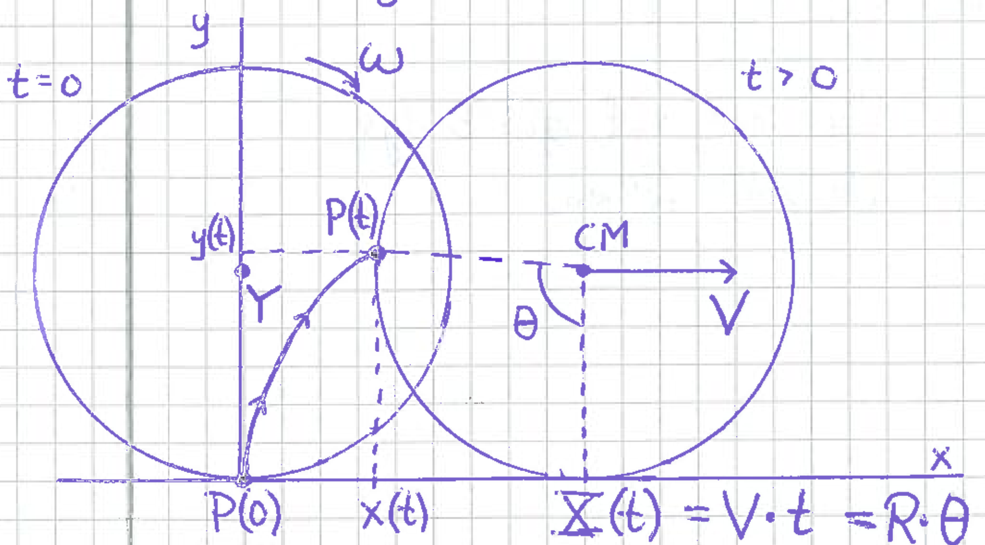
Ren rulling [YF 10.3 ; LL 6.7]



$P(t) = (x(t), y(t))$
= banen til punkt på periferien

$P(0) = (0,0)$

$X(0) = 0$

$X(t) = V \cdot t = R \cdot \theta$

$Y(t) = Y(0) = R$

Fra figuren: $x = X - R\sin\theta$, $y = R - R\cos\theta$
$= R\theta - R\sin\theta$

Bevegelsen til CM:

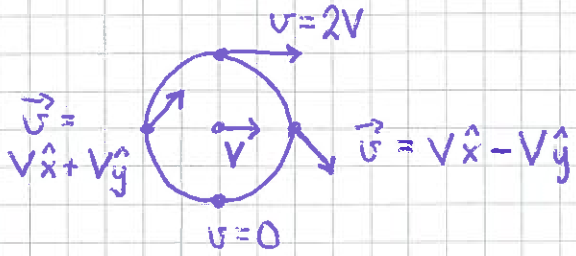
$$\vec{R}_{CM} = X\hat{x} + Y\hat{y} = R\theta\,\hat{x} + R\,\hat{y}$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM} = R\dot{\theta}\,\hat{x} = R\omega\,\hat{x} = V\hat{x}$$

$$\vec{A} = \dot{\vec{V}} = R\ddot{\theta}\,\hat{x} = R\dot{\omega}\,\hat{x} = R\alpha\,\hat{x} = A\hat{x}$$

Rullebetingelsene: $\boxed{V = R\omega, \quad A = R\alpha}$

Bevegelsen til P:



$$\vec{v} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y}$$

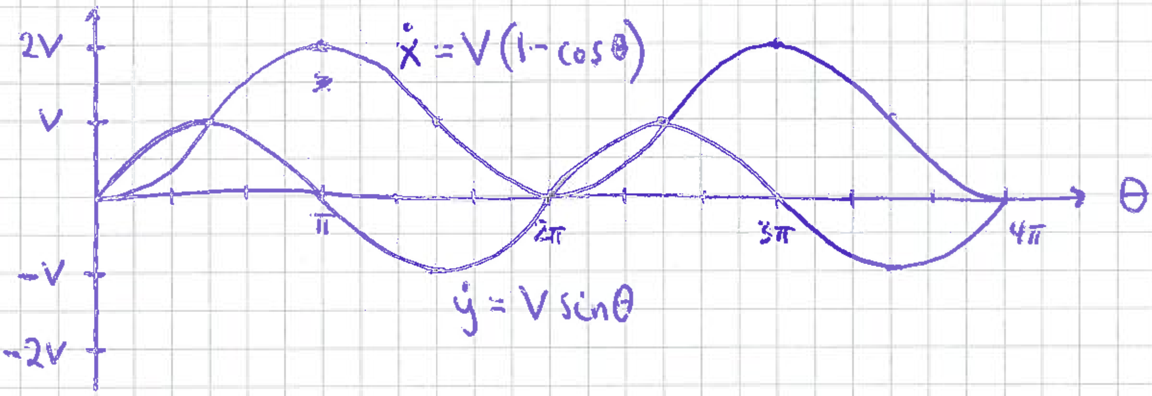
med

$$\dot{x} = R\dot{\theta} - R\dot{\theta}\cos\theta = V(1-\cos\theta)$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta}\sin\theta = V\sin\theta$$

Sykloide : $x = R(\theta - \sin\theta)$ $\quad y = R(1-\cos\theta)$

Fartskomponentene til P (antar konstant V) :



Merk : $v_p = 0$ når $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, dvs når P er i kontakt med underlaget

$$\Rightarrow P_f = dW_f/dt = \vec{f}\cdot\vec{v} = 0$$

$\Rightarrow$ Null effekttap ved ren rulling, selv om $\vec{f} \neq 0$

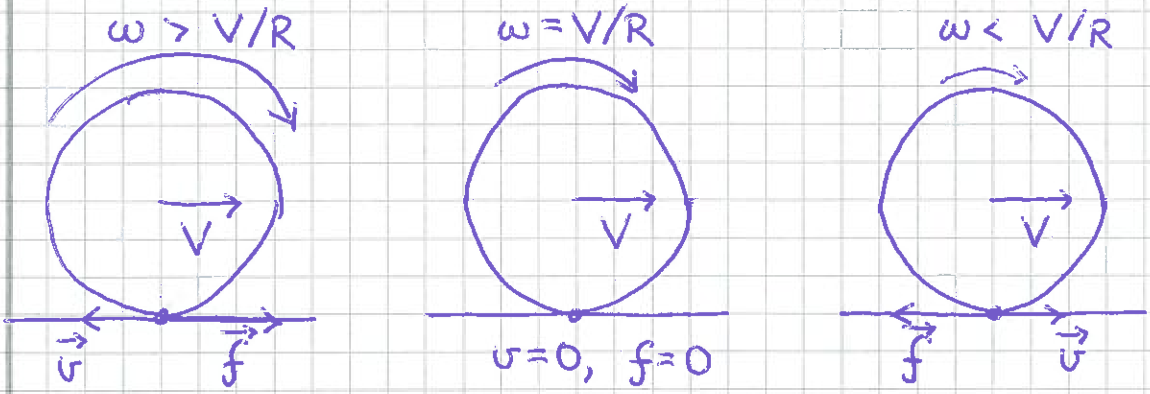
(Statisk friksjon ; $f \leq \mu_s \cdot N$)

Retning på $\vec{f}$: Motsatt rettet den relativhastighet $\vec{v}$ som ville oppstå dersom $\mu_s \to 0$.

["Rulle-friksjon" $\Rightarrow$ Noe tap av mekanisk energi, også ved ren rulling.
Vi ser bort fra dette.]

Sluring [LL 6.7]

$\omega \neq V/R \Rightarrow$ relativ hastighet $v = V - \omega R$ mellom legeme og underlag i kontaktpunktet



Kinetisk friksjon, $f = \mu_k \cdot N$.

Tapt mek. energi pr tidsenhet : $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$

Kinetisk energi ved ren rulling

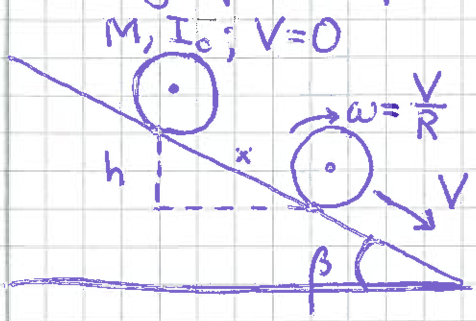
$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$I_0 = c \cdot MR^2 \qquad (c = 1 \text{ for ring, } \tfrac{2}{5} \text{ for kule osv})$$

$$\omega = V/R$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} c M R^2 \frac{V^2}{R^2} = \underline{\underline{(1+c)\frac{1}{2} M V^2}}$$

Eks: Rulling på skråplanet [YF 10.3; LL 6.8]



Finn V, $\dot{V}$, f (friksjon) samt minste μ_s som gir ren rulling.

$I_0 = c \cdot MR^2$ = tregh.mom. mhp CM

Exp gir: V(kule) > V(skive) > V(kuleskall) > V(hul sylinder)

Løsning: Ren rulling ⇒ mek. energi bevart ($f \le \mu_s \cdot N$)

$\Rightarrow Mgh = (1+c)\frac{1}{2}MV^2$; $h = x \sin\beta$

$\Rightarrow V(x) = \sqrt{\frac{2gx\sin\beta}{1+c}}$; OK, siden $c(\text{kule}) = \frac{2}{5}$, $c(\text{skive}) = 1/2$, $c(\text{kuleskall}) = 2/3$, $c(\text{hul sylinder}) = 1$

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dV}{dx} = V \cdot \sqrt{\frac{2g\sin\beta}{1+c}} \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{g\sin\beta}{1+c}$$

Dvs: Friksjon $\vec{f}$, rettet oppover skråplanet, reduserer $\dot{V}$ med en faktor $(1+c)^{-1}$. [$f = 0 \Rightarrow \dot{V} = g\sin\beta$]

N2: $Mg\sin\beta - f = M\dot{V} = Mg\sin\beta/(1+c)$

$$\Rightarrow f = \frac{c}{1+c} Mg\sin\beta$$

Men: Ren rulling mulig bare hvis $f \le f_{max} = \mu_s N$

$$\Rightarrow \frac{c}{1+c} Mg\sin\beta \le \mu_s Mg\cos\beta$$

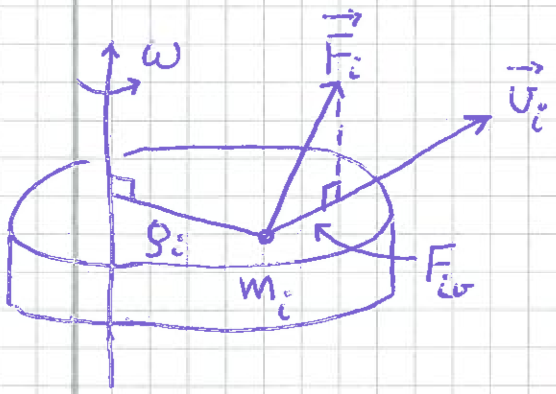
$$\Rightarrow \mu_s \ge \frac{c}{1+c}\tan\beta$$

Eks: Kompakt kule, $c = 2/5$, og $\mu_s = 0.3$ gir ren rulling opp til $\beta = \arctan[\mu_s(1+c)/c] = \arctan[0.3 \cdot 7/2]$
$= \arctan[21/20] \approx 45°$

Rotasjonsdynamikk

Akse med fast orientering

- Essensielt endimensjonalt problem
- Dekker det meste vi skal ta for oss
- Beskriver rotasjonsdelen av legemets totale bevegelse



$v_i = \rho_i \omega$

F_{iv} = komponent av $\vec{F}_i$ langs $\vec{v}_i$

Vi regner ut tilført effekt, $P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$, på to måter:

(a) Med N2: $P = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ (som s.17)

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{d\omega^2}{dt} = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \frac{d\omega}{dt} = \underline{\underline{I\omega \frac{d\omega}{dt}}}$$

(b) $P = \sum_i F_{iv} v_i = \left\{ \sum_i F_{iv} \rho_i \right\} \omega = \underline{\tau \omega}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tau = I \dot{\omega}}$ N2 for rotasjon om akse med fast orientering

med $\tau = \sum_i F_{iv} \rho_i$ = ytre <u>dreiemoment</u> på legemet, mhp rotasjonsaksen

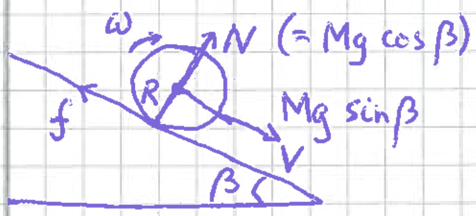
$I = \sum_i m_i \rho_i^2$ = legemets <u>treghetsmoment</u> mhp rot. aksen

---

Fra $P = \tau\omega = \tau \, d\varphi/dt$ og $P = dW/dt$ følger det at tilført arbeid ved rotasjon er

$\boxed{dW = \tau \, d\varphi}$ [YF 10.4; LL 6.4]

Eks 1: Rulling på skråplan



$\omega = V/R \, ; \quad \mathring{\omega} = \mathring{V}/R$

$I_0 = c \cdot MR^2$

N2, rot. om akse gjennom CM: $\tau = I_0 \mathring{\omega} \; ; \quad \tau = f \cdot R$

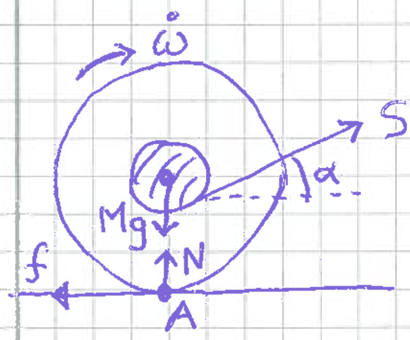
$\Rightarrow f \cdot R = cMR^2 \cdot \mathring{V}/R \quad \Rightarrow f = cM\mathring{V}$

N2, translasjon: $Mg \sin\beta - f = M\mathring{V}$

$\Rightarrow Mg \sin\beta = M\mathring{V} + f = (1+c)M\mathring{V} \quad \Rightarrow \underline{\underline{\mathring{V} = \frac{g \sin\beta}{1+c}}}$ $\left(\begin{matrix}\text{som} \\ \text{s. 37}\end{matrix}\right)$

Eks 2: Snelle

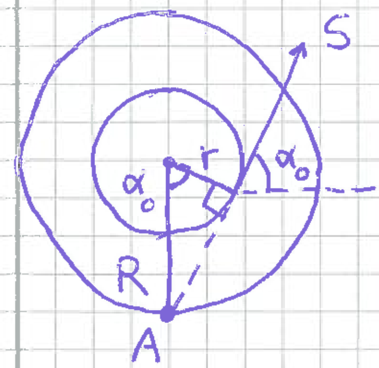
Velger akse gjennom kontakt-punktet (-linja) A; bare snordraget $\vec{S}$ kan ha dreiemoment mhp aksen A:



Liten $\alpha \Rightarrow$ ruller mot høyre

Stor $\alpha \Rightarrow$ —"— venstre

Statisk likevekt når $\vec{S}$ går gjennom A; da er $\tau_A = 0$:



[Vis at snella nå blir liggende i ro så lenge

$$S \leq \frac{\mu_s Mg}{\cos\alpha_0 + \mu_s \sin\alpha_0}$$]

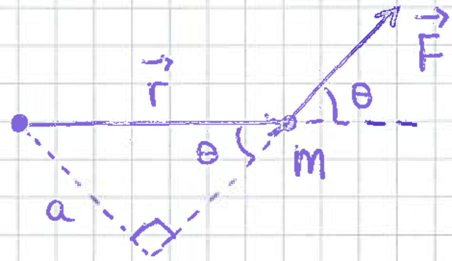
$\Rightarrow \cos\alpha_0 = \frac{r}{R}$

Rotasjonsdynamikk, "vektorielt"

~~Dreiemoment [YF 10.1; LL 5.5, 6.4]~~

<u>NB</u>: Dreiemoment $\vec{\tau}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ må alltid beregnes relativt et (fritt valgt!) referansepunkt $\vec{r}_0$. La oss her, for enkelhets skyld, velge <u>origo som referansepunkt</u>. Posisjonen til en punktmasse eller et masseelement, relativt referansepunktet, blir da ganske enkelt $\vec{r}$. Med vilkårlig ref.punkt $\vec{r}_0$ må $\vec{r}$ erstattes av $\vec{r} - \vec{r}_0$.

Dreiemoment [YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



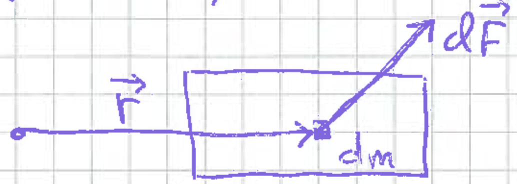
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$= \vec{F}$'s dreiemoment på m

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{r}$

Abs. verdi: $\tau = r \cdot F \cdot \sin\theta = a \cdot F$ ("arm × kraft")

For partikkelsystem, f.eks stivt legeme:



$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$$ = totalt dreiemoment på systemet

Dreieimpuls [YF 10.5 ; LL 6.6]

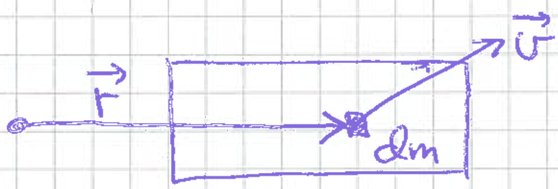
$\vec{p} = m\vec{v}$ (= impulsen)

$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$ = m's dreieimpuls

Retning: $\vec{L} \perp \vec{p}$, $\vec{L} \perp \vec{r}$

Abs.verdi: $L = r \cdot p \cdot \sin\theta = a \cdot p$ ("arm × impuls")

For partikkelsystem, f.eks. stivt legeme:



$d\vec{p} = dm \cdot \vec{v}$

$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v}\, dm$ = systemets totale dreieimpuls

N2 for rotasjon [YF 10.5 ; LL 6.6]

Skal vise at: $\boxed{\vec{\tau} = d\vec{L}/dt}$ [kalles også spinnsatsen]

Punktmasse m:

$$d\vec{L}/dt = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = m \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{= \vec{v} \times \vec{v} = 0} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

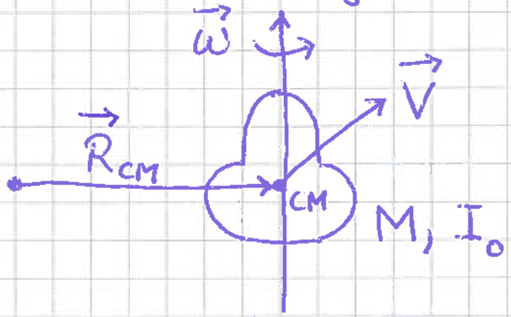
$$\overset{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Tilsvarende bevis for partikkelsystem.

$\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på systemet; $\vec{L}$ = systemets totale dreieimpuls

$\vec{L}$ for stivt legeme [YF 10.5 ; LL 6.6]

Vi antar stivt legeme med refleksjonssymmetri om rotasjonaksen:



Resultat: $$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0\vec{\omega}}$$

[Se eget notat for bevis!]

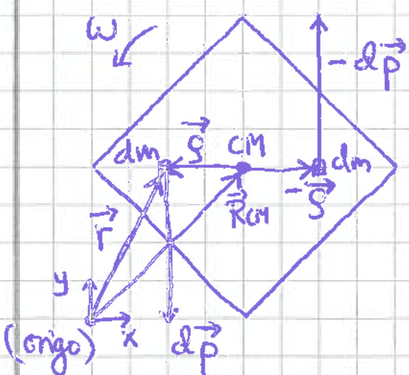
Banedreieimpuls:

$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$; dvs direkte fra definisjonen av $\vec{L}$, som ~~[illegible]~~ punktmasse M i posisjon $\vec{R}_{CM}$ med hastighet $\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$.

Indre dreieimpuls ("spinn"):

$\vec{L}_s = I_0\vec{\omega}$; uavhengig av valg av referansepunkt.

"Antydningsbevis" for $\vec{L}_s = I_0\vec{\omega}$:



$$\vec{r} = \vec{R}_{CM} + z\hat{z} + \rho\hat{\rho}$$

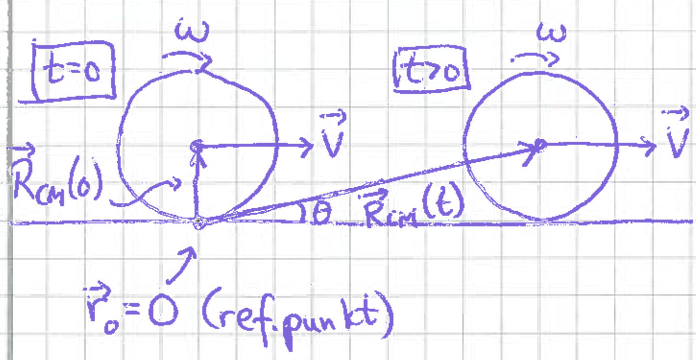
$$d\vec{p} = dm \cdot \vec{v} = dm \cdot \omega\rho\,\hat{\varphi}$$

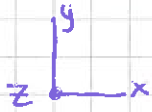
$$\Rightarrow d\vec{L}_s = (\underbrace{\vec{R}_{CM} + z\hat{z}}_{\text{kanselleres pga refl. symmetri!}} + \rho\hat{\rho}) \times (dm \cdot \omega\rho \cdot \hat{\varphi})$$

$$\rightarrow \rho^2 dm\, \omega\, \hat{\rho} \times \hat{\varphi} = dI_0 \cdot \underbrace{\omega\hat{z}}_{=\vec{\omega}}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_s = \int d\vec{L}_s = \left\{\int dI_0\right\}\vec{\omega} = \underline{\underline{I_0\vec{\omega}}}$$

Eks: Bestem $\vec{L}$ for rent rullende kule





$\vec{\omega} = \omega\hat{z}$; $\quad I_0 = \frac{2}{5}MR^2$

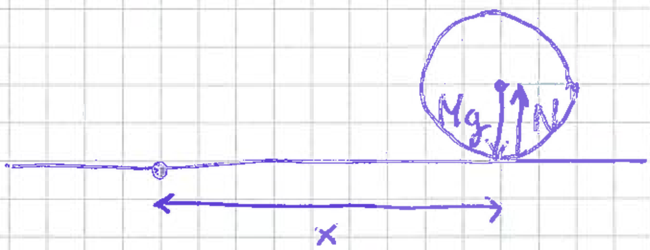
$$\vec{L}_b(0) = \vec{R}_{CM}(0) \times M\vec{V} = -MRV\,\hat{z}$$

$$\vec{L}_b(t) = \vec{R}_{CM}(t) \times M\vec{V} = -R_{CM}(t)\,MV\sin\theta\,\hat{z} = -MRV\,\hat{z}$$

$$\vec{L}_s(0) = \vec{L}_s(t) = I_0\,\vec{\omega} = -\frac{2}{5}MR^2\,\frac{V}{R}\,\hat{z} = -\frac{2}{5}MRV\,\hat{z}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\vec{L} = -\frac{7}{5}MRV\,\hat{z}}}$, uavhengig av t hvis V=konstant

Vi har $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$, så her må $\vec{\tau} = 0$:



Mg (ned) og N (opp) har like stor arm x; $N = Mg$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = x\hat{x} \times N\hat{y} + x\hat{x} \times Mg(-\hat{y}) = \underline{\underline{0}} \qquad \text{ok!}$$