Beregning av $\vec{E}$ fra V [YF 23.5; LHL 19.9]

Generelt, for skalar funksjon $f(\vec{r})$:

$$\vec{r} \xrightarrow{d\vec{s}} \vec{r}+d\vec{s}$$

$$f(\vec{r}) \qquad\qquad f(\vec{r})+df$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \nabla f \cdot d\vec{s}$$

Her er

$$d\vec{s} = \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz = \text{veielement}$$

$$\nabla f = \hat{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z} = \text{gradienten til } f$$

Fra s.71:

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = \text{potensialforskjellen mellom } \vec{r} \text{ og } \vec{r}+d\vec{s}$$

Samtidig må vi ha: $dV = \nabla V \cdot d\vec{s}$

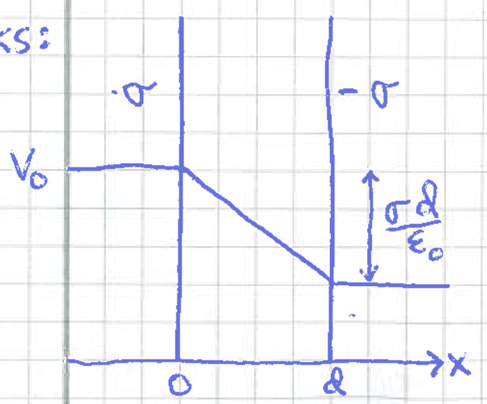
Dermed:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

Dessuten:

$$\vec{F} = q_0\vec{E} = -q_0\nabla V = -\nabla U \qquad \text{(som s.18)}$$

Eks:



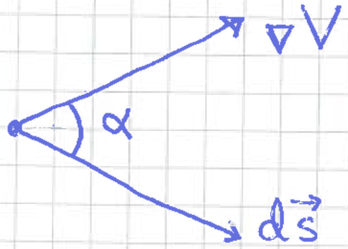
To store metallplater i $x=0$ og $x=d$, ladn. hhv σ og $-\sigma$ pr flateenhet.

Fant at $E=\sigma/\varepsilon_0$ mellom platene

$\Rightarrow$ Må ha potensial

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (x<0) \\ V_0 - x\sigma/\varepsilon_0 & (0<x<d) \\ V_0 - \sigma d/\varepsilon_0 & (x \geq d) \end{cases}$$

Betydning av ∇V:



$$dV = \nabla V \cdot d\vec{s}$$
$$= |\nabla V| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos\alpha$$

$\Rightarrow$ maksimal potensialendring dV når forflytningen $d\vec{s}$ er i samme retning som ∇V ($\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$)

$\Rightarrow$ ∇V er en vektor i <u>retning</u> max økende V, og med <u>absoluttverdi</u> lik endringen i V pr lengdeenhet (og lik den elektriske feltstyrken $|\vec{E}|$)

<u>Ekvipotensialflater</u> [YF 23.4; LHL 19.11]

= flater i rommet (evt. kurver) med konstant V

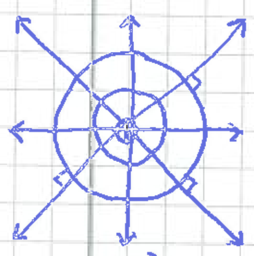
$\Rightarrow$ $dV = 0$ når $d\vec{s}$ er på en ekvipotensialflate

$\Rightarrow$ $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ —— " ——

$\Rightarrow$ $\vec{E} \perp d\vec{s}$ —— " ——

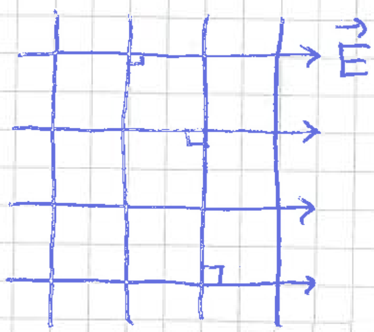
$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} \perp \text{ekvipotensialflatene}}$

Eks 1: Punktladning



Radielt $\vec{E}$ $\Rightarrow$ <u>Kuleskall</u> som ekvipot. flater

Eks 2: Uniformt $\vec{E}$-felt



Ekvipot. flatene er <u>plan</u> ($\perp \vec{E}$)

Materialers elektriske egenskaper

Ledere/Metaller: YF 22.5 ; LHL 19.8

Dielektrika/Isolatorer: YF 24.4, 24.5 ; LHL 20.5

Ledere

Har mobile ladninger (metall: frie elektroner) som kan bevege seg i lederen huis de utsettes for krefter.

- $\vec{E} = 0$ inni et metall (i elektrostatisk likevekt)

[Hvis $\vec{E} \neq 0$, virker kraft $\vec{F} = q\vec{E} \neq 0$ på fri ladning q, og da har vi ikke likevekt]

- All netto ladning ligger på overflaten av et metall

[Skyldes at $F(r) \sim r^{-2}$]

- På en metalloverflate står $\vec{E} \perp$ overflaten, og $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

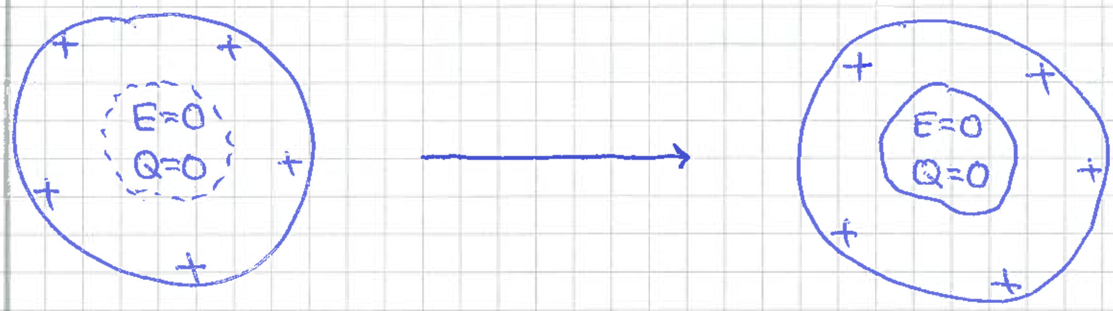
[Hvis $E_{\parallel} \neq 0$, virker kraft $F_{\parallel} = qE_{\parallel} \neq 0$, dvs ikke likevekt.
σ = overflateladning pr flateenhet]

- Et metallstykke i likevekt er et ekvipotensial

[Med $d\vec{s}$ i metallstykket er $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$;
inni er $\vec{E} = 0$ og på overflaten er $\vec{E} \perp d\vec{s}$]

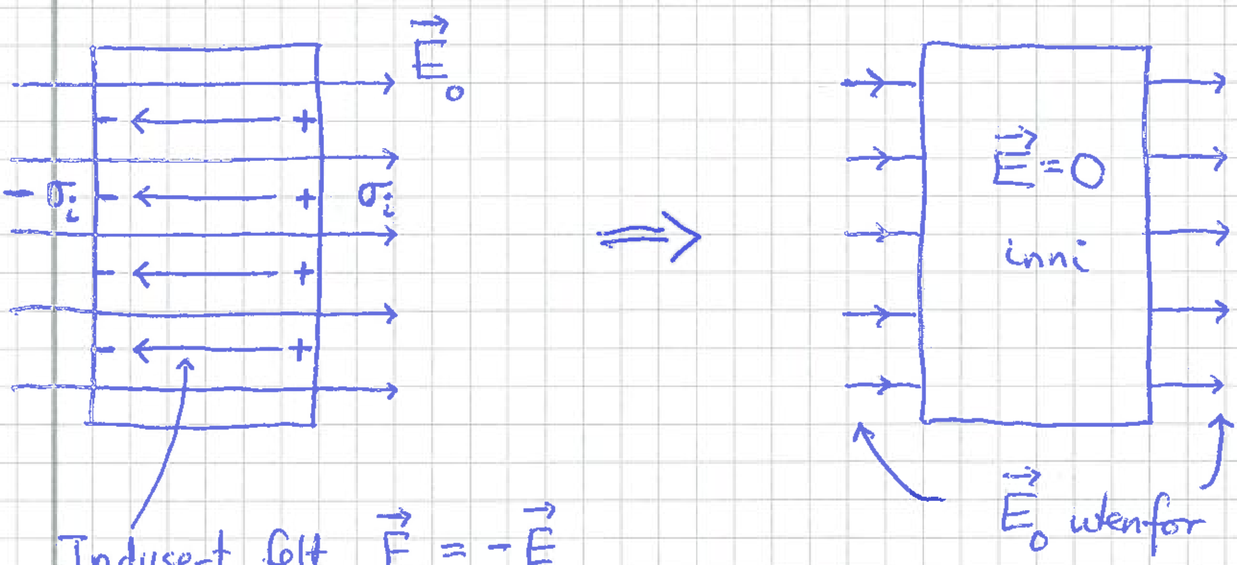
- Metallstykke med hulrom har $E=0$ inni hulrommet og all nettoladning på ytre overflate

Bevis:
Tenk deg at du fjerner en elektrisk nøytral bit inne i metallstykket, og dermed lager et hulrom:



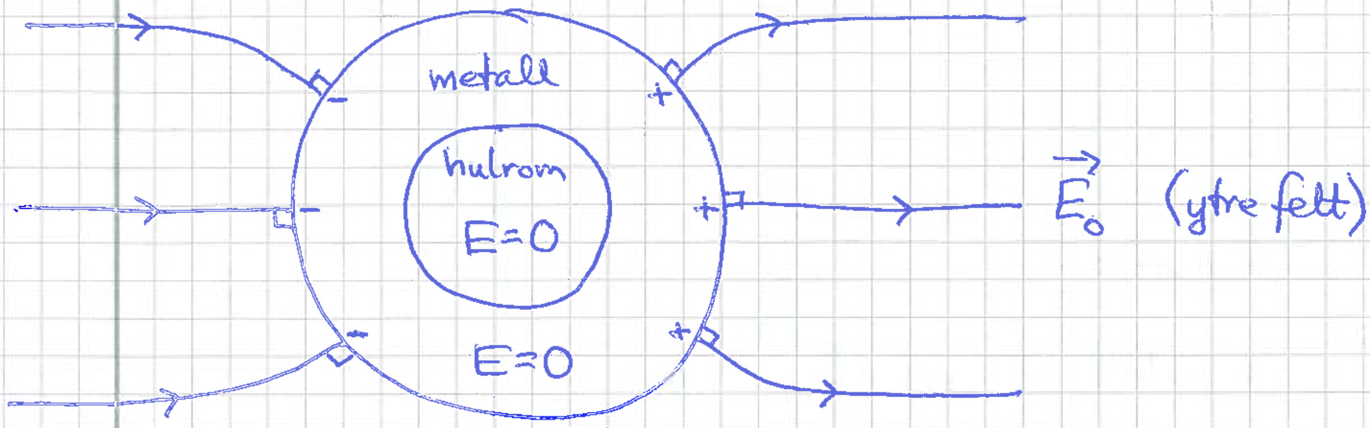
Intet skjer (fra et elektrostatisk synspunkt)
$\Rightarrow$ fortsatt $E=0$ og $Q=0$ der hulrommet er!

Metall i et ytre elektrisk felt $\vec{E}_0$



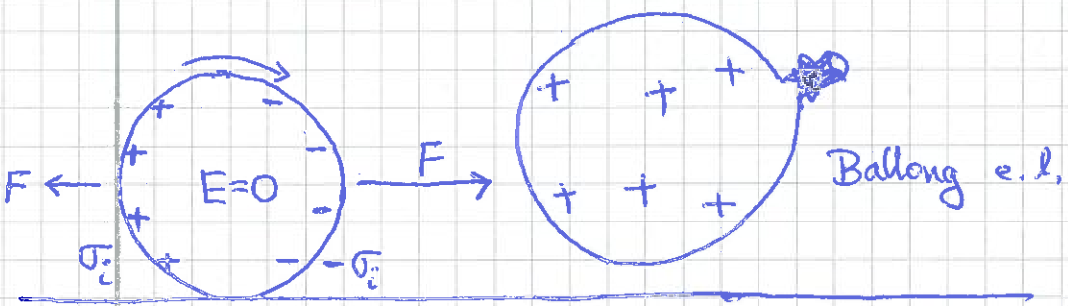
Indusert felt $\vec{E}_i = -\vec{E}_0$
inni metallet pga
indusert overflateladning
$\pm\sigma_i$

Faradaybur (= leder med hulrom):



Anvendelse: Skjerming mot ytre felt.

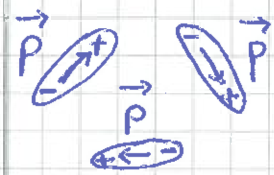
Eks/Demo: Ølboks i ytre felt fra ladet objekt

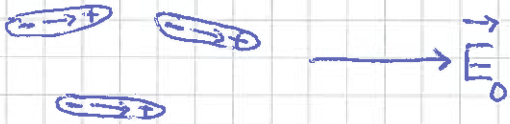


⇒ Netto tiltrekning pga kortere avstand til negativ indusert ladning $-\sigma_i$

Isolatorer

Ikke frie ladninger, men <u>bundet</u> ladning som <u>polariseres</u> å ytre felt $\vec{E}_0$:





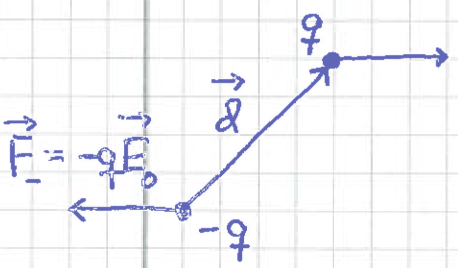
$\vec{E}_0 = 0$

$\sum_i \vec{p}_i \approx 0$

$\vec{E}_0 \neq 0$

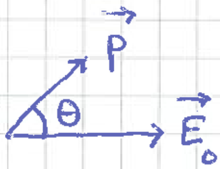
$\Rightarrow \sum_i \vec{p}_i \neq 0$

Molekylære dipoler rettes inn langs det ytre feltet $\vec{E}_0$:



$\vec{F}_+ = q\vec{E}_0$

$\vec{p} = q\vec{d}$

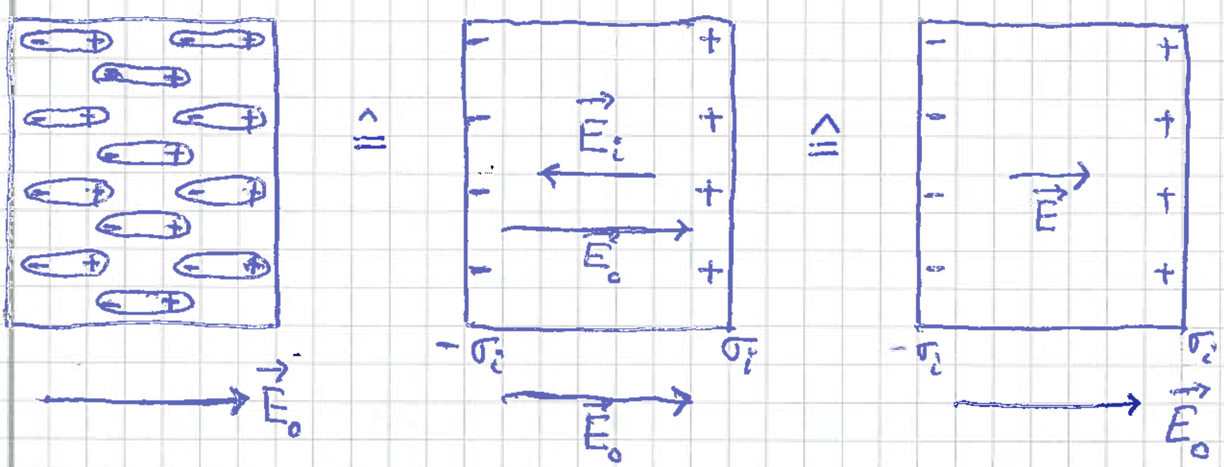


Dreiemoment på dipolen:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \text{..... Øving 9, oppg. 3 .....} = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

$$|\vec{\tau}| = p \cdot E_0 \cdot \sin\theta$$

Netto makroskopisk effekt av ytre $\vec{E}_0$:



- null nettoladning inni; indusert ladning pr flateenhet, $\pm\sigma_i$, på overflaten
- indusert felt $\vec{E}_i$ inni $\Rightarrow$ <u>svekket</u> totalt felt inni:

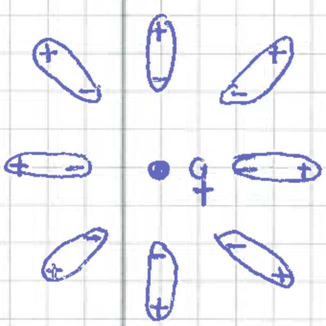
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i \quad ; \quad |\vec{E}| = |\vec{E}_0| - |\vec{E}_i|$$

- lineær respons: E_i prop. med E_0
- isolatorens <u>relative permittivitet</u> ε_r definert ved

$$\boxed{E = \frac{1}{\varepsilon_r} E_0} \qquad \text{Enhet: } [\varepsilon_r] = 1$$

Stoff:	Vakuum	Tørr luft	Plast	Rent vann	Perfekt metall
ε_r :	1	1.00054	2-6	80	∞

- en isolators permittivitet er $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$;
  ser på felt fra ladning q omgitt av dielektrikum med relativ permittivitet ε_r:



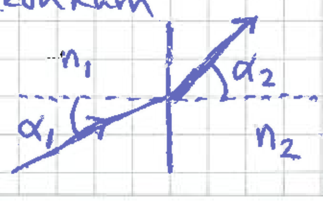
$$E(r) = \frac{1}{\varepsilon_r} E_{vac}(r) = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\,\varepsilon\, r^2}$$

med $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$

Polarisering av mediet svekker feltet med faktoren $\frac{1}{\varepsilon_r}$

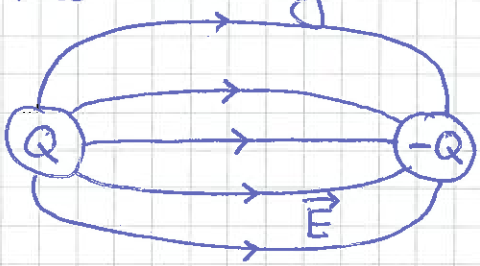
- lysfarten: $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s i vakuum;
  $v = c/\sqrt{\varepsilon_r} < c$ i et dielektrikum
- brytningsindeksen til et dielektrikum: $n = \sqrt{\varepsilon_r}$
  (Snells lov: $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$)



Kondensator og kapasitans [YF 24; LHL 20]

(capacitor) (capacitance)

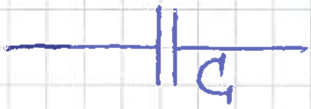
To ledere, med ladning $\pm Q$:



$$V = V_+ - V_- = -\int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$ er prop. med Q,

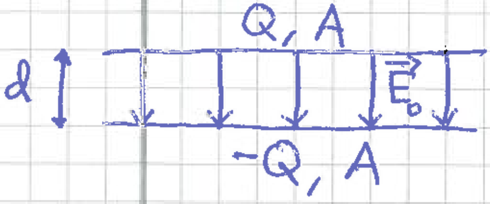
fordi $\vec{E}$ er prop. med Q, pga Coulombs lov.

Kondensatorens kapasitans: $\boxed{C \overset{\text{def}}{=} Q/V}$

- $[C] = [Q/V] = \frac{C}{V} = F$ (farad)
- kretssymbol: 

- lagrer ladning og energi
- C avhenger av utforming/geometri og medium mellom lederne
- beregning av C: anta ladning $\pm Q$ og regn ut V; da er $C = Q/V$

Eks 1: Platekondensator (fylt med luft ≈ vakuum)

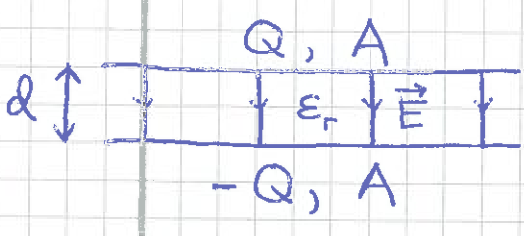


$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{Q/A}{\varepsilon_0} \quad (d \ll \sqrt{A})$$

$$\Rightarrow V_0 = E_0 d = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$

$$\Rightarrow C_0 = Q/V_0 = \underbrace{\varepsilon_0}_{\text{medium}} \cdot \underbrace{\frac{A}{d}}_{\text{geometri}}$$

Eks 2: Platekondensator fylt med dielektrikum



$$E = \frac{1}{\varepsilon_r} E_0 = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{Q/A}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow V = E \cdot d = \frac{Q \cdot d}{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}$$

$$\Rightarrow C = Q/V = \underline{\underline{\underbrace{\varepsilon_r \varepsilon_0}_{\text{medium}} \cdot \underbrace{\frac{A}{d}}_{\text{geometri}}}}$$

Dvs, kapasitansen __økt__ med faktor $\varepsilon_r > 1$

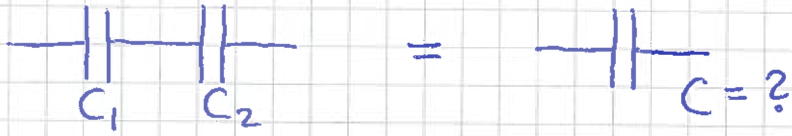
Eks 3: Anta $\varepsilon_r = 5$ og $d = 0.1$ mm. Hvor stor må A være for å gi $C = 1F$?

Svar: $A = C \cdot d / \varepsilon_r \varepsilon_0 = \underline{1 \cdot 10^{-4} / 5 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \text{ m}^2 \approx \underline{\underline{2.3 \cdot 10^{6} \text{ m}^2}}$

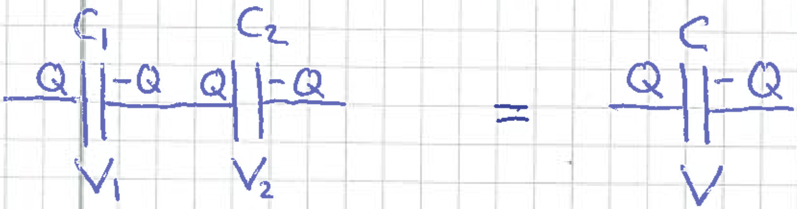
Merk: $[C] = F \Rightarrow \underline{[\varepsilon_0]} = [\varepsilon_r \varepsilon_0] = [\varepsilon] = [C \cdot \frac{d}{A}] = \underline{F/m}$

Kobling av flere kapasitanser [YF 24.2 ; LHL 20.2]

Seriekobling:



Har __lik ladning__ $\pm Q$ på C_1 og C_2:

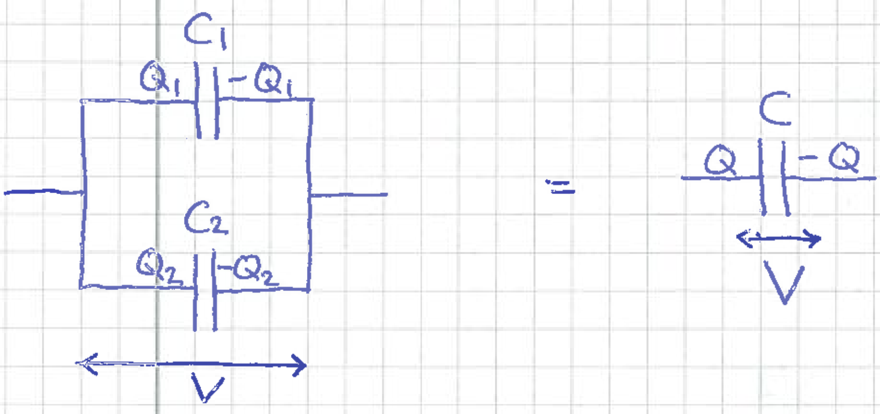


$$\Rightarrow V_1 + V_2 = V \Rightarrow \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Med N stk i serie: $\boxed{C^{-1} = \sum_{j=1}^{N} C_j^{-1}}$

Parallellkobling:

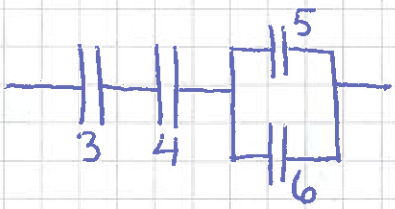
Har likt potensialfall (lik spenning) V over C_1 og C_2:



$$\Rightarrow \quad Q_1 + Q_2 = Q \quad \Rightarrow \quad C_1 V + C_2 V = CV \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = C_1 + C_2}$$

Med N stk i parallell: $\boxed{C = \sum_{j=1}^{N} C_j}$

Eks 1:



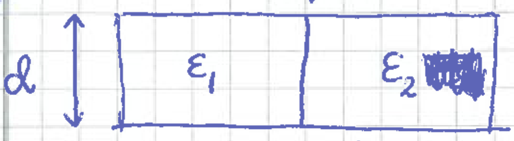
$C_j = 3, 4, 5, 6$ nF

Total $C = ?$

Løsn: $C = \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5+6} \right\}^{-1}$ nF $= \left\{ \frac{44+33+12}{3 \cdot 4 \cdot 11} \right\}^{-1}$ nF

$= \underline{\underline{\frac{132}{89} \text{ nF}}}$

Eks 2:



$C = ?$

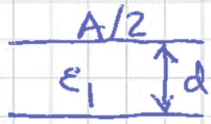
Løsn: Har konstant potensial på gitt leder, og dermed samme totale $\vec{E}$-felt i stoff 1 og 2. Ladningen $\pm Q$ fordeler seg slik at $E_1 = E_2$, dvs $\sigma_1/\varepsilon_1 = \sigma_2/\varepsilon_2$,
dvs $\sigma_1 = Q_1/(A/2) = \sigma_2 \cdot \varepsilon_1/\varepsilon_2 = [Q_2/(A/2)] \cdot \varepsilon_1/\varepsilon_2$,
som med $Q_1 + Q_2 = Q$ gir:

$$\sigma_1 \frac{A}{2} + \sigma_2 \frac{A}{2} = C \cdot V$$

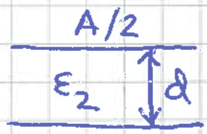
$$\Rightarrow \varepsilon_1 E_1 \frac{A}{2} + \varepsilon_2 E_2 \frac{A}{2} = CV \quad ; \quad E_1 = E_2 = \frac{V}{d}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C = \varepsilon_1 \frac{A/2}{d} + \varepsilon_2 \frac{A/2}{d}}}$$

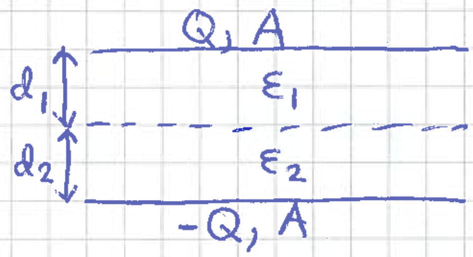
dvs: som parallellkobling av



og



Eks 3:



$C = ?$

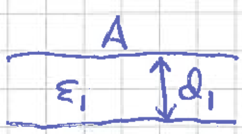
Løsn: Ladningen $\pm Q$ jevnt fordelt over hele A; $\sigma = Q/A$.
El. felt i stoff 1: $E_1 = \sigma/\varepsilon_1$; stoff 2: $E_2 = \sigma/\varepsilon_2$.

$$V = V_1 + V_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_2} d_2 = \frac{Q d_1}{\varepsilon_1 A} + \frac{Q d_2}{\varepsilon_2 A}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 A} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 A}}}$$

dvs: som seriekobling av



og