ds}_{= 2\pi R} = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$



### Eks 3: $\vec{B}$ på akse til strømførende spole

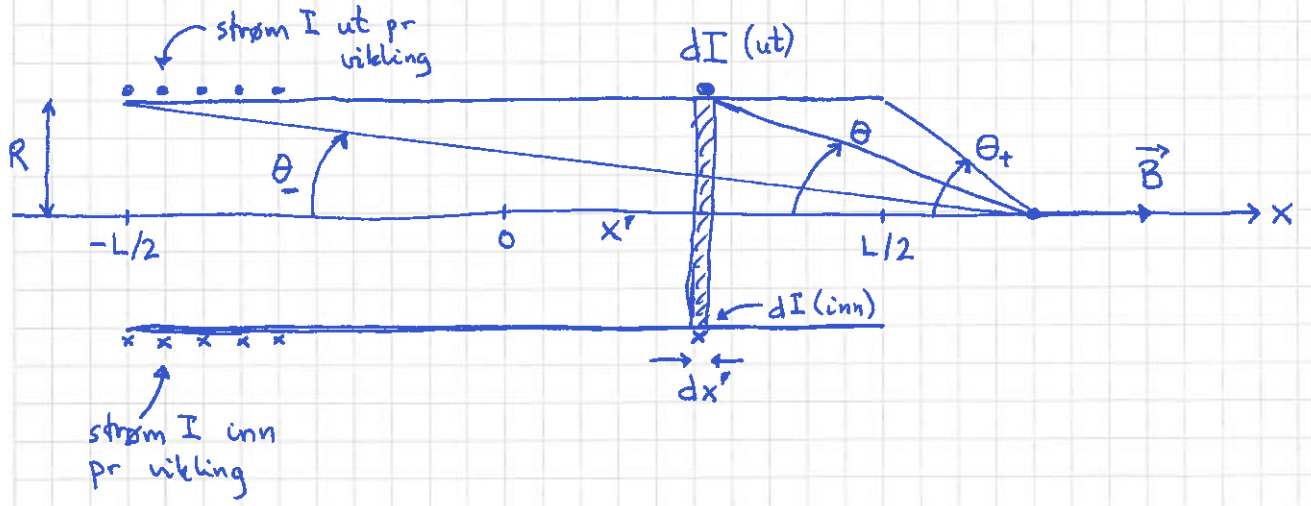
[TM 27.2 ; LHL 23.6] [YF 28.7]



- spole med  $N$  tettliggende viklinger på lengde  $L$  ( $N=11$  i figuren over); vikleingstetthet  $n = N/L$
- hva blir  $\vec{B}$  på spolens akse?

Løsning:

Med tettliggende viklinger kan vi betrakte dette som  $N$  strømførende ringer fordelt på lengden  $L$ :



# viklinger på lengde  $dx'$  =  $dN$  (# betyr her "antall")

#  $L = N$

$$\Rightarrow \frac{dN}{N} = \frac{dx'}{L} \Rightarrow dN = \frac{N}{L} dx' = n \cdot dx'$$

Braker resultatet s. 111 til å skrive ned bidraget  $dB$  fra strøm  $dI$  i ring med bredde  $dx'$  ved  $x'$ :

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot dI \cdot R^2}{2 \{ (x-x')^2 + R^2 \}^{3/2}}$$

Med  $dN$  viklinger på lengden  $dx'$ , med strøm  $I$  i hver vinding, fås:

$$dI = I \cdot dN = I \cdot n \cdot dx' \quad (n = N/L)$$

Dermed:

$$B(x) = \int dB = \frac{\mu_0 I n R^2}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{\{ (x'-x)^2 + R^2 \}^{3/2}}$$

Fra figuren s. 112 ser vi at

$$\cos \theta = \frac{x-x'}{\{ (x-x')^2 + R^2 \}^{1/2}} = \cos \theta_{\pm} \quad \text{for } x' = \mp \frac{L}{2}$$

Og siden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left\{ \frac{y}{\sqrt{y^2+c}} \right\} &= \frac{1}{\sqrt{y^2+c}} + \frac{y \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 2y}{(y^2+c)^{3/2}} = \frac{y^2+c}{(y^2+c)^{3/2}} - \frac{y^2}{(y^2+c)^{3/2}} \\ &= c / (y^2+c)^{3/2}, \end{aligned}$$

er det klart at

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{\{ (x'-x)^2 + R^2 \}^{3/2}} &= \left| \frac{x'-x}{R^2 \sqrt{(x'-x)^2 + R^2}} \right|_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{\frac{L}{2} - x}{R^2 \sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + R^2}} + \frac{\frac{L}{2} + x}{R^2 \sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + R^2}}, \end{aligned} \quad \text{og dermed er}$$

$$B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left\{ \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + R^2}} + \frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + R^2}} \right\}$$

(PUH!)

Alternativt kan vi skrive

$$B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \{ \cos \theta_- - \cos \theta_+ \}$$

Lang spole:  $L \gg R$  (og  $\frac{L}{2} \gg R$ )

- Med  $x$  nær enden av spolen:

Da er enten  $x = L/2$ , dvs  $\theta_- = 0$  og  $\theta_+ = \pi/2$ ,  
eller  $x = -L/2$ , dvs  $\theta_- = \pi/2$  og  $\theta_+ = \pi$ .

I begge tilfeller blir

$$B(|x| \approx \frac{L}{2}) = \underline{\underline{\frac{1}{2} \mu_0 n I}}$$

- Med  $x$  inni spolen og langt unna begge ender:

Da er  $\theta_- = 0$  og  $\theta_+ = \pi$ , slik at

$$\boxed{B = \mu_0 n I} \quad (\text{inni lang spole})$$

Det kan vises (ved å bruke den såkalte Amperes lov, som ikke er pensum her) at

$$B = \mu_0 n I$$

overalt inni en lang spole, dvs ikke bare på spolens akse (men under forutsetning av at det er "dypt" inni spolen, dvs langt unna begge ender)

Dette er vårt hovedresultat, som vi skal bruke som en tilnærming også for "reelle spoler".

På utsiden av en slik lang og tettviklet spole kan vi anta  $B \approx 0$ , da det her er mye svakere enn inni spolen.

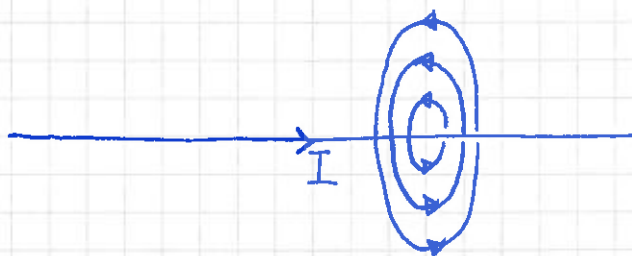
# Feltlinjer for $\vec{B}$ [TM 26.1; LHL 23.1] [YF 27.3]

(115)

Som for  $\vec{E}$  (se s. 71):

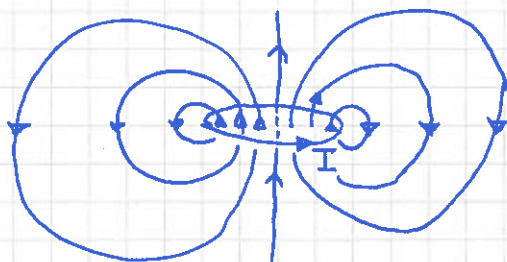
- Retning: Feltlinjene  $\parallel \vec{B}$
- Absoluttverdi:  $|\vec{B}|$  prop. med feltlinjetettheten

Eks 1:  $\vec{B}$  fra lang rett strømførende leder

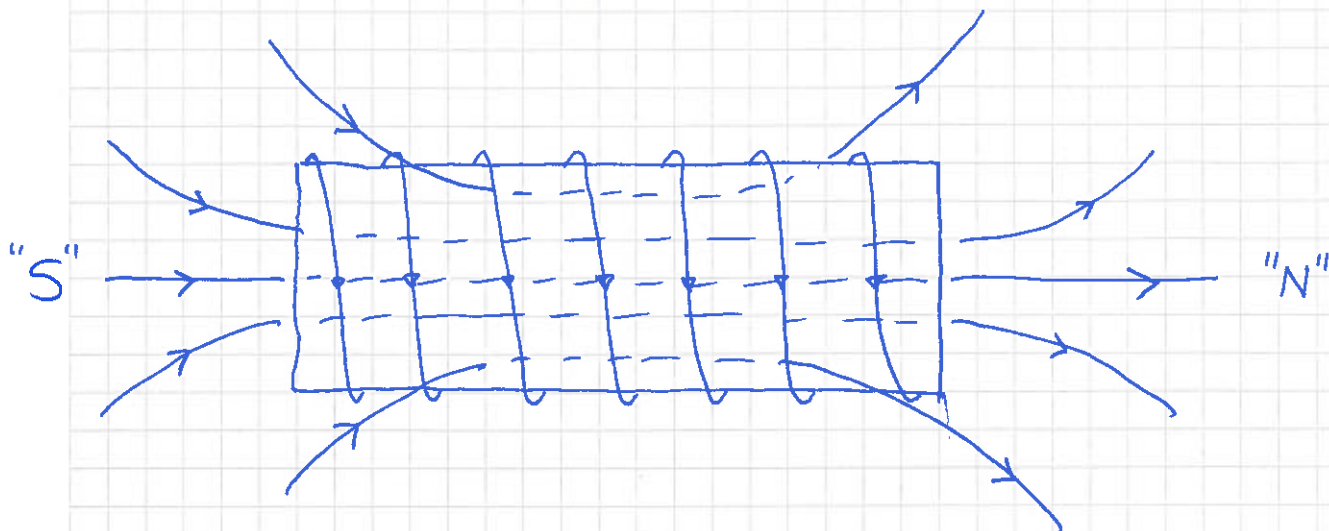


sirkler med sentrum på lederen

Eks 2:  $\vec{B}$  fra strømførende ring



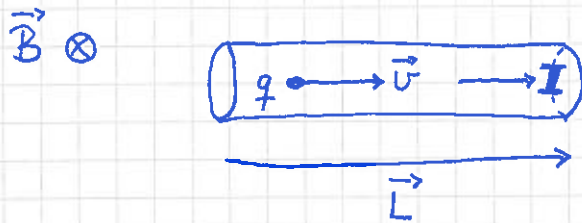
Eks 3:  $\vec{B}$  fra lang, tettviklet spole



MERK: Alltid lukkede feltlinjer for  $\vec{B}$ . [Ingen "magnetisk ledning."]



# Magnetisk kraft på elektrisk strøm [TM 26.1; LHL 23.2] [YF 27.6]



Bit av strømførende leder,  
 N frie ladninger  $q$  med  
 driftshastighet  $\vec{v}$ , lengde  $L$

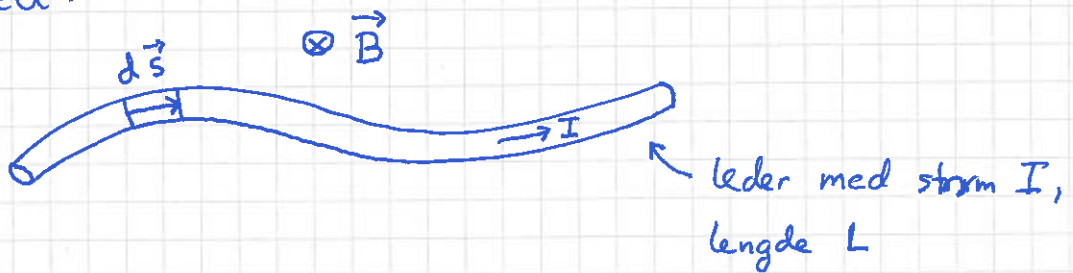
Kraft på de  $N$  frie ldn:  $\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B}$

Strøm i ledaren:  $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Nq}{L/v} \Rightarrow \frac{Nqv}{L}$

$\Rightarrow I\vec{L} = Nq\vec{v}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}}$

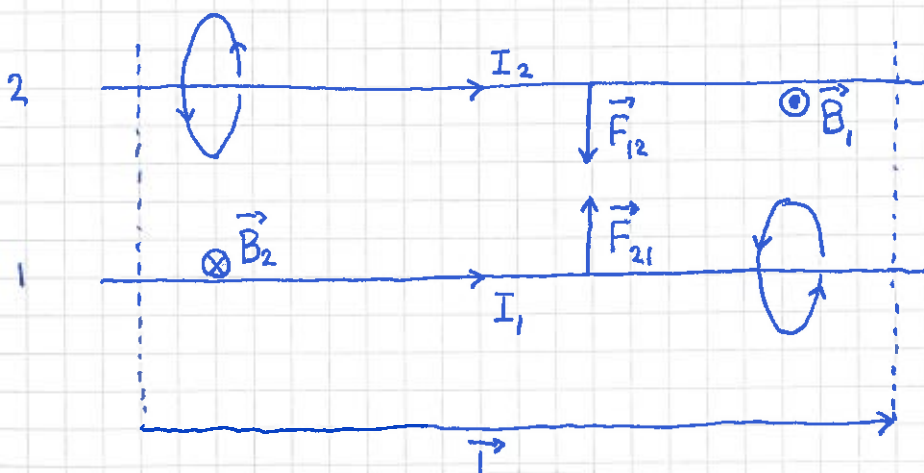
Generelt:



Kraft på  $d\vec{s}$ :  $d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$

$\Rightarrow$  Total kraft på lengde  $L$ :  $\boxed{\vec{F} = \int_L d\vec{F} = I \int_L d\vec{s} \times \vec{B}}$

## Eks: Kraft mellom to parallelle strømførende ledere [TM 27.2 ; LHL 23.5] [YF 28.4]



Magnetfelt fra 2 ved 1:  $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x}$  (inn i planet)

———— " ———— 1 ved 2:  $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$  (ut av planet)

Kraft på lengde  $\vec{L}$  av 1:  $\vec{F}_{21} = I_1 \vec{L} \times \vec{B}_2$ ;  $F_{21} = L \cdot \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi x$

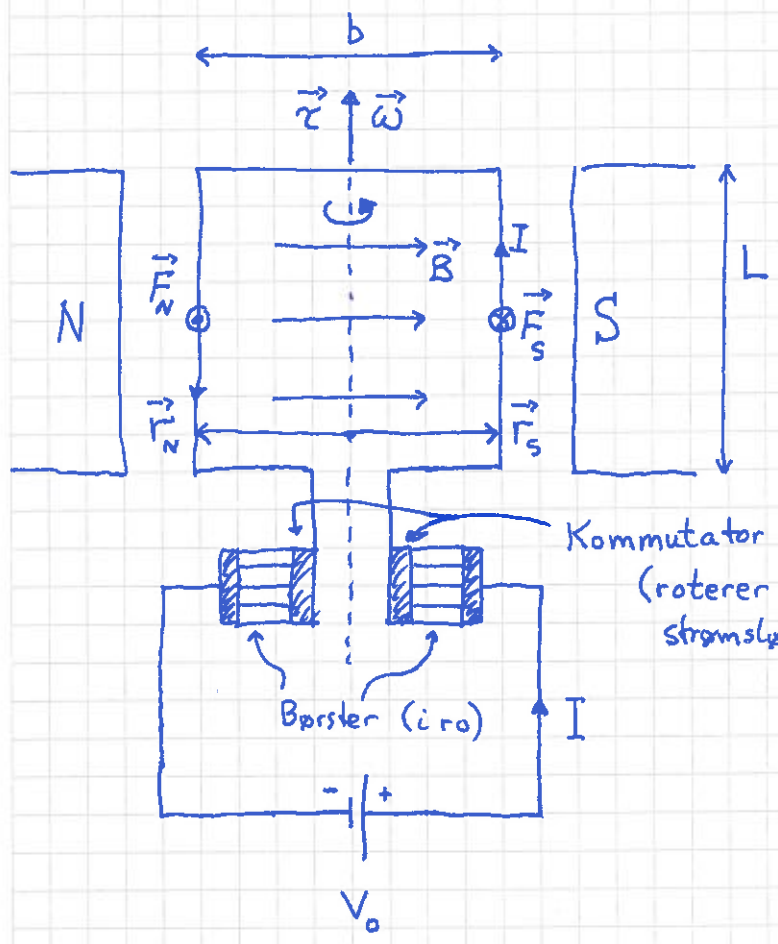
———— " ———— 2:  $\vec{F}_{12} = I_2 \vec{L} \times \vec{B}_1$ ;  $F_{12} = L \cdot \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi x = F_{21}$

Kraft pr lengdeenhet:

$$f_{21} = F_{21} / L = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} = F_{12} / L = f_{12}$$

Hvis  $I_1 \parallel I_2$ : Tiltrekning; Hvis  $I_1 \parallel -I_2$ : Frastøtning

Eks: Likestrømsmotor, prinsipp [TM 26.3; LHL 23.3] [YF 27.8]



$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

$$F_s = ILB \text{ (inn)}$$

$$F_n = ILB \text{ (ut)}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau_s = \frac{b}{2} ILB \sin\phi \text{ (opp)}$$

$$\tau_n = \text{————} \text{ (opp)}$$

( $\phi$  = vinkel mellom  $\vec{r}$  og  $\vec{F}$ ; i figuren er  $\phi = 90^\circ$ )

$$\Rightarrow \tau = \tau_s + \tau_n = IAB \sin\phi$$

med  $A = b \cdot L = \text{sløyfas areal}$

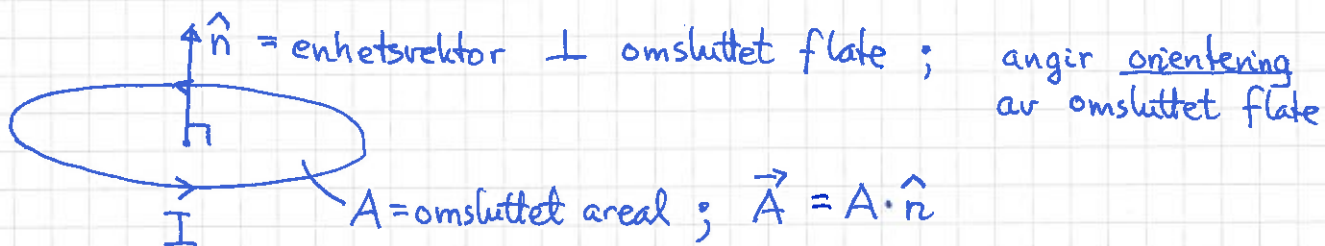
(DC spenningskilde)

# Magnetiske dipoler og dipolmoment [TM 26.3; LHL 23.3, 26.2]

(118)

[YF 27.7]

Strømsløyfe = Magnetisk dipol



H.h.regel: 4 fingre i strømmens retning gir  $\hat{n}$  i tommelens retning.

Sløyfas magnetiske dipolmoment er:

$$\vec{m} \stackrel{\text{def}}{=} IA \hat{n} = I \vec{A}$$

[Notasjon i TM:  $\vec{m} \rightarrow \vec{\mu}$ ]

Enhet:  $[m] = A \cdot m^2$

Generell def:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j} dV ; \vec{j} = \text{strømtetthet}, dV = \text{volumenelement}$$

Sammenligning med elektrostatikk: (se s. 72)

A diagram of an electric dipole. Two points are shown:  $-q$  on the left and  $q$  on the right. A horizontal arrow labeled  $\vec{d}$  points from  $-q$  to  $q$ . To the right of the diagram, text reads:  $\vec{p} = q\vec{d} = \text{elektrisk dipolmoment}$ .

Generell def:  $\vec{p} = \int \vec{r} dq = \int \vec{r} \rho dV ; \rho = \text{ladn. tetthet}$

I de generelle def av  $\vec{m}$  og  $\vec{p}$  skal det integreres over alle steder der hvor  $\vec{j}$  og  $\rho$  er forskjellig fra null.

# Materiales magnetiske egenskaper

(med ref. til elektriske egenskaper, s. 86-89 + s. 72-74)

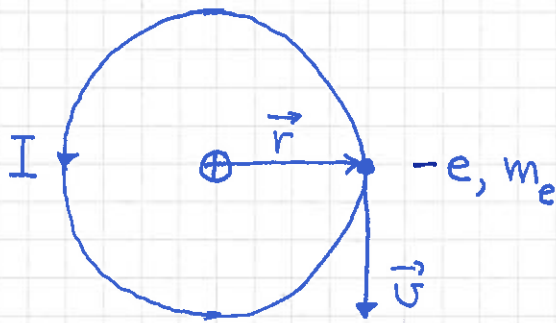
[TM 27.5;

LHL 26]

(119)

[YF 28.8]

Atom (forenklet modell):



$$v = 2\pi r / T$$

$$\Rightarrow I = \frac{e}{T} = \frac{e \cdot v}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow m = IA = \frac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} e v r$$



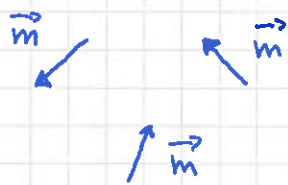
Atom = kjerne + elektron(er) = liken magnetisk dipol,

noen med  $\vec{m} \neq 0$ , andre med  $\vec{m} = 0$ .

[s. 72: noen molekylar har  $\vec{p} \neq 0$ , andre har  $\vec{p} = 0$ . ( $H_2O$  vs  $O_2$ , f.eks.)]

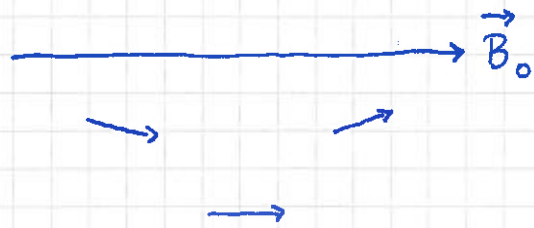
$\Rightarrow$  Materialer kan magnetiseres av ytre felt  $\vec{B}_0$ : [ref. s. 86]

$$B_0 = 0:$$



$$\sum_i \vec{m}_i \approx 0$$

$$\vec{B}_0 \neq 0:$$



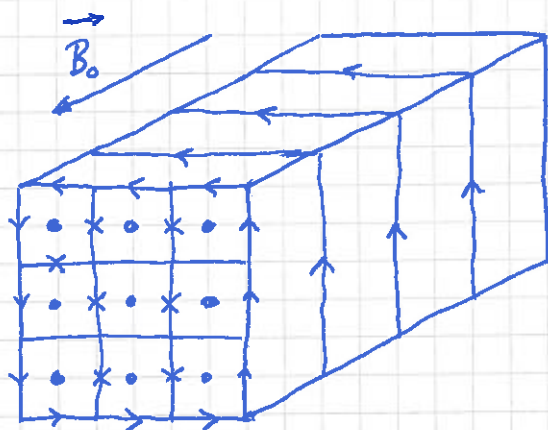
$$\sum_i \vec{m}_i \neq 0$$

Øving 13:  $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$ ,  $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$

[Ref. øving 9:  $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0$ ,  $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$ ]

Netto makroskopisk effekt av ytre felt  $\vec{B}_0$ :

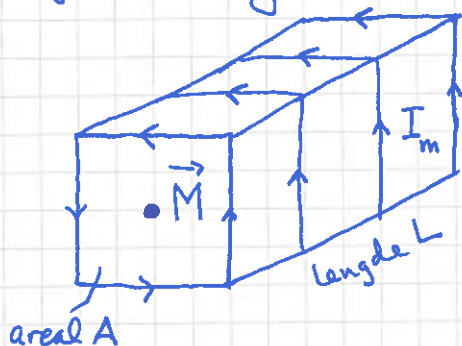
(120)



[ref. s. 86]

- innretting av  $\vec{m}$  langs  $\vec{B}_0$
- alle indre atomære strømmer kansellerer
- induert strøm på overflaten:  $I_m$
- før styrket feltet inni materialet:  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$

Magnetisering  $\vec{M}$ : [ref. s. 87: Polarisering  $\vec{P}$ ]



$\vec{M} \stackrel{\text{def}}{=} \text{magn. dipolmoment pr volumenet}$ :

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V}$$

$I_m = \text{indusert overflatestrøm på lengde } L$

$i_m = I_m / L = \text{overflatestrøm pr lengdeenhet}$

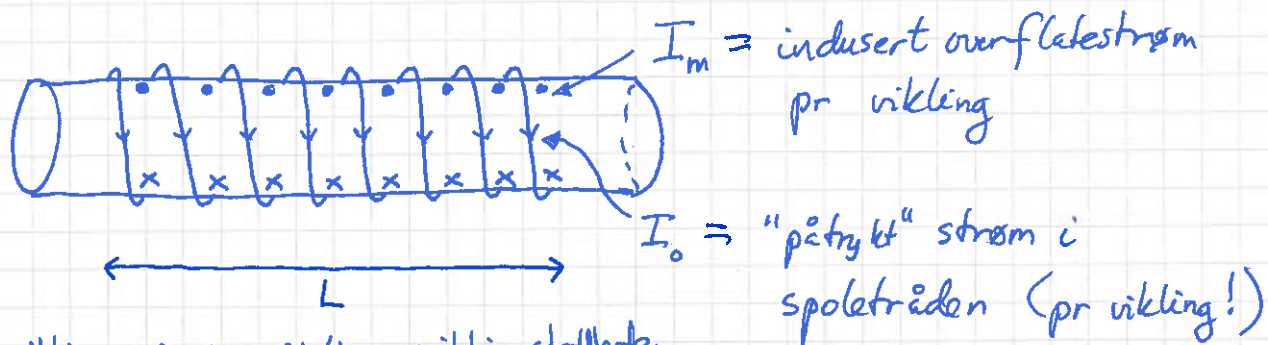
$$m = I_m \cdot A$$

$$\Rightarrow M = m/V = \frac{I_m \cdot A}{L \cdot A} = \frac{I_m}{L} = i_m$$

Dvs:  $M = |\vec{M}| = i_m = \text{indusert overflatestrøm pr lengdeenhet}$

[Jf  $P = \sigma_i = \text{ind. overfl. ldn. pr flateenhet, s. 87}$ ]

Indusert magnetfelt  $\vec{B}_m$  :



$N$  vindinger ;  $n = N/L =$  vindingstettheden

$\Rightarrow$  Totalt magnetfelt inni spolen :

$$\vec{B} = \mu_0 n I = \mu_0 n (I_0 + I_m)$$

Her har vi  $M = i_m = \frac{N \cdot I_m}{L} = n \cdot I_m$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 n I_0 + \mu_0 n I_m$$

$$= \vec{B}_0 + \mu_0 M$$

dvs

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

Lineær respons : [ref. s. 88]

$$\vec{M} = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \cdot \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \quad [\text{jf. } \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}]$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{B} \left\{ 1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \right\} = \vec{B}_0 \Rightarrow \vec{B} = (1 + \chi_m) \vec{B}_0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= \frac{1}{1 + \chi_m}}$

Her er

$\chi_m =$  magnetisk susceptibilitet,

og

$1 + \chi_m \equiv \mu_r =$  relativ magnetisk permeabilitet

[jf.  $1 + \chi_e \equiv \epsilon_r =$  relativ permittivitet]

Dermed:

$$\vec{B} = \mu_r \vec{B}_0 \quad ; \quad \text{jf.} \quad \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_0$$

Dus:

Styrket  $\vec{B}$ -felt pga  $\vec{M}$  (vel å merke: hvis  $\chi_m > 0$ )

Svekket  $\vec{E}$ -felt pga  $\vec{P}$

[Se også nederst side 124!]

Ulike typer magnetisme:

## 1. Paramagnetisme

Atomer med permanent  $\vec{m} \neq 0$ , men "uorden" uten ytre felt  $\Rightarrow \vec{M} = 0$  uten ytre felt.

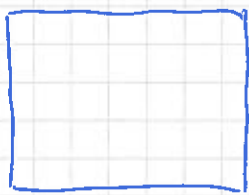
Svak innretning i ytre felt;  $\chi_m > 0$  men liten.

Eks: Al, Mg, ...

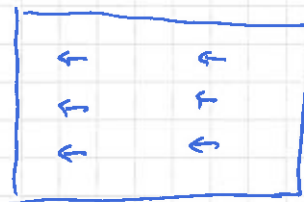
## 2. Diamagnetisme

Ytre  $\vec{B}_0 \Rightarrow$  endret banebevegelse for elektronene  $\Rightarrow$  induisert  $\vec{m}$  motsatt rettet  $\vec{B}_0$  [a la Lenz' lov!]

Målbart kun hvis  $\vec{m}_{atom} = 0$  i null ytre felt.



$B_0 = 0; M = 0$



$\vec{B}_0$   
 $\vec{M}$

Dvs:  $\chi_m < 0$  (men svært liten)

[Unntak: Superledere, da er  $\chi_m < 0$  og slik at  $\vec{B} = 0$  inni superlederen]

## 3. Ferromagnetisme

Vekselvirkende  $\vec{m}_i$ :

Hvis  $\vec{m}_i$  "opp", ønsker også  $\vec{m}_{i\pm 1}$  å peke opp!

$\Rightarrow$   $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \dots$  Ferromagnet

eller  $\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \dots$  Antiferromagnet



Stor  $\chi_m$  for ferromagneter.

(124)

Tallverdier :

Diamagn:  $\chi_m \sim -10^{-5}$

Paramagn:  $\chi_m \sim 10^{-4}$

Ferromagn:  $\chi_m \sim 10^3 - 10^4$

$\Rightarrow$  Kun ferromagn. materialer regnes som magnetiske !

Eks: Fe, Co, Ni, ...

---

Et par ekstra kommentarer vedrørende lineær respons og totalt felt inni spole fylt med magnetisk materiale :

Siden  $B = B_0 + B_m$ , har vi også  $B_m = B - B_0 = \mu_r B_0 - B_0 = (\mu_r - 1) B_0 = \chi_m B_0$

Dermed er:  $\mu_0 n I_m = \chi_m \mu_0 n I_0$ , dvs  $I_m = \chi_m I_0 = (\mu_r - 1) I_0$

Totalt felt inni spolen kan derfor skrives slik:

$$B = \mu_0 n I_0 + \mu_0 n I_m = \mu_0 n I_0 + \mu_0 n (\mu_r - 1) I_0 = \mu_0 \mu_r n I_0$$

Hvis vi nå definerer  $\mu \equiv \mu_0 \mu_r =$  materialets permeabilitet, så

blir:  $B = \mu n I_0$ . Dette kan med fordel sammenlignes

med nest siste kulepunkt s. 88, der elektrisk felt mellom to

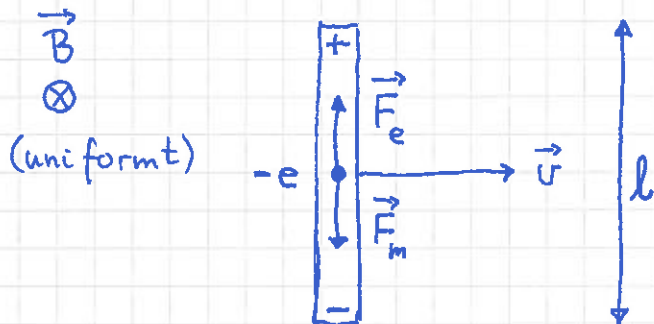
store motsatt ladde plater ( $\pm \sigma_0$  pr flatenhet) blir  $E = \sigma_0 / \epsilon$  når

rommet mellom platene er fylt med et dielektrikum med perm.  $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ .

# ELEKTRODYNAMIKK [TM 28,29; LHL 24,25,27] [YF 29-31] (125)

## Faradays induksjonslov [TM 28.2+4; LHL 24.1] [YF 29.1+2+4]

Leder i bevegelse i  $\vec{B}$ -felt:



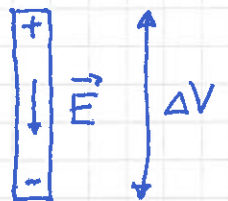
Magn. kraft  $\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}$  på frie elektroner i lederen

⇒ Indusert ladning på endene

⇒ — " — el. felt  $\vec{E}$  i lederen

⇒ — " — el. kraft  $\vec{F}_e = -e\vec{E}$  på elektronene

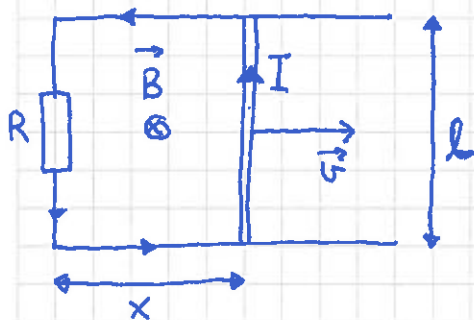
⇒ — " — spenning  $\Delta V = E \cdot l$  i lederen



Likevekt når  $\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0 \Rightarrow eE = evB \Rightarrow E = vB$

$$\Rightarrow \underline{\Delta V} = E \cdot l = \underline{vBl}$$

Lag lukket krets ⇒ strøm  $I$  : [TM 29.1; LHL 23.7] [YF 27.3]



Magnetisk fluks gjennom areal

$A = l \cdot x$  omsluttet av lukket krets:

$$\Phi = B \cdot A = Blx$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{d\Phi}{dt}} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv = \underline{\Delta V}$$

som er Faradays lov

[Generelt:  $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$   
 $d\vec{A} = dA \cdot \hat{n}$ ]

Diagram showing a surface  $S$  with a vector  $\vec{B}$  and a differential area element  $d\vec{A}$ .

Egentlig:

$$\Delta V = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Lenz' lov

# Lenz' lov [TM 28.3; LHL 24.1] [YF 29.3]

Fortegn (retning) på  $\Delta V$  er slik at

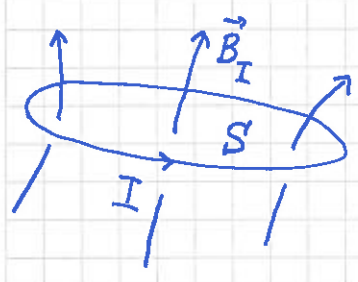
$\Delta V \Rightarrow I \Rightarrow \vec{B}_I \Rightarrow \Phi_I = \int_S \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$  (gjennom flaten  $S$  som omslutes av kretsen) slik at  $-\dot{\Phi}_I$  motvirker påtvinget endring  $\Delta\Phi$  (der  $-\Delta\Phi$  skapte  $\Delta V$  i utgangspunktet)

Kortversjon: Naturen motarbeider påtvingne endringer.

# Induktans [TM 28.6; LHL 25.1] [YF 30.2]

(selvinduktans)

$I \Rightarrow \vec{B}_I \Rightarrow$  fluks gjennom sløyfa :



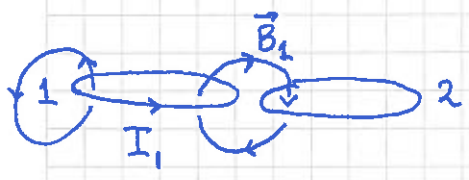
$$\Phi = \int_S \vec{B}_I \cdot d\vec{A} = \int_S \left\{ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \right\} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{B}_I \cdot d\vec{A} \quad (\text{Biot-Savart, s. 109})$$

$$\Rightarrow \Phi = L \cdot I$$

der  $L \stackrel{\text{def}}{=} \Phi / I =$  sløyfas (selv-)induktans

Enhet:  $[L] = T \cdot m^2 / A \equiv H$  (henry)

[Gjensidig induktans (idea pensum):



$I_1 \Rightarrow \vec{B}_1 \Rightarrow$  fluks  $\Phi_2$  gjennom sløyfe 2

$M_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_2 / I_1 =$  sløyferes gjensidige induktans

Anvendelse: Transformator etc. ]

(Selv-) Induksjon:

$$\dot{I} \neq 0 \Rightarrow \dot{\Phi} \neq 0 \Rightarrow \Delta V = -\dot{\Phi} = -L \dot{I}$$

Som kretselement:



$$\Delta V = -L \frac{dI}{dt}$$

Med Lenz' lov:



Eks: Lang spole,  $N=500$  vikt. på lengde  $l=10$  cm, tverrsnitt  $A=5$  cm<sup>2</sup>. Hva er spolens induktans  $L$ , (a) luftfylt; (b) jernkjerne med  $\mu_r = 1000$ .

Løsning:

$$B = \mu n I = \mu \frac{NI}{l}$$

$$\text{Total omsluttet fluks: } \Phi = NBA = \frac{\mu N^2 A}{l} \cdot I$$

$$\Rightarrow \underline{L = \mu N^2 A / l}$$

$$(a) \text{ Luftfylt: } L = \mu_0 N^2 A / l = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} / 0.10 = \underline{\underline{1.6 \text{ mH}}}$$

$$(b) \text{ Jernkjerne: } L = \mu_r \mu_0 N^2 A / l = 1000 \cdot 1.6 \text{ mH} = \underline{\underline{1.6 \text{ H}}}$$

Spm: Hvis spoletråden er av kobber, med tverrsnitt  $0.1$  mm<sup>2</sup>, hvor stor blir da spolens resistans? (Se s.94-96.)

Bruk bok eller google til å finne resistiviteten til kobber.

# Energi lagret i magnetfelt [TM 28.7; LHL 25.3] [YF 30.3] (128)



Påkrevd arbeid/energi for å øke strømmen fra  $i$  til  $i+di$ :

$$dW = P \cdot dt = -v \cdot i dt = L \frac{di}{dt} i dt = L i di$$

↑  
arbeid mot industert  $v$

For å øke fra  $i=0$  til  $i=I$ :

$$W = \int dW = \int_0^I L i di = \underline{\underline{\frac{1}{2} L I^2}}$$

dvs:  $U = \frac{1}{2} L I^2 =$  energi lagret i spolen

Anta lang spole, lengde  $l$ , tverrsnitt  $A$ ,  $N$  viklinger:

$$B = \mu_0 n I$$

$$\phi = N A B = N A \frac{\mu_0 N}{l} I = L I$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} L I \cdot I = \frac{1}{2} \cdot N A B \cdot \frac{B}{\mu_0 n} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot \underbrace{(A l)}_{\text{volumet inni spolen (der } B \neq 0)}$$

$\Rightarrow$  Energi pr volumenhet i magnetfelt er:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Fra før (s.92): Energi pr volumenhet i elektrisk felt:  $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

Dermed: Total energi pr volumenhet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

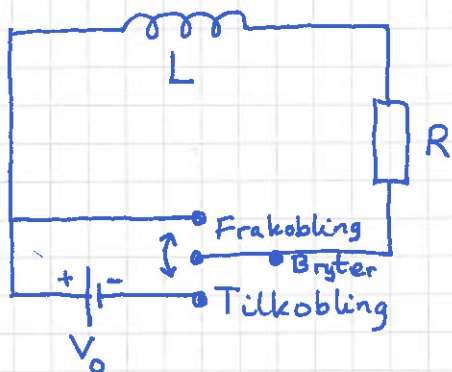
# Elektriske kretser; DC og AC; R, L og C

(129)

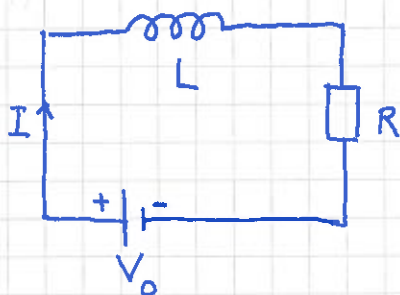
[TM 28.8, 29.1+2+4+6; LHL 25.2, 27.1+2+3+5] [YF 30.4+5+6, 31.5]

① RL-krets; DC

[DC = direct current = likestrøm]



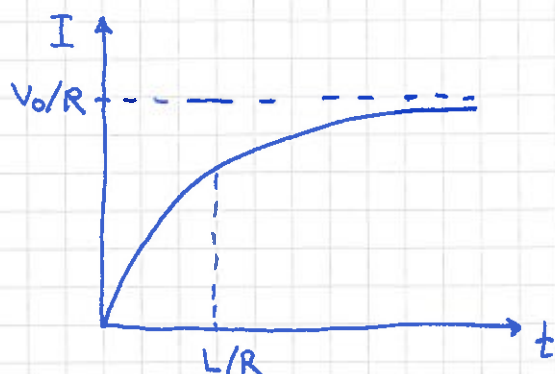
(a) Tilkobling af  $V_0$  ved  $t=0$ :



$$K2 \Rightarrow V_0 - L \frac{dI}{dt} - RI = 0$$

Samme ligning, her for  $I$ , som for  $Q$  i RC-krets s 102, da med  $Q(0)=0$ , her med  $I(0)=0 \Rightarrow$  Samme løsning!

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} \left( 1 - e^{-R \cdot t / L} \right)$$



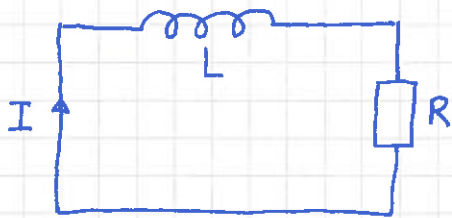
RL-kretsens tidskonstant:

$$\tau = L/R$$

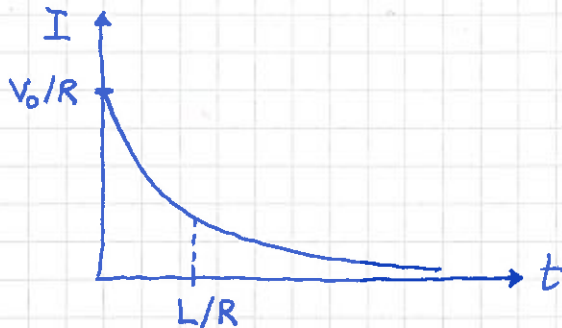
[Hf.  $\tau = RC$  for RC-krets]

(b) Frakobling av  $V_0$  (etter lang tid  $\hat{=}$  nytt  $t=0$ ):

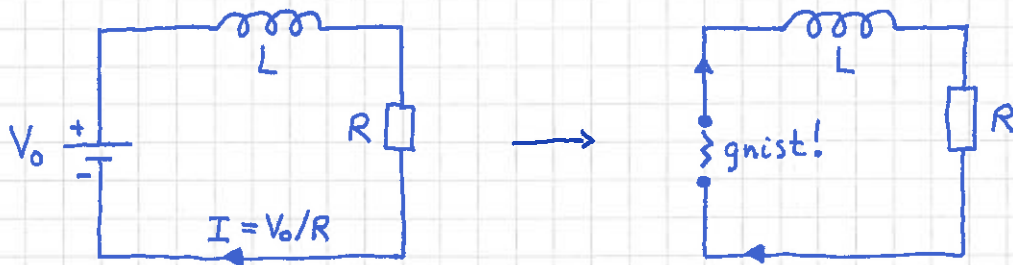
(130)



$$K2 \Rightarrow -L \frac{dI}{dt} - RI = 0; I(0) = \frac{V_0}{R}$$
$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}; \tau = L/R$$



(c) "Dra ut støpselet"



Strøm  $I$  raskt fra  $V_0/R$  til 0

$\Rightarrow$  stor  $|\frac{dI}{dt}| \Rightarrow$  stor induisert spenning  $|L \frac{dI}{dt}|$

(selv med liten  $L$ )  $\Rightarrow$  kortvarig strøm over luftgapet

(selv om motstanden der er stor)  $\Rightarrow$  gnist! ("overslag")

# AC-kretser [AC = alternating current = vekselstrøm] (31)

AC spenningskilde:



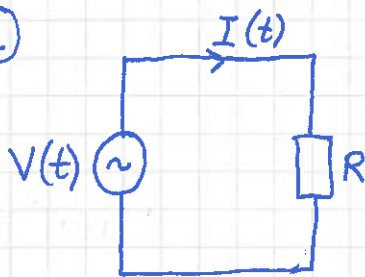
$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$\text{Frekvens: } f = \frac{\omega}{2\pi}$$

[Strømmetallet her:  $f = 50 \text{ Hz}$ ]

$$[V_0 = 311 \text{ V}; V_{\text{rms}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = 220 \text{ V}]$$

(2)



$$K2 \Rightarrow V_0 \cos \omega t - RI(t) = 0$$

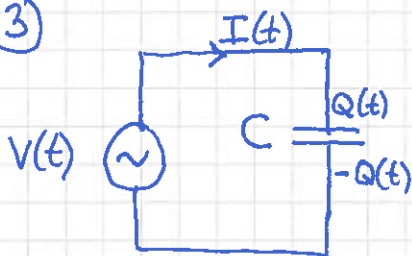
$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t$$

Dvs  $V(t)$  og  $I(t)$  svinger i fase.

Strømmens amplitude:  $I_0 = V_0 / R$

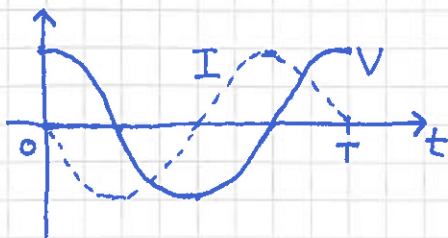
(uavh. av  $\omega$ )

(3)



$$K2 \Rightarrow V_0 \cos \omega t - \frac{Q(t)}{C} = 0 \Rightarrow Q(t) = V_0 C \cos \omega t \quad [V(t) \text{ og } Q(t) \text{ i fase}]$$

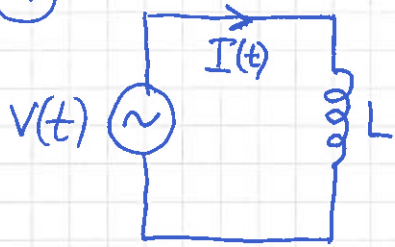
$$\Rightarrow I(t) = dQ(t)/dt = -V_0 \omega C \sin \omega t = V_0 \omega C \cos(\omega t + \pi/2)$$



Dvs faseforskjell  $\pi/2$  mellom  $V(t)$  og  $I(t)$ ;  $I_0(\omega) = V_0 \omega C$   
øker med økende frekvens

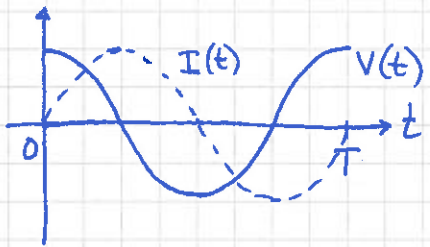


④



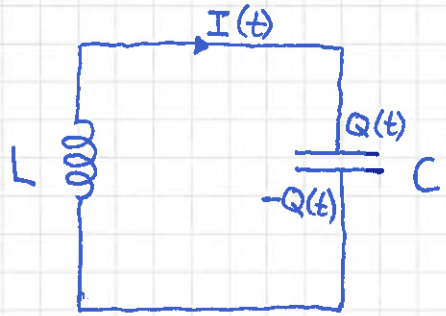
$$K2 \Rightarrow V_0 \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{V_0}{\omega L} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$



Der faseforskjell  $-\pi/2$  mellom  $V(t)$  og  $I(t)$ ;  $I_0(\omega) = V_0/\omega L$   
 avtar med økende frekvens

⑤ LC-krets

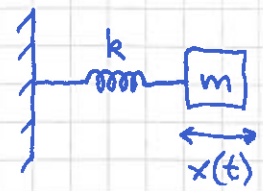


Anta (f.eks.)  $Q(0) = Q_0$ ,  
 dvs  $V_c(0) = Q_0/C =$  spenning over  
 C ved  $t=0$ .

$$K2 \Rightarrow -L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \quad ; \quad I(t) = dQ/dt$$

$$\Rightarrow \ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Enkel harmonisk oscilator, se s. 22  $\rightarrow$ :



$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$x(t) = x(0) \cos \omega_0 t \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{k/m} \quad ; \quad x(0) = x_0$$

$$E = K + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 = \text{konst.} \quad (s. 24)$$

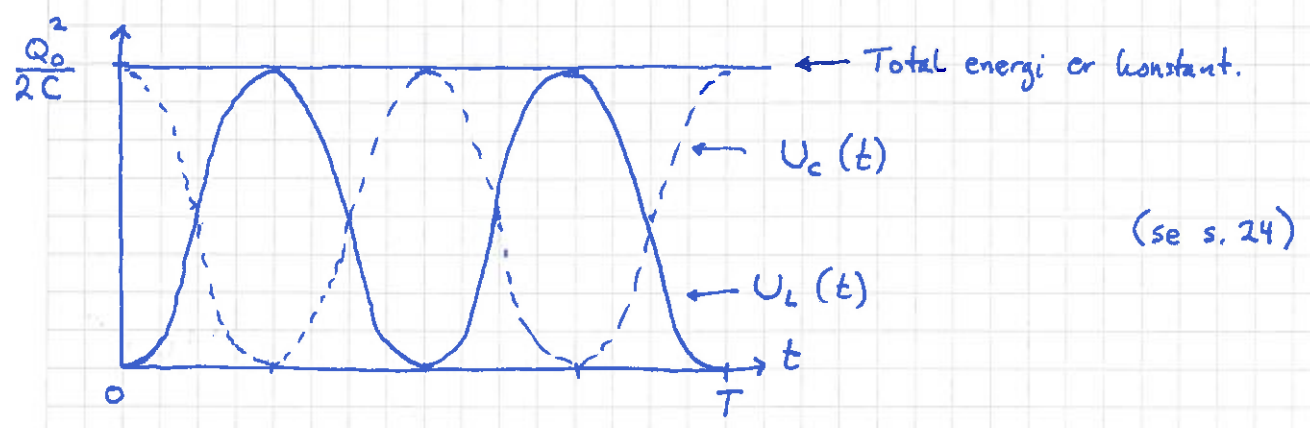
Analoge størrelser i LC-kretsen (se s. 27B) :

$Q \leftrightarrow x, I \leftrightarrow \dot{x}, L \leftrightarrow m, 1/C \leftrightarrow k, Q_0 \leftrightarrow x_0,$   
 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{k/m}$

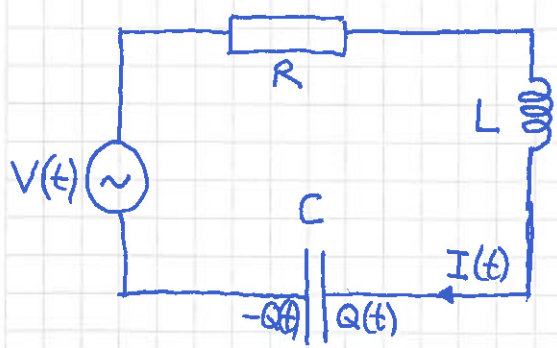
$\Rightarrow Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t, I(t) = -\omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t$

$U_C = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t$  (s. 92)

$U_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_0^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2 \omega_0 t$

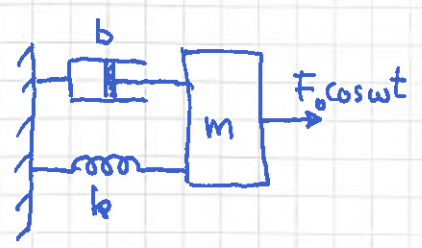


⑥ RLC resonanskrets [se s. 26-27B] [og LAB!]



$V(t) = V_0 \cos \omega t$   
 $K2: V(t) - RI - L\dot{I} - Q/C = 0$   
 $\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \cos \omega t$

Mekanisk analogi:



$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$   
 $\Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$   
 (dvs  $b \leftrightarrow R$ )

Fant for mekanisk system:

$$x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{med } A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\gamma = b/m$$

Dermed:

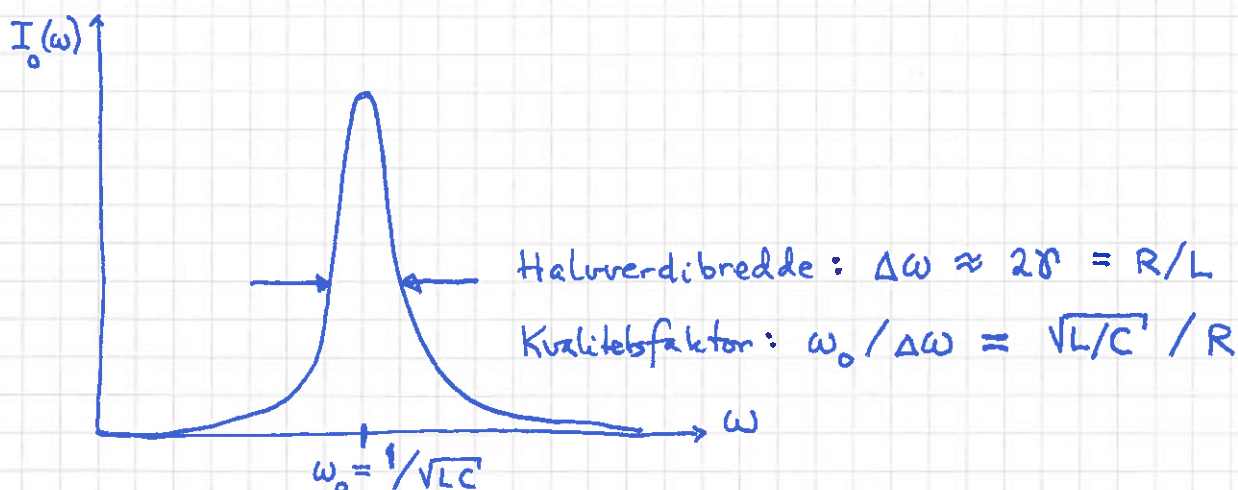
$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{med } Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\gamma = R/L$$

$$\text{Dvs: } I(t) = \dot{Q}(t) = \omega Q_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi) = I_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

med strøamplitude

$$I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega) = \frac{\omega V_0/L}{\sqrt{(\omega^2 - \frac{1}{LC})^2 + (R\omega/L)^2}}$$



Kan nå måle  $I_0(\omega)$  ved å måle spenningen  $V_R$  over motstanden:

$$I(t) = V_R(t)/R = V_{R_0}(\omega) \cos(\omega t + \varphi) / R, \quad \text{dvs } I_0(\omega) = V_{R_0}(\omega) / R.$$