Når $S(\varphi) = S_{min}(\varphi)$, er $df = \mu\, dN$ med retning som i figuren.

Når $S(\varphi) = S_{max}(\varphi)$, er $df = \mu\, dN$ med motsatt retning

Lodd i ro $\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i = 0$ (N1)

$$\Rightarrow \vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$$

Dekomponerer:

Tangentielt: $S(\alpha+d\alpha)\cos\frac{d\alpha}{2} - S(\alpha)\cos\frac{d\alpha}{2} \pm df = 0$

Normalt: $S(\alpha+d\alpha)\sin\frac{d\alpha}{2} + S(\alpha)\sin\frac{d\alpha}{2} - dN = 0$

Når $d\alpha \ll 1$ ("$d\alpha \to 0$"), har vi

$$\cos\frac{d\alpha}{2} \approx 1 \quad \text{og} \quad \sin\frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

Dermed:

Tangentielt: $S(\alpha+d\alpha) - S(\alpha) \pm \mu\, dN = 0$

Normalt: $\left[S(\alpha+d\alpha) + S(\alpha)\right] \cdot \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$

Vi har: $S(\alpha+d\alpha) - S(\alpha) = dS$

$$S(\alpha+d\alpha) + S(\alpha) \approx 2S$$

Dermed:

Tangentielt: $dS = \mp \mu\, dN$

Normalt: $S \cdot d\alpha = dN$

Dividerer disse med hverandre:

$$\frac{dS}{S \cdot d\alpha} = \mp \mu \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{S} = \mp \mu\, d\alpha$$

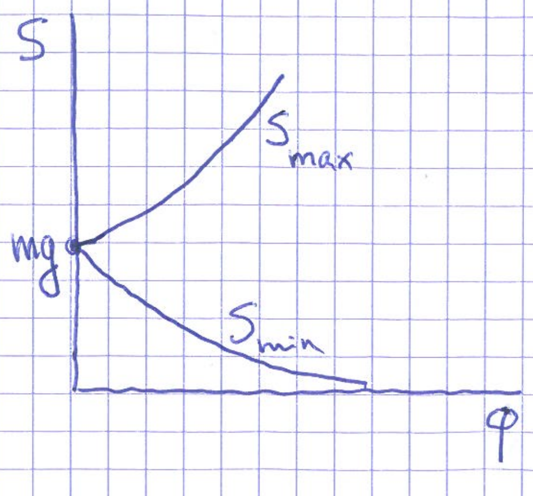
Integrasjon gir:

$$\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = \mp \int_0^{\varphi} \mu\, d\alpha$$

$$\Rightarrow \ln S(\varphi) - \ln S(0) = \mp \mu\varphi$$

$$\Rightarrow S(\varphi) = S(0)\, e^{\mp \mu\varphi} \quad ; \quad S(0) = mg$$

Dvs: $S_{min}(\varphi) = mg \cdot e^{-\mu\varphi}$; $S_{max}(\varphi) = mg \cdot e^{\mu\varphi}$



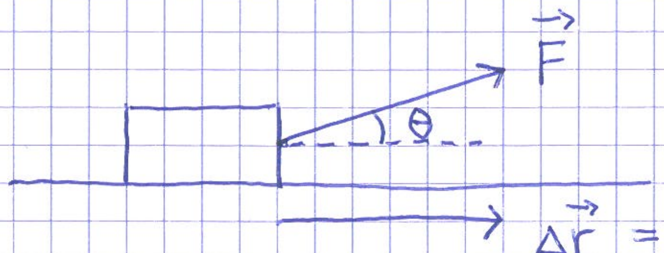
Talleksempel: $\mu = 0.2$ og 2.25 omdreininger, dvs $\varphi = 9\pi/2$ gir

$S_{min} \approx 0.06\, mg$

$S_{max} \approx 17\, mg$

Arbeid og energi [YF 6,7 ; LL 4]

Arbeid [YF 6.1–6.3 ; LL 4.1]

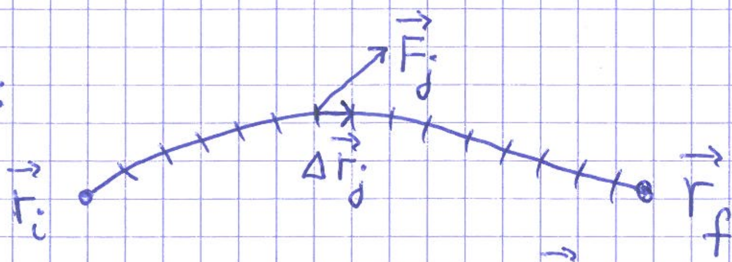


$\Delta\vec{r}$ = legemets forflytning

$\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F\cdot\Delta r\cdot\cos\theta$ = arbeid utført av ytre kraft $\vec{F}$ på legemet

$[W] = N\cdot m = J$ (joule)

Generelt:



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j\cdot\Delta\vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \to 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ ved forflytning fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_j$

Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

effekt = arbeid (evt. energi) pr tidsenhet

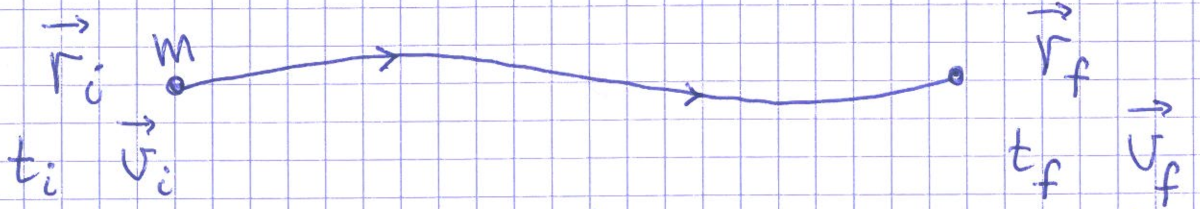
$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot d\vec{r}/dt = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$[P] = J/s = W$ (watt)

Eks: Hva er $\langle P \rangle$ på en hybel som bruker 4 MWh el.energi pr år?

Løsn: $\langle P \rangle = 4 \cdot 10^6 \,\text{Wh} / [365 \cdot 24\,\text{h}] = 457\,\text{W} \approx \underline{\underline{0{,}5\,\text{kW}}}$

Kinetisk energi [YF 6.2; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{N2}{=} \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt = m \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

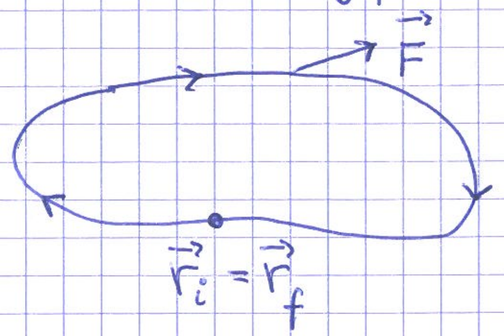
Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2} m v^2$

Dermed: $\boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$

Arbeid W utført på legemet tilsvarer endringen ΔK i legemets kinetiske energi.

Konservativ kraft [YF 7.3; LL 4.4]

Et system som ikke taper mekanisk energi til andre energiformer (f.eks. varme) er konservativt



Hvis $\vec{F}$ er konservativ,

er $K_f = K_i$ (dvs $|\vec{v}_f| = |\vec{v}_i|$);

dvs $W = \Delta K = 0.$

$$\Rightarrow \boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$ Konservativ kraft

Integral rundt lukket kurve

Potensiell energi [YF 7.1–7.4; LL 4.3–4.4]

Når $\vec{F}$ er en konservativ kraft, er potensiell energi

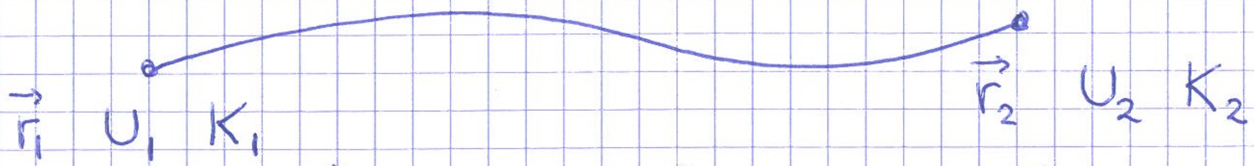
$$\boxed{U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

der vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0.$

Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

Mekanisk energibevarelse [YF 7.1-7.3; LL 4.5]

Anta kons. system.



$$U_1 - U_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= W = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}$$

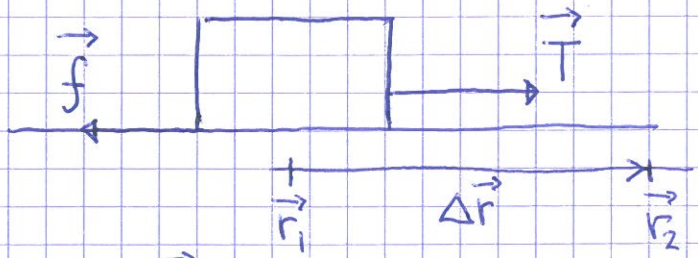
Dvs: Total mekanisk energi

$$E = K + U$$

er konstant (bevart)

i et konservativt system.

Friksjonsarbeid [YF 7.3 ; LL 4.5]



$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ da $\vec{f}$ alltid har retning mot $d\vec{r}$. Friksjonsarbeidet W_f "går tapt": Mekanisk energi omdannes til varme.

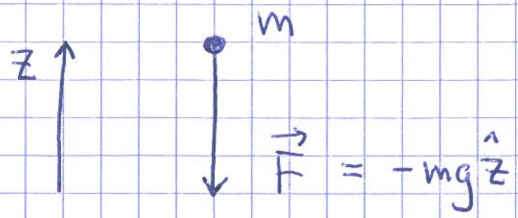
Når $\vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ alltid, er selvsagt også

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0,$$

dvs friksjonskraften $\vec{f}$

er ikke konservativ.

Eks 1: Fritt fall



Anta $U(0) = 0$ og $v(0) = 0$.
Bestem $U(z)$ og $v(z)$; $z < 0$.

Løsn: $U(z) = -\int_0^z (\underbrace{-mg\hat{z}}_{\vec{F}}) \cdot (\underbrace{\hat{z}\,dz}_{d\vec{r}}) = \underline{\underline{mgz}}$

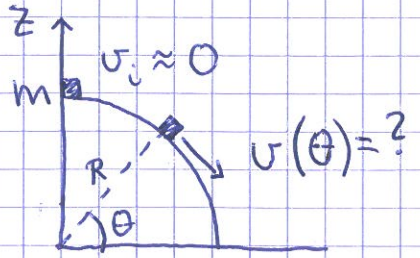
Total mek. energi er bevart

$$\Rightarrow U(z) + K(z) = U(0) + K(0) = 0$$

$$\Rightarrow mgz + \frac{1}{2}mv(z)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(z) = \sqrt{-2gz}}} \qquad (z<0)$$

Eks 2: Glatt kuleformet tak



Løsn: E er bevart. Anta $U(0)=0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv(\theta)^2 + mg\,z(\theta) = mgR$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(\theta) = \sqrt{2gR(1-\sin\theta)}}}$$

- Hvor mister m kontakten med underlaget? ($N \to 0$)
- Hvordan ta hensyn til friksjon?
- Hva skjer hvis legemet ruller og "slurer"?

Impuls [YF 8 ; LL 5]

[evt. bevegelsesmengde ; eng: (linear) momentum]

N2: $\vec{F} = m \dfrac{d\vec{v}}{dt} \underset{m=\text{konst.}}{\overset{\text{hvis}}{=}} \dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$

Impuls = masse · hastighet

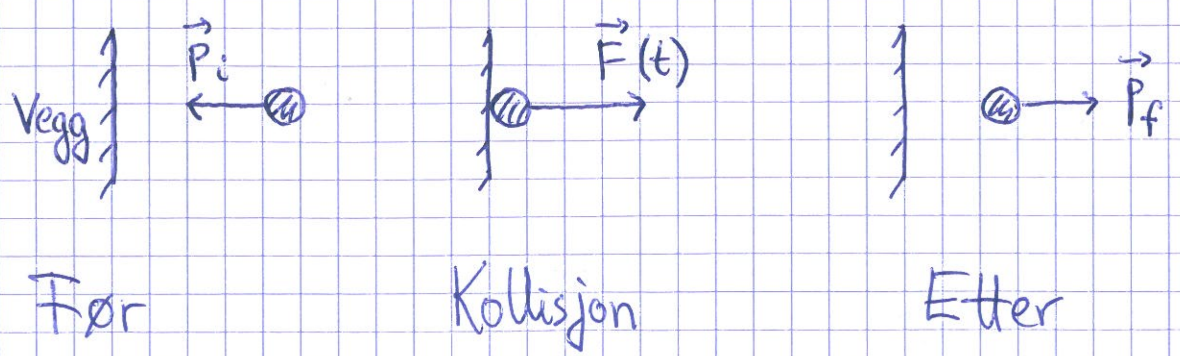
$\vec{p} = m\vec{v}$; $[p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$

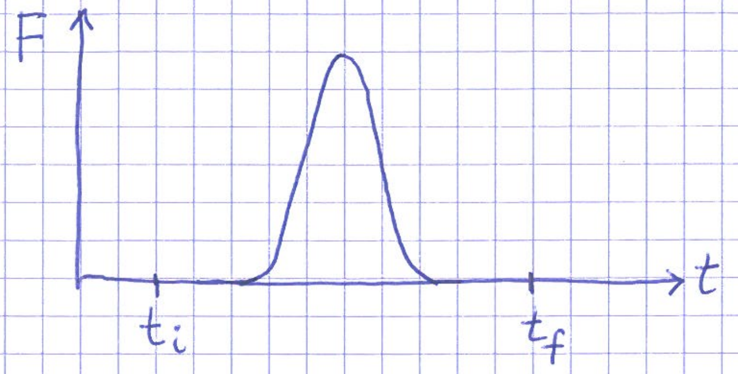
$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}}$ N2

Impulsbevarelse:

Hvis $\sum \vec{F}_{ytre} = 0$, er legemets impuls bevart.

Ytre $\vec{F}$ gir impulsendring:



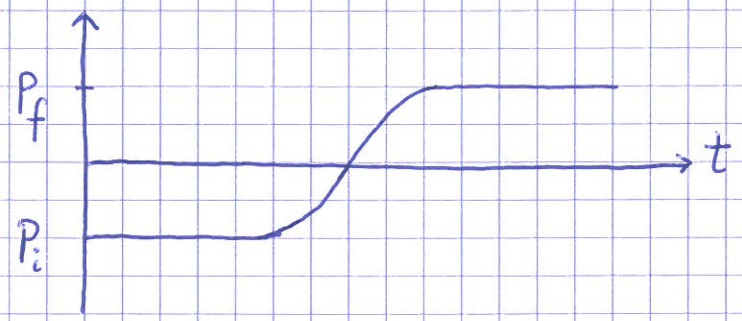


Impulsendring i kollisjon med veggen:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$= \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p}$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt$$



Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL 5.3]

Elastisk støt: $\Delta K = 0$ (mek. energi bevart)

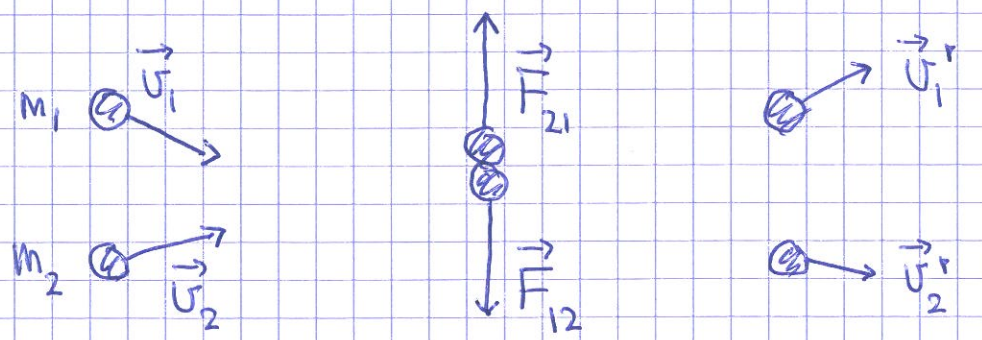
Uelastisk –"–: $\Delta K < 0$ (—— " —— ikke bevart)

Fullstendig uelastisk støt: Kolliderende legemer henger sammen, med felles hastighet, etter kollisjonen. Max energitap $|\Delta K|$.

Tapt mek. energi → deformasjon, lyd, varme...

$$\vec{F}_{ytre} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \vec{p}_{tot} = 0$$

Indre krefter endrer ikke $\vec{p}_{tot}$:



Før Kollisjon Etter

N2: $\vec{F}_{21} = d\vec{p}_1/dt \,, \quad \vec{F}_{12} = d\vec{p}_2/dt$

N3: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

Eks: Anslå $\langle F \rangle$ (midlere kraft) i et slag på en bordtennisball. $(m = 2.7\,g)$

Løsn: Anslår $v_i \sim 10\ m/s$, $v_f \sim 30\ m/s$, $\Delta t_{(koll)} \sim 1\ ms$

$$\Rightarrow \langle F \rangle = \frac{m\,\Delta v}{\Delta t} = \frac{2.7 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot 40\ m/s}{10^{-3}\,s} = \underline{108\ N}$$

$$\langle F \rangle / mg = \frac{\Delta v}{g\,\Delta t} = \frac{\langle a \rangle}{g} = \frac{40000\ m/s^2}{10\ m/s^2} = \underline{4000}$$

Dvs, OK å neglisjere ytre kraft mg i kollisjonen

Sentralt støt [YF 8.2–8.4 ; LL 5.3]

Før: $m \bullet \xrightarrow{v}$ $\qquad \xleftarrow{V} \bullet M$ (i)

Etter: $v' \longleftarrow \overset{m}{\bullet}$ $\qquad \overset{M}{\bullet} \longrightarrow V'$ (f)

[I fig: $v, V' > 0$, $v', V < 0$]

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mv + MV}_{p_i} = \underbrace{mv' + MV'}_{p_f}$$