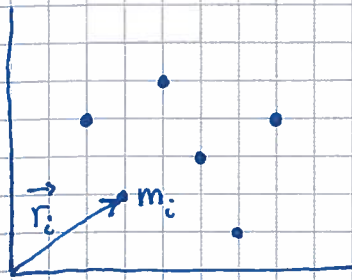


Partikkelssystem. Stive legemer. Rotasjonsdynamikk

(25)

Massecenter

[YF 8.5 + oppg. 8.115 og 116 ; LL 5.6, 5.8, 6.1]



Massecenter (CM) for N punktmasser

m_1, m_2, \dots, m_N i pos. $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i ; \quad M = \sum_i m_i = \text{total masse}$$

Hvis kontinuerlig massefordeling: $m_i \rightarrow dm$; $\sum_i \rightarrow \int$

$$\Rightarrow \vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm ; \quad M = \int dm$$

3D : $dm = \rho \cdot dV$

2D: $dm = \sigma \cdot dA$

1D: $dm = \lambda \cdot dl$

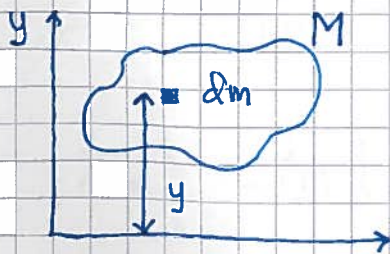
der

ρ, σ, λ = masse pr hhv volum-, flate- og lengdeenhet

dV, dA, dl = hhv volum-, flate- og lengdeelement

Nyttig tips: Hvis massefordelingen er uniform, er $\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V}$ osv

Potensiell energi i tyngdefeltet ; tyngdepunkt



Velger $U(0) = 0$. Da er :

$$U = \int dU = \int g \cdot y \cdot dm$$

Som regel er g konstant i hele systemet ;

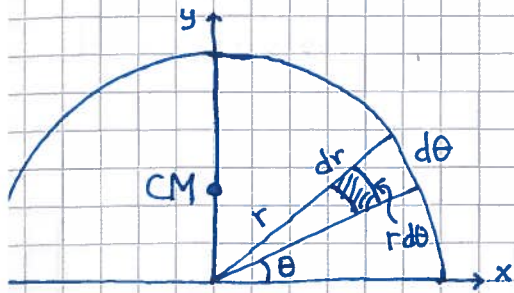
da blir $U = g \int y dm = g \cdot M \cdot Y_{cm}$, dvs total pot. energi, som om hele massen M var samlet i høyden Y_{cm} (f.eks. i \vec{R}_{cm}).

Da er tyngdepunktet ("center of gravity" ; der legemet vil balansere uten å rotere) samme sted som massecenteret.

Beregning av \vec{R}_{CM} ; et par eksempler.

(26)

Eks 1: Halvparten av tynn skive med radius R .



$$\vec{R}_{CM} = Y_{CM} \hat{y} \quad (X_{CM} = 0 \text{ pga symmetri})$$

med

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA$$

(Husk: $dm/M = dA/A$; uniform massefordeling)

$$A = \frac{1}{2} \cdot \pi R^2 ; \quad dA = dr \cdot r d\theta ; \quad y = r \sin \theta$$

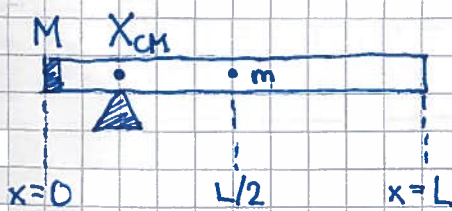
Integrasjonsgrenser : $0 < r < R ; \quad 0 < \theta < \pi$

(for å få med hele skiva!)

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y_{CM} &= \frac{2}{\pi R^2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} r \sin \theta \cdot dr \cdot r d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 \cdot \int_0^{\pi} (-\cos \theta) = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R \end{aligned}$$

[Vis at, for "halv ring" : $Y_{CM} = \frac{2R}{\pi}$; for komplett halvkule : $Y_{CM} = \frac{3R}{8}$]

Eks 2: Rør med lodd i enden



$$m = 165g, \quad M = 305g$$

$$X_{CM} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + \underbrace{\int_0^L x \cdot \frac{dm}{L}}_{= \frac{1}{2} mL} \right\} = \frac{mL}{2(m+M)} \approx 0.18L$$

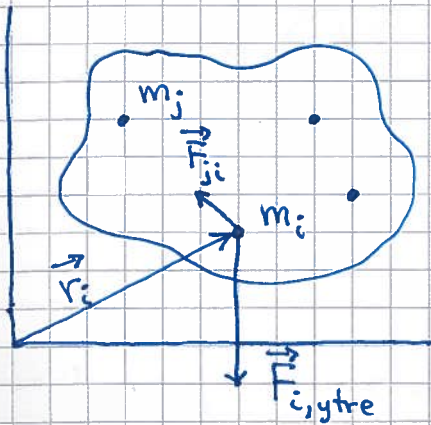
N2 for \vec{R}_{CM}

[YF 8.5 ; LL 5.8]

(27)

Kastforsøk med plastrør antyder at CM beveger seg som om hele massen M var samlet i CM. [Parabelbane, se s. 3]

Bevis:



N2 for m_i :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_{i,ytre}}_{\text{Total ytre kraft p\aa } m_i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{j,i}}_{\text{Total indre kraft p\aa } m_i}$$

Legg sammen N2 for alle $i = 1, 2, \dots, N$:

Venstre side:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ M \vec{R}_{CM} \right\} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

Høyre side:

$$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{Total ytre kraft p\aa hele systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j,i} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N} = 0; \text{ pga N3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ytre} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}}$$

Dvs: Tyngdepunktets bevegelse blir som om hele massen M var samlet i \vec{R}_{CM} og ble utsatt for summen av alle ytre krefter \vec{F}_{ytre} !

I tillegg, for stive legemer: Rotasjon om CM.

Dessuten, for "ikke helt stive legemer": Vibrasjon om CM.

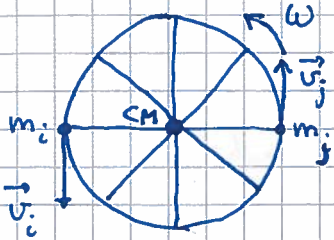
Rotasjon

[YF 9, 10 ; LL 6 (5)]

(28)

Innledende observasjoner med "sykkelhjul" :

- Ren rotasjon



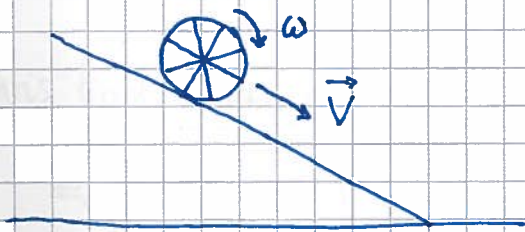
$$\text{CM i ro: } K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M (\dot{\vec{R}}_{\text{CM}})^2 = 0$$

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$$

$$\text{Men: } K_{\text{rot}} \neq 0$$

$$\vec{L} \neq 0 \quad (\text{Dreieimpuls; kommer!})$$

- Rulling = translasjon av CM + rotasjon om CM

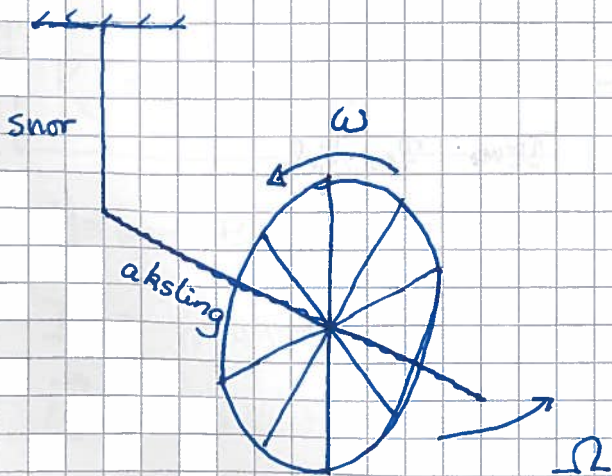


$$\text{Krefter} \parallel \text{skråplanet} \Rightarrow \dot{v} > 0$$

$$\text{Dreiemoment} \llcorner \text{mhp CM} \Rightarrow \dot{\omega} > 0$$

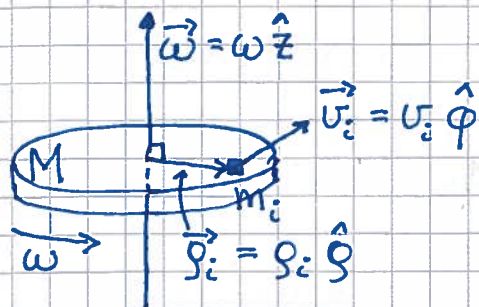
(kommer!)

- Komplex dynamikk



Preesjon (gyroskop)

Rotasjonsenergi ; Tregghetsmoment [YF 9.4; LL 6.4, 6.3] (29)



$\vec{\omega}$ peker langs rotasjonsaksen

ρ_i = avstand fra rot.aksen til m_i

$v_i = \rho_i \omega$ (fra før)

$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$ (fra figur)
(+ høyrehandsregel)

[Sylinderkoordinater = Polarkoord. (ρ, φ) og z]

$$K = K_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

med $I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \rho_i^2 =$ legemets tregghetsmoment mhp valgt (gitt) akse

Hvis kontinuerlig massefordeling: $m_i \rightarrow dm, \sum \rightarrow \int$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int \rho^2 dm}$$
 der $\rho =$ avstand fra akse til dm

Total kin. energi for stivt legeme [YF 10.3; LL 6.6]

Fra $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ utledes generelt [Se notat; ikke pensum]

$$\boxed{K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

med $M =$ legemets masse; $\vec{V} = \vec{v}_{\text{CM}} =$ hastigheten til CM;

$I_0 =$ tregghetsmoment mhp rot.aksen gjennom CM;

$\vec{\omega} =$ vinkelhastigheten om " " " "

Eks (Lab 1): Rullende ring



"Ren rulling": $V = \omega R$

I_0 for noen objekter

[YF 9.6; LL 6.3]

(30)

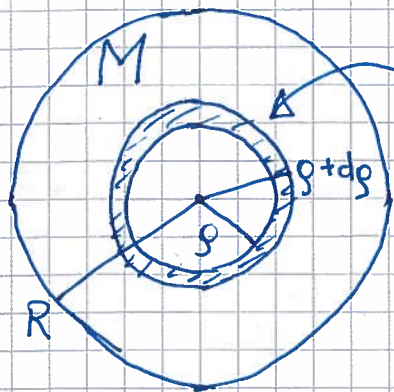
- Ring; Hal sylinder



$$I_0 = \int r^2 dm = R^2 \int dm = \underline{MR^2}$$

[Oppgis ikke til eksamen]

- Skive; Kompakt sylinder

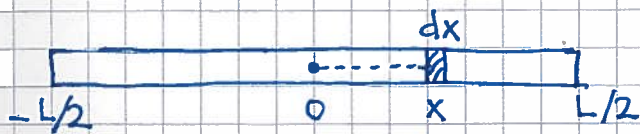


$$\begin{aligned} dI_0 &= r^2 dm = r^2 M \frac{dA}{A} \\ &= r^2 M \frac{2\pi r dr}{\pi R^2} = \frac{2M}{R^2} r^3 dr \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} MR^2$$

[Oppgis]

- Tynn stang, akse \perp stanga og gjennom CM

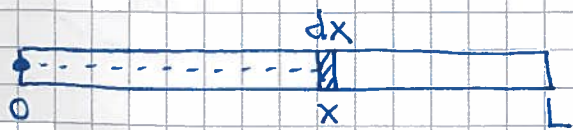


$$r = x, \quad dm = M \cdot \frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 M dx / L = \frac{M}{L} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-L/2}^{L/2} = \underline{\frac{1}{12} ML^2}$$

[Oppgis]

- Tynn stang, akse gjennom stangas ende



$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \underline{\frac{1}{3} ML^2}$$

[Oppgis ikke]
[Se s. 31]

- Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$

- Kule (kompakt): $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

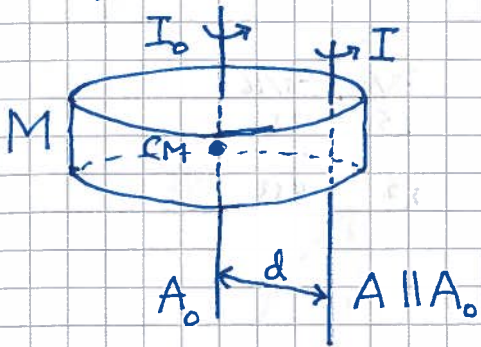
[Oppgis]

Steiners sats

[YF 9.5 ; LL 6.3]

(31)

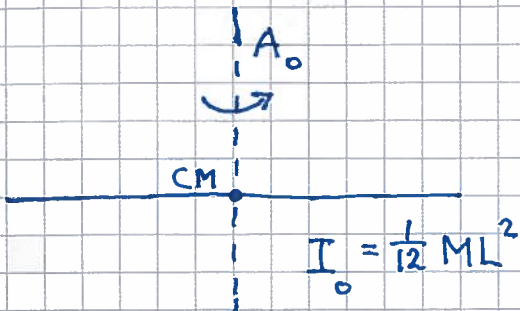
(=parallelakseteorem)



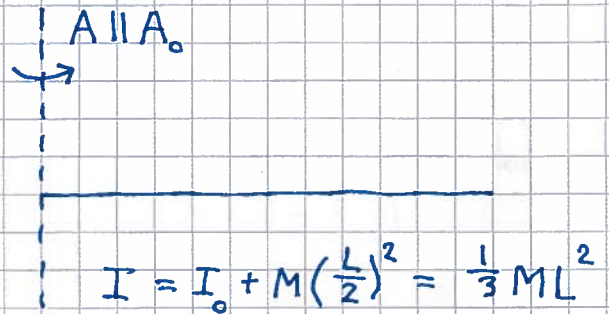
$$I = I_0 + Md^2$$

[Se notat for utledning]

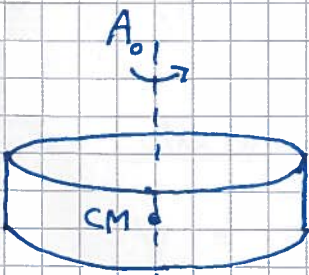
Eks 1 : Tynn stang (se s. 30)



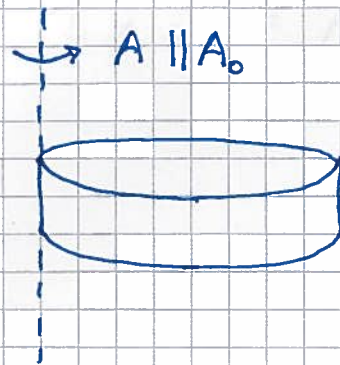
$$d = L/2 \Rightarrow$$



Eks 2 : Kompakt skive



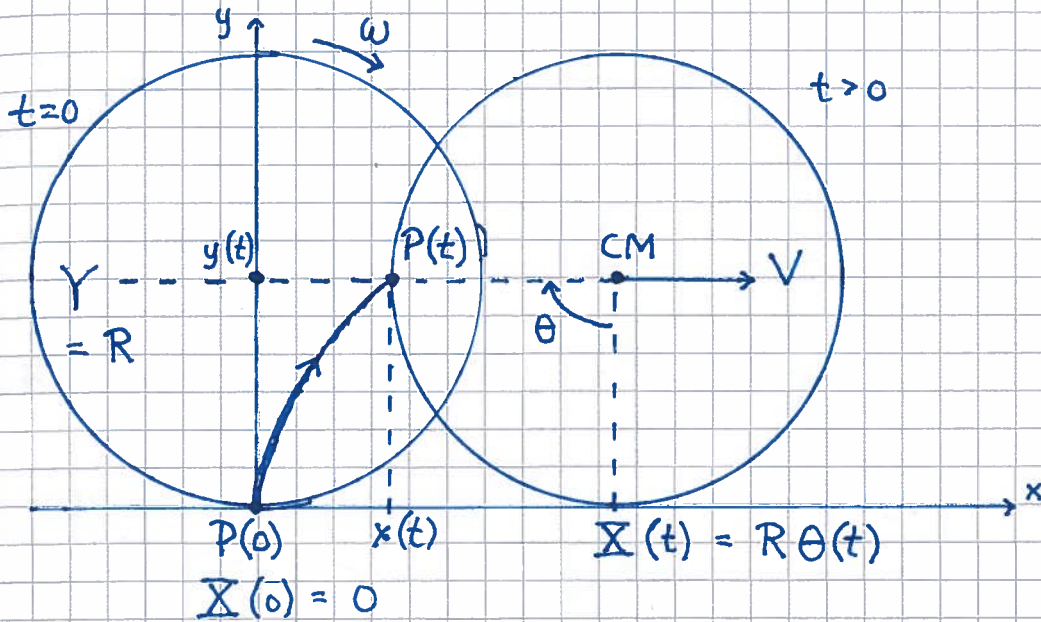
$$d = R \Rightarrow$$



$$I_0 = \frac{1}{2} MR^2$$

$$I = I_0 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$$

Ren rulling [YF 10.3 ; LL 6.7]



$P(t) = (x(t), y(t))$
 = punkt på
 periferien

$P(0) = (0, 0)$

Ser fra figur: $x(t) = X(t) - R \sin \theta(t) = R[\theta - \sin \theta]$
 $y(t) = Y(t) - R \cos \theta(t) = R[1 - \cos \theta]$ } sykkloide

Bevægelsen til CM:

$$\begin{aligned} \vec{R}_{cm} &= X \hat{x} + Y \hat{y} = R\theta \hat{x} + R \hat{y} \\ \vec{V} &= \dot{\vec{R}}_{cm} = R\dot{\theta} \hat{x} = R\omega \hat{x} = V \hat{x} \\ \vec{A} &= \dot{\vec{V}} = R\ddot{\theta} \hat{x} = R\dot{\omega} \hat{x} = R\alpha \hat{x} = A \hat{x} \end{aligned}$$

Som er rullebetingelsene:

$V = R\omega, \quad A = R\alpha$

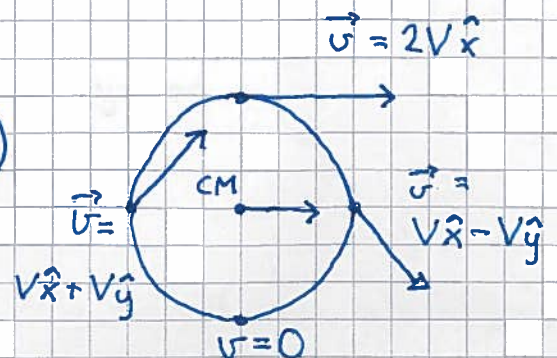
Hastighet på periferien:

$$\vec{U} = \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y}$$

med

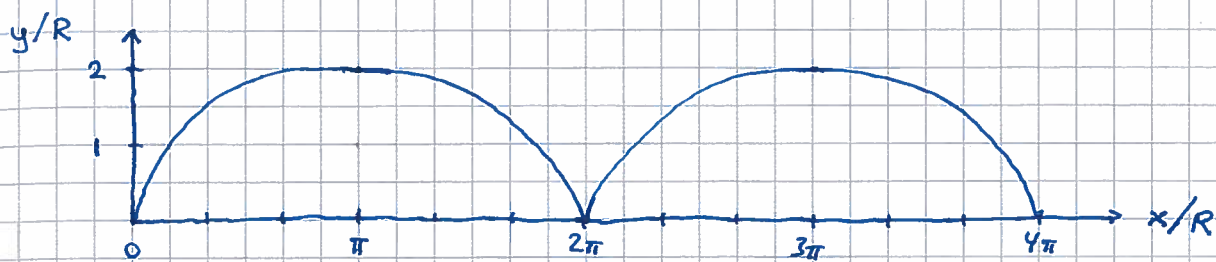
$$\dot{x} = R\dot{\theta} - R\dot{\theta} \cos \theta = V(1 - \cos \theta)$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta} \sin \theta = V \sin \theta$$

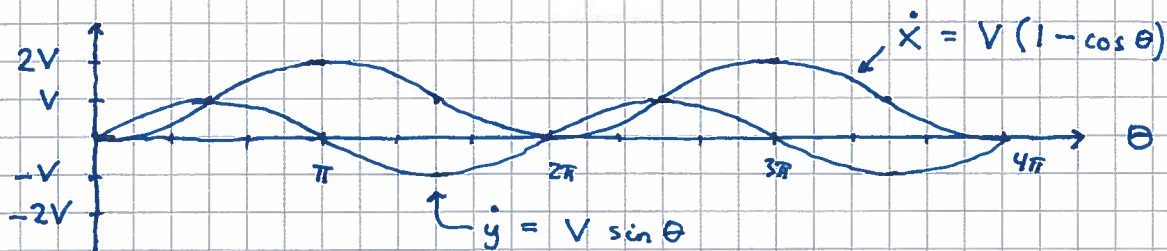


Banen til P : $x = R(\theta - \sin\theta)$, $y = R(1 - \cos\theta)$

(33)



Fartskomponentene til P (der vi antar $V = \text{konst.}$) :



Vi ser at $v = 0$ når $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$
 dvs når P er i kontakt med underlaget

$$\Rightarrow P_f = dW_f / dt = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$$

\Rightarrow Null tap av mekanisk energi ved ren rulling, selv om $f \neq 0$.

Vi har her statisk friksjon : $f_s \leq \mu_s \cdot N$

Rullefriksjon : Litt tap av mekanisk energi ved ren rulling,
 pga deformasjon (kompresjon, ekspansjon, kompresjon, ...) av rullende objekt og underlag i kontaktflaten.

Vi neglisjerer som regel rullefriksjonen i oppgaver med ren rulling.

På laben : Tap av mek. energi pga luftmotstand og rullefriksjon, og ert. skning, hvis banen blir for bratt.

Kin. energi ved ren rulling: [YF 10.3; LL 6.6, 6.7]

34

$$K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

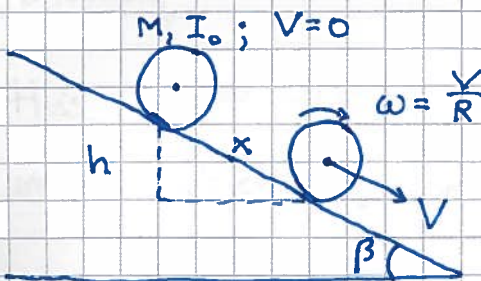
$$I_0 = c \cdot MR^2 \quad \text{med } c=1 \text{ for ring, } \frac{2}{5} \text{ for kompakt kule osv}$$

$$\omega = V/R \quad (\text{rullebetingelsen})$$

$$\Rightarrow \boxed{K = (1+c) \cdot \frac{1}{2} MV^2}$$

Rulling på skråplan

[YF 10.3; LL 6.8]



Bestem: V , \dot{V} , friksjonskraften f ,
og minste μ_s (evt. største β)
som gir ren rulling.

$$(I_0 = c \cdot MR^2)$$

$$\text{Exp: } V_{\text{kule}} > V_{\text{skive}} > V_{\text{kuleskall}} > V_{\text{hul-sylinder}}$$

$$\text{Ren rulling} \Rightarrow K = (1+c) \frac{1}{2} MV^2 = -\Delta U = Mgh = Mg x \sin \beta$$

$$\Rightarrow V(x) = \sqrt{\frac{2gx \sin \beta}{1+c}}$$

Dvs: Størst V og \dot{V} for objekt med minst c , som observert!

Akselerasjon:

$$\dot{V} = dV/dt = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2g \sin \beta}{1+c}} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} \cdot V = \underline{\underline{\frac{g \sin \beta}{1+c}}}$$

Uten friksjon ville $\vec{F}_{\parallel} = Mg \sin \beta$, dvs $\dot{V} = g \sin \beta$.

Dvs: Friksjon f har retning oppover skråplanet og gir $\dot{V} < g \sin \beta$.

$$N_2 \parallel \text{skråplan: } Mg \sin \beta - f = M \dot{V}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta}}$$

Ren rulling forutsetter at $f \leq f_{\max} = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot Mg \cos \beta$ (35)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu_s \geq \frac{c}{1+c} \tan \beta}}$$

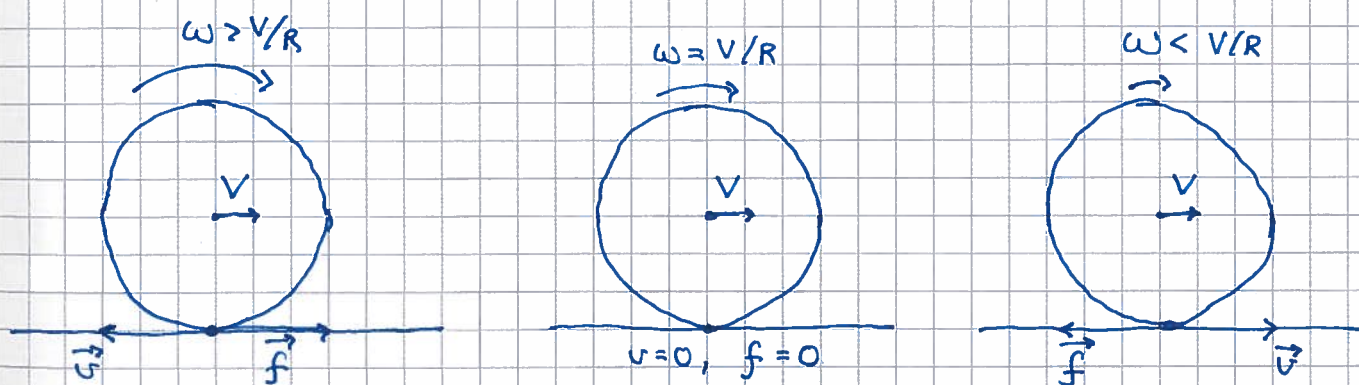
Stål mot plast gir $\mu_s \sim 0.2$ (litt avhengig av typen plast).

\Rightarrow Stålkule (på kb) vil bare rulle rent dersom

$$\beta \leq \arctan \left\{ \mu_s \cdot \frac{1+c}{c} \right\} = \arctan \left\{ 0.2 \cdot \frac{7/5}{2/5} \right\} = \arctan(0.7) = \underline{\underline{35^\circ}}$$

Sluring [LL 6.7]

Hvis $\omega \neq v/R$, blir det en relativ hastighet $v = v - \omega R$ mellom objekt og underlag i kontaktpunktet:



Her har vi kinetisk friksjon: $f = \mu_k \cdot N$

Tapt mek. energi pr tidsenhet: $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$