KLASSISK DYNAMIKK

YF 1–11, 14 ; LL 1–7, 9

Størrelser og enheter [YF 1]

Eks:

Lengde ; $d = 25.4 \text{ mm}$ dekadisk prefiks ($\text{m} = \text{milli} = 10^{-3}$)

størrelse symbol tallverdi enhet

Notasjon: $[d] = \text{m}$; "enheten til lengde er meter"

SI-systemet:

lengde, $[l] = \text{m}$ (meter)
masse, $[m] = \text{kg}$ (kilogram)
tid, $[t] = \text{s}$ (sekund)
elektrisk strømstyrke, $[I] = \text{A}$ (ampere)
temperatur, $[T] = \text{K}$ (kelvin)
stoffmengde, $[n] = \text{mol}$

} Grunnenheter

hastighet (fart), $[v] = \text{m/s}$
akselerasjon, $[a] = \text{m/s}^2$
impuls (bevegelsesmengde), $[p] = \text{kg m/s}$

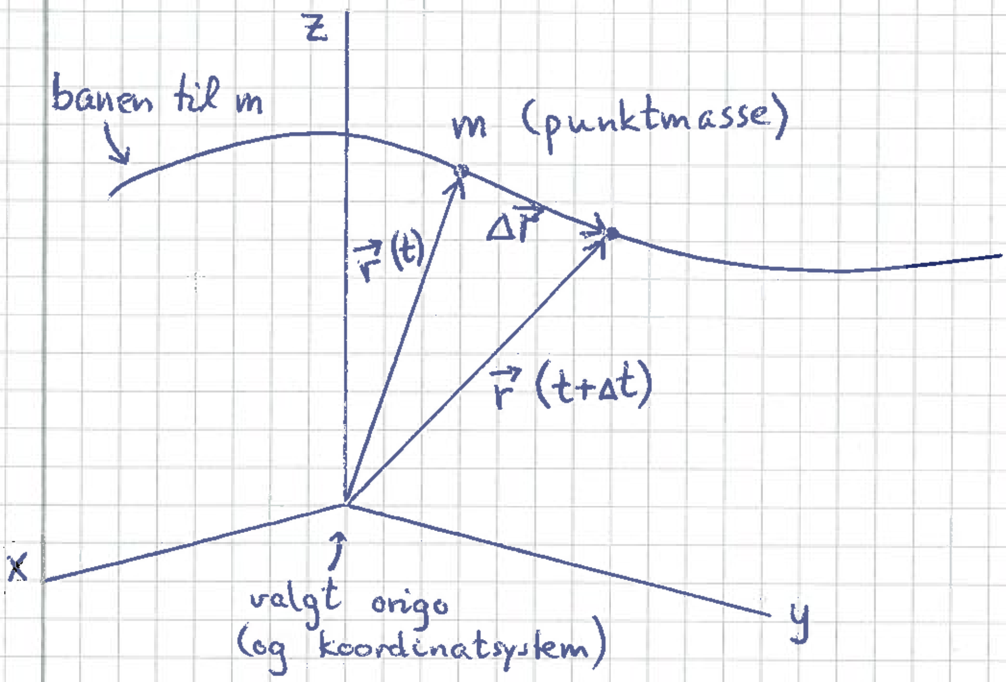
} Sammensatte enheter

kraft, $[F] = \text{kg m/s}^2 = \text{N}$ (newton)
energi, $[W] = \text{Nm} = \text{J}$ (joule)
effekt, $[P] = \text{J/s} = \text{W}$ (watt)

} Avledete enheter

Kinematikk [YF 2, 3 ; LL 1]

= beskrivelse av bevegelse



$\vec{r}(t)$ = posisjonen til m ved tid t

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

= forflytningen av m mellom t og $t + \Delta t$

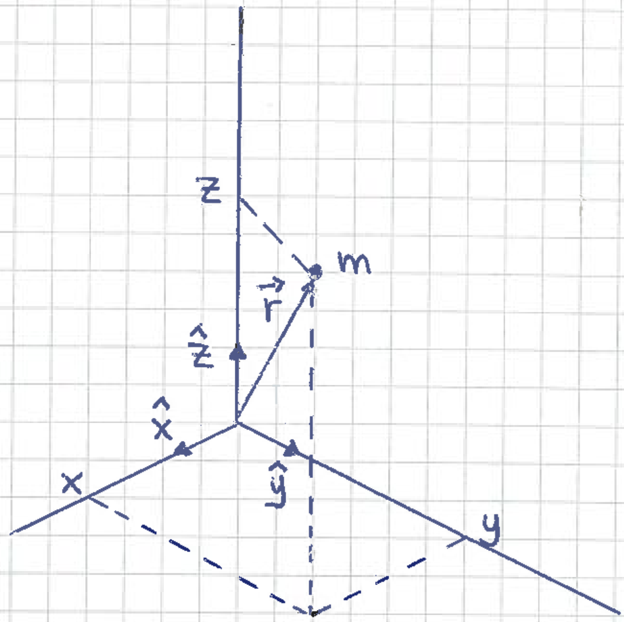
Hastighet $\stackrel{def}{=}$ forflytning pr tidsenhet :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$, tangentiell til banen $(\vec{v} \parallel \Delta\vec{r})$

Akselerasjon $\stackrel{def}{=}$ hastighetsendring pr tidsenhet:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Dekomponering i kartesiske koordinater :



$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{x} + v_y(t)\,\hat{y} + v_z(t)\,\hat{z}$$

$$= \frac{dx}{dt}\,\hat{x} + \frac{dy}{dt}\,\hat{y} + \frac{dz}{dt}\,\hat{z} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} + \dot{z}\,\hat{z}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\hat{x} + a_y(t)\,\hat{y} + a_z(t)\,\hat{z}$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\,\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{y} + \frac{dv_z}{dt}\,\hat{z}$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\hat{y} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\hat{z} = \ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y} + \ddot{z}\,\hat{z}$$

Enhetsvektorer :

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \qquad \text{(dimensjonsløse)}$$

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1 \quad ; \quad \hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \ldots = 0$$

Fastlegger $\vec{v}$ fra $\vec{r}$ og $\vec{a}$ fra $\vec{v}$ med integrasjon: (4)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$

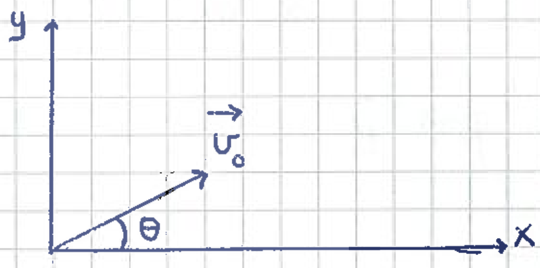
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \text{... tilsvarende ...} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t)\,dt$$

Må også gjelde komponentvis:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t)\,dt \quad \text{osv.}$$

$$v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x(t)\,dt \quad \text{osv.}$$

Eks: Skrått kast i tyngdefeltet



- Her er $\vec{a} = -g\,\hat{y}$ (konstant)
- Anta $\vec{r}(0) = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$
- Bestem $\vec{r}(t)$. Vis at banen er en parabel.

Løsn:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t (-g\,\hat{y})\,dt = \vec{v}_0 - gt\,\hat{y}$$

$$\vec{r}(t) = \int_0^t (\vec{v}_0 - gt\,\hat{y})\,dt = \vec{v}_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2\,\hat{y}$$

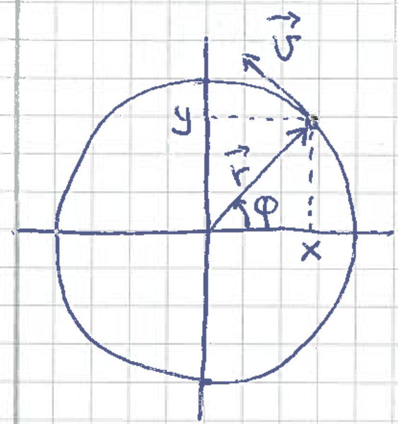
$$\Rightarrow x(t) = v_0 t \cos\theta \;;\; y(t) = v_0 t \sin\theta - \tfrac{1}{2} g t^2$$

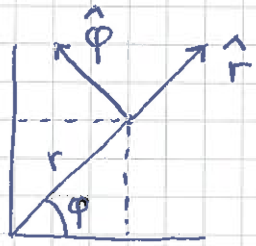
Banen: $$y = v_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right) \sin\theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

$$= -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta}\, x^2 + \tan\theta\; x$$

Øving 1: • Kast i motbakke. • Gitt $a(v)$, finn $v(t)$.

Sirkelbevegelse [YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8] ⑤





Polarkoordinater:

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\vec{r}$ (φ>0 mot klokka)

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\tan\varphi = y/x$

$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$ (= konstant ved sirkelbevegelse)

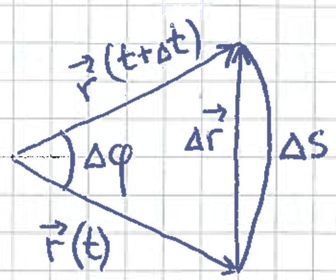
$\vec{r} = r\cos\varphi\,\hat{x} + r\sin\varphi\,\hat{y} = r\,\hat{r}$

$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$, $\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$

Vinkelhastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ vinkelendring pr tidsenhet:

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \qquad [\omega] = s^{-1}$$

Vinkel $\stackrel{\text{def}}{=}$ buelengde / radius:



$$\Delta\varphi = \Delta s / r$$

Når $\Delta t \to 0$:

$\Delta\varphi \to 0$, $\Delta r = |\Delta\vec{r}| \to \Delta s = r\,\Delta\varphi$

$\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$

$$\Rightarrow v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega \Bigg\} \quad \vec{v} = v\hat{\varphi} = r\omega\hat{\varphi}$$

$\vec{v} \parallel \Delta\vec{r} \perp \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{r}$

Uniform sirkelbevegelse når v og ω er konst;

anta $\varphi(0) = 0$:

$$\int_0^{\varphi(t)} d\varphi = \omega \int_0^t dt \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = \omega t}$$

Dermed:

$$\vec{r}(t) = r \cos \omega t \ \hat{x} + r \sin \omega t \ \hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = -r\omega \sin \omega t \ \hat{x} + r\omega \cos \omega t \ \hat{y}$$

$$\vec{a}_\perp(t) = -r\omega^2 \cos \omega t \ \hat{x} - r\omega^2 \sin \omega t \ \hat{y}$$

$$= -\omega^2 \vec{r} = \text{sentripetalakselerasjonen}$$

$$= -\omega^2 r \ \hat{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$$

dvs rettet radielt inn mot sirkelens sentrum.

Hvis $v = |\vec{v}|$ endrer seg, har vi baneakselerasjon:

$$a_\parallel = \dot{v} = \frac{d}{dt}(\omega r) = r \frac{d\omega}{dt} = r\dot{\omega} = r\alpha = r\ddot{\varphi}$$

$\Rightarrow$ Total akselerasjon: $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel = -\omega^2 r \hat{r} + r\dot{\omega}\hat{\varphi}$

Vinkelakselerasjon: $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$, $[\alpha] = s^{-2}$

Periode: T = omløpstid ("rundetid"), $[T] = s$

Frekvens: f = antall omløp pr tidsenhet, $[f] = \frac{1}{s} = Hz$

$\Rightarrow$ Ulike sammenhenger:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$