MEKANIKK (DYNAMIKK)

[YF 1-11, 14 ; LL 1-7, 9]

Størrelser og enheter [YF 1]

Eks: Masse, $m = 79.5$ kg

størrelse — symbol — tallverdi — enhet

Notasjon: $[m] = \text{kg}$ ("enhet til masse er kilogram")

SI-systemet:

Lengde:	$[d]$	=	m	(meter)
Masse:	$[m]$	=	kg	(kilogram)
Tid:	$[t]$	=	s	(sekund)
Strømstyrke:	$[I]$	=	A	(ampere)
Temperatur:	$[T]$	=	K	(kelvin)
Stoffmengde:	$[n]$	=	mol	

} Grunnenheter

Hastighet:	$[v]$	=	m/s
Akselerasjon:	$[a]$	=	m/s^2
Impuls:	$[p]$	=	kg m/s

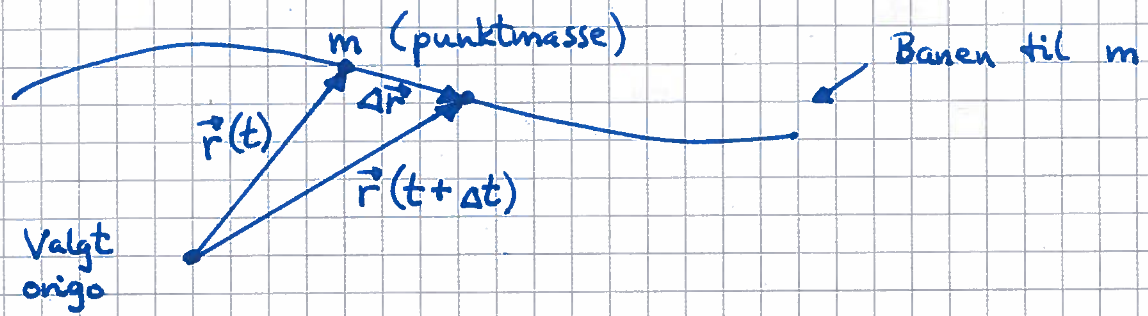
} Sammensatte enheter

Kraft:	$[F]$	=	kg m/s^2	=	N	(newton)
Energi:	$[W]$	=	Nm	=	J	(joule)
Effekt:	$[P]$	=	J/s	=	W	(watt)

} Avledete enheter

Kinematikk

[YF 2,3 ; LL 1]



$\vec{r}(t)$ = posisjonen til m ved tid t

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ = forflytningen i løpet av Δt

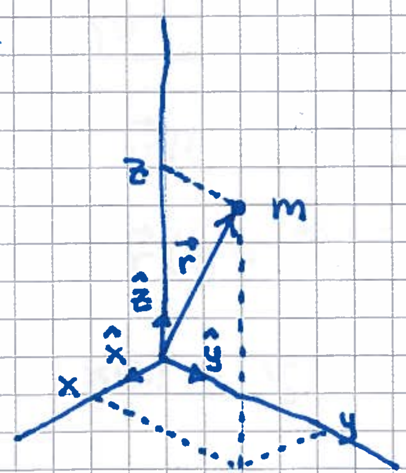
Hastighet (fart) $\stackrel{\text{def}}{=}$ forflytning pr tidsenhet

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{tangent til banen} ; \ \vec{v} \parallel \Delta\vec{r})$$

Akselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=}$ fartsendring pr tidsenhet

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (\vec{a} \parallel \Delta\vec{v})$$

Dekomponering :



Enhetsvektorer: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ (evt. $\vec{e}_x, \vec{i}, \ldots$)

$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$

$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1$ (dimensjonsløse)

$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$

$\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \ldots = 0$

(Senere: $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ osv.)

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = v_x = \dot{x} \quad \text{osv.}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{z} \quad ; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \dot{v}_x \quad \text{osv.}$$

Integrasjon gir $\vec{r}$ og $\vec{v}$ fra hhv $\vec{v}$ og $\vec{a}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$

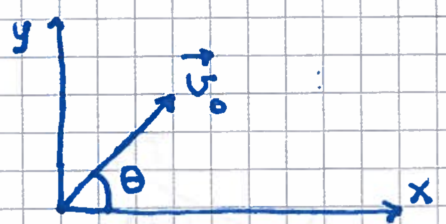
$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}\,dt \Rightarrow \ldots \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t)\,dt$$

Komponentvis: $x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t)\,dt$ osv.

$v_z(t) = v_z(0) + \int_0^t a_z(t)\,dt$ osv.

Eks: Skrått kast (i tyngdefeltet)



$\vec{a} = -g\,\hat{y}$; anta $\vec{r}(0) = 0$ og $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$

Finn $\vec{r}(t)$ og banen $y(x)$.

Løsn: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - g\hat{y}\int_0^t dt = \vec{v}_0 - gt\,\hat{y}$

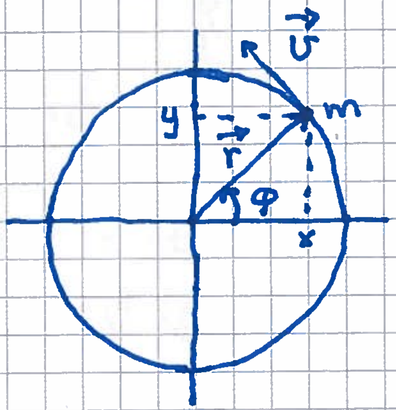
$$\vec{r}(t) = \int_0^t \{\vec{v}_0 - gt\,\hat{y}\}\,dt = \vec{v}_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2\,\hat{y}$$

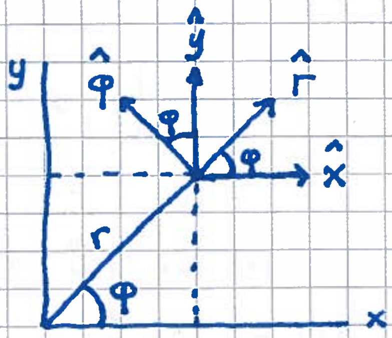
$$\Rightarrow x(t) = v_0 t\cos\theta \;, \quad y(t) = v_0 t\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Banen: $t(x) = x/v_0\cos\theta \Rightarrow y = v_0\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)\sin\theta - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2$

(dvs parabel)

Sirkelbevegelse [YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8]





Polarkoordinater:

r = avstand fra origo, φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\hat{r}$ (positiv mot klokka)

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi = \arctan(y/x)$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$

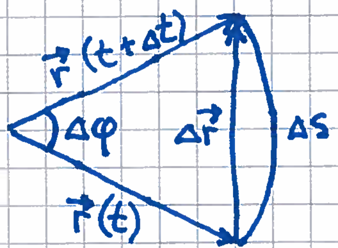
$$\vec{r} = \hat{x}\, r\cos\varphi + \hat{y}\, r\sin\varphi = r\hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi, \qquad \hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$

Vinkelhastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ omløpt vinkel pr tidsenhet:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad ; \quad [\omega] = s^{-1}$$

Vinkel $\stackrel{\text{def}}{=}$ buelengde / radius : $\Delta\varphi = \Delta s / r$



Når $\Delta t \to 0$:

$\Delta\varphi \to 0$, $\Delta r = |\Delta\vec{r}| \to \Delta s = r\,\Delta\varphi$

$\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$

$$\Rightarrow \quad v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega$$

$\vec{v} \parallel \Delta\vec{r} \perp \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{r}$ (som vi ser fra figuren)

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = v\hat{\varphi} = r\omega\hat{\varphi}$$

Uniform sirkelbevegelse : ω og v konstante

Anta $\varphi(0)=0$ $\Rightarrow$ $\int_0^\varphi d\varphi = \omega \int_0^t dt \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = \omega t}$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \hat{x}\, r \cos \omega t + \hat{y}\, r \sin \omega t$$
$$\vec{v}(t) = -\hat{x}\, r\omega \sin \omega t + \hat{y}\, r\omega \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{a}_\perp(t) = -\hat{x}\, r\omega^2 \cos\omega t - \hat{y}\, r\omega^2 \sin \omega t$$
$$= -\omega^2 \vec{r} = -\omega^2 r\, \hat{r} = (-v^2/r)\, \hat{r}$$

som kalles sentripetalakselerasjonen, rettet inn mot sirkelens sentrum

Hvis v og ω endrer seg :

$a_\parallel = \dot{v} = r\dot{\omega}$ = baneakselerasjonen

Vinkelakselerasjon: $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$; $[\alpha] = s^{-2}$

Total akselerasjon: $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel = -r\omega^2\, \hat{r} + r\dot{\omega}\, \hat{\varphi}$

Periode: T = omløpstid ; $[T] = s$

Frekvens : f = antall runder (omløp) pr tidsenhet;
$[f] = s^{-1}$ = Hz (herz)

Div. sammenhenger:

$v = 2\pi r/T \Rightarrow T = 2\pi r/v = 2\pi/\omega$

$f = 1/T = \omega/2\pi$