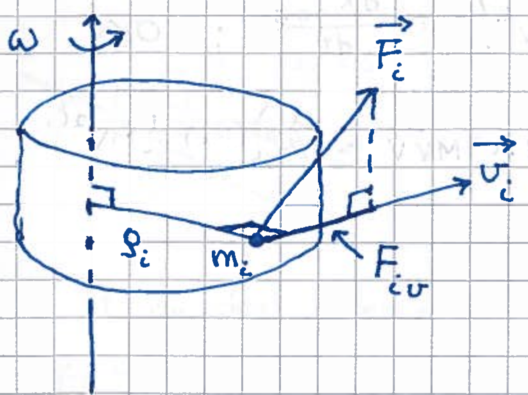
Rotasjonsdynamikk

Akse med fast orientering

- Dekker svært mange problemstillinger [F.eks. labprosjektet]
- Er i realiteten et endimensjonalt problem
- Beskriver rotasjonsdelen av legemets totale bevegelse



$$v_i = \rho_i \, \omega$$

F_{iv} = komponenten av ytre kraft $\vec{F}_i$ på m_i, langs $\vec{v}_i$

Triks: Regn ut tilført effekt, $P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$, på to måter!

(1) Bruker N2:

(se s. 17)

$$P = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I \frac{d\omega^2}{dt} = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = \underline{I \omega \dot{\omega}}$$

(2) Bruker (kun) $v_i = \rho_i \, \omega$:

$$P = \sum_i F_{iv} v_i = \left\{ \sum_i F_{iv} \rho_i \right\} \omega = \underline{\tau \omega}$$

Dette gir N2 for rotasjon om akse med fast orientering,

$$\boxed{\tau = I \dot{\omega}}$$

[Jf. N2 for translasjon: $\vec{F} = m\dot{\vec{v}}$]

med

$\tau = \sum_i F_{iv} \rho_i$ = ytre dreiemoment på legemet, mhp rot. aksen

$I = \sum_i m_i \rho_i^2$ = legemets treghetsmoment, mhp rot. aksen

Arbeid utført av dreiemomentet

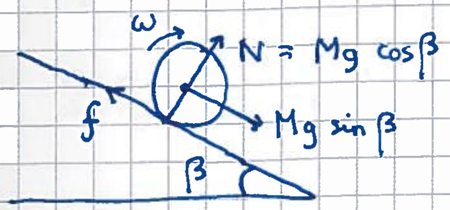
[YF 10.4 ; LL 6.4]

Fra $P = \tau\omega = \tau \frac{d\varphi}{dt}$ og $P = \frac{dW}{dt}$ følger direkte

$$\boxed{dW = \tau\, d\varphi}$$

[Jf. translasjon: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$]

Eks 1: Rulling på skråplan (se s. 34)



$\omega = V/R$, $\dot{\omega} = \dot{V}/R$ (rullebetingelser)

$I_0 = c \cdot MR^2$

N2 for rot. om aksen gjennom CM: $\tau = I_0\, \dot{\omega}$; $\tau = f \cdot R$

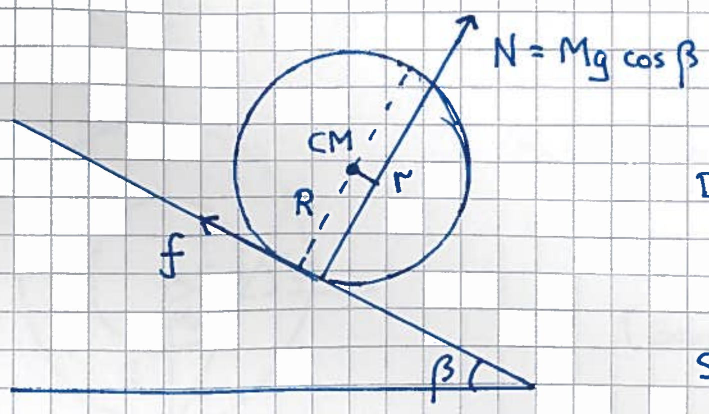
$\Rightarrow \quad f \cdot R = cMR^2 \cdot \dot{V}/R \quad \Rightarrow \quad f = cM\dot{V}$

N2 for transl. langs skråplanet: $Mg \sin\beta - f = M\dot{V}$

Innsetting av $f = cM\dot{V}$ og løsn. mhp $\dot{V}$ gir $\underline{\dot{V} = g \sin\beta/(1+c)}$, som s. 34

Labprosjektet (uavhengig av valgt problemstilling):

- Varierende helningsvinkel $\beta(x)$
- Reprodusere målt bevegelse med numerisk løsning av $\dot{V} = \Sigma F_{\parallel}/M$
  $\Rightarrow$ må (trolig) ta hensyn til rullefriksjon og/eller luftmotstand
- Rullefriksjon hvis N ikke passerer gjennom CM:



Dreiemoment mhp akse gjennom CM:

$\tau = f \cdot R - N \cdot r$; $\frac{r}{R} \ll 1$

Stål mot plast: $r/R \sim 10^{-2}$ (?)

NB: f er "ordinær" friksjon ; statisk ved ren rulling

rullefriksjonen "representeres" ved normalkraftens dreiemoment $N \cdot r$

- Numerisk modellering :

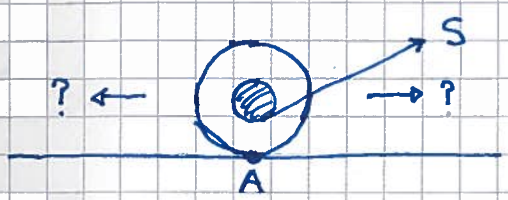
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\Sigma F_{\parallel}}{M} \longrightarrow \Delta V = \frac{\Sigma F_{\parallel}}{M} \cdot \Delta t$$

<u>Med</u> rullefriksjon blir $f = c M\dot{V} + \frac{r}{R} Mg \cos\beta$ (vis dette !)

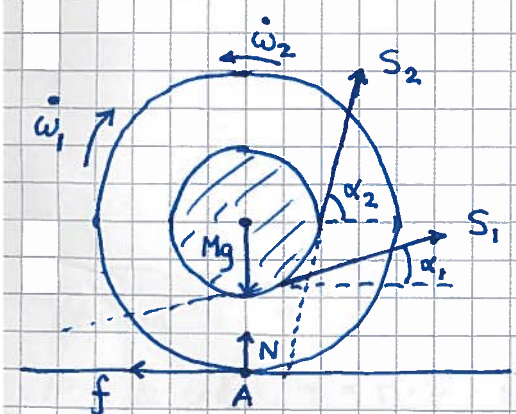
Inkluderes i tillegg luftmotstand f_ℓ, på formen $k \cdot V$ (lave hastigheter; $Re < 2000$) eller DV^2 ($Re > 4000$), se s. 12–13, blir

$$\Sigma F_{\parallel} = \frac{Mg}{1+c}\left\{\sin\beta - \frac{r}{R}\cos\beta\right\} - \frac{f_\ell}{1+c} \qquad \text{(vis dette !)}$$

Eks 2: Snelle ; hvilken vei ruller den ?



Triks: Velg kontaktlinja mellom snelle og underlag som referanseakse A.



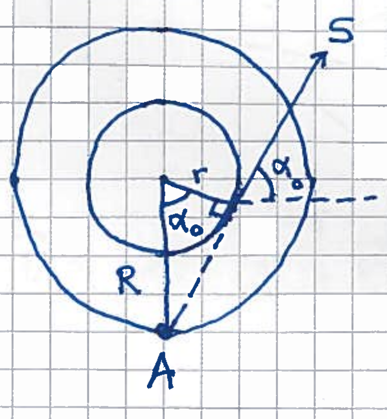
Mg, N og f har <u>null arm</u> mhp aksen A

$\Rightarrow$ Kun snordraget S kan ha dreiemoment mhp aksen A.

(1) Liten α : Ruller mot høyre

(2) Stor α : —"— venstre

Hvis $\vec{S}$ også går gjennom A, har vi statisk likevekt : $\Sigma \tau_A = 0$



Fra fig. ser vi : $\cos\alpha_0 = \frac{r}{R}$

[Extraspm: Vis at snella <u>glir</u> dersom

$$S > \frac{\mu_s Mg}{\cos\alpha_0 + \mu_s \sin\alpha_0}$$]

Rotasjonsdynamikk med vektorstørrelser

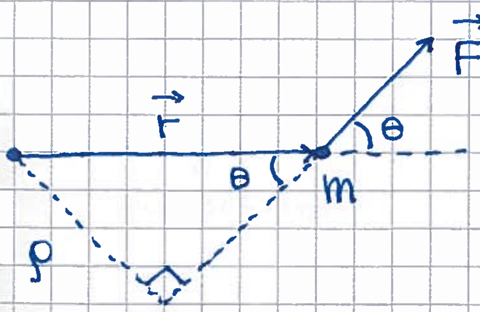
Innledende merknad:

Dreiemoment $\vec{\tau}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ beregnes relativt et fritt valgt referansepunkt $\vec{r}_0$. (Jf. pot. energi U.)

Vi velger origo som ref. punkt, dvs $\vec{r}_0 = 0$.
Posisjonen til en punktmasse relativt ref.punktet blir da $\vec{r}$.
Med et annet valg for $\vec{r}_0$ blir massens posisjon relativt ref. punktet $\vec{r} - \vec{r}_0$.

Dreiemoment

[YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



Kraften $\vec{F}$ sitt dreiemoment på m:

$$\boxed{\vec{\tau} \overset{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F}}$$

Retning : $\vec{\tau} \perp \vec{r}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ (Her: $\vec{\tau}$ ut av planet)

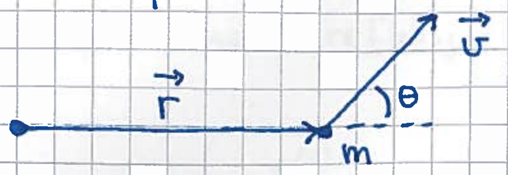
Absoluttverdi: $\tau = r \cdot F \cdot \sin\theta = F \cdot \rho$ ("kraft ganger arm", som s. 36)

For partikkelsystem (f.eks. et stivt legeme):

$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \text{totalt dreiemoment på systemet}$$

Dreieimpuls [YF 10.5 ; LL 6.6]

(alias spinn)

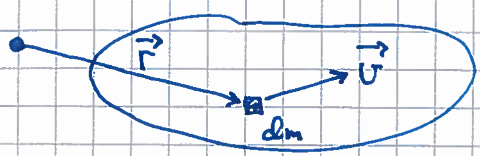


$\vec{p} = m\vec{v}$

Dreieimpulsen til m : $\boxed{\vec{L} \overset{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p}}$

Retning: $\vec{L} \perp \vec{r}$ og $\vec{L} \perp \vec{p}$. Abs.verdi: $L = rp\sin\theta = p\varrho$ (se s.39)

For partikkelsystem (f.eks. stivt legeme) :



$d\vec{p} = \vec{v}\, dm$

$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v}\, dm$ = systemets totale dreieimpuls

N2 for rotasjon [YF 10.5 ; LL 6.6]

(alias spinnsatsen)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\{\vec{r} \times m\vec{v}\} = m\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{= \vec{v} \times \vec{v} = 0} + m\vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{= \vec{a}}$$

$$\overset{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F} \overset{(\text{def})}{=} \vec{\tau}$$

[Tilsv. bevis for partikkelsystem]

Dvs :

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

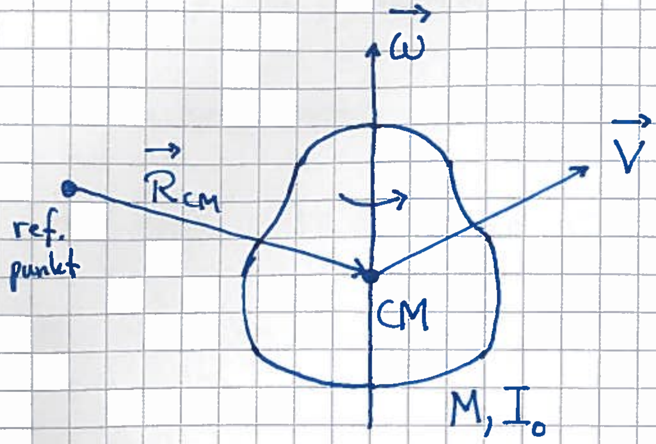
med $\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på systemet

$\vec{L}$ = systemets totale dreieimpuls

[Jf. $\vec{F} = d\vec{p}/dt$; N2 for translasjon]

$\vec{L}$ for stivt legeme [YF 10.5 ; LL 6.6]

Antar legeme med refleksjonssymmetri om rotasjonsaksen:



Fra definisjonen,

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v}\, dm,$$

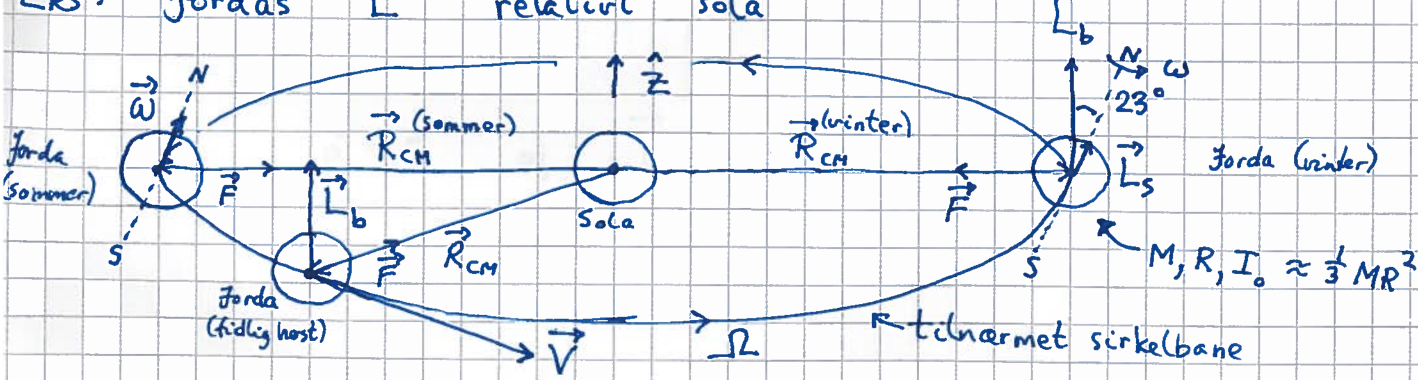
via et litt kronglete bevis (se notat!) følger et overraskende enkelt resultat! (Jf. $K = K_{trans} + K_{rot}$)

$$\boxed{\vec{L} = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0\,\vec{\omega}}$$

Banedreieimpuls: $\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$ (som om hele M var i posisjon $\vec{R}_{CM}$ med hastighet $\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$)

Indre dreieimpuls: (spinn) $\vec{L}_s = I_0\,\vec{\omega}$ (uavh. av valg av ref.pkt.)

Eks: Jordas $\vec{L}$ relativt sola



$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0\,\vec{\omega} = R_{CM} M V \hat{z} + I_0\,\vec{\omega}$$ (= konstant; ($\dot{\vec{z}} = 0$))

$R_{CM} \sim 1.5 \cdot 10^{11}$ m, $M \sim 6 \cdot 10^{24}$ kg, $V = R_{CM}\,\Omega$, $\Omega = 2\pi$ pr år

$R \sim 6.37 \cdot 10^{6}$ m, $\omega = 2\pi$ pr døgn

$\Rightarrow L_b \sim 2.7 \cdot 10^{40}$ Js, $L_s \sim 6 \cdot 10^{33}$ Js ($\ll L_b$)

Bevaringslover oppsummert

- I et isolert system (ingen ytre krefter) er total energi E, impuls $\vec{p}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ bevart
- I et konservativt system er mekanisk energi $K + U$ bevart
- Hvis netto ytre kraft på et system er null, er total impuls $\vec{p}$ bevart
- Hvis netto ytre dreiemoment på et system er null, er total dreieimpuls $\vec{L}$ bevart

---

Statisk likevekt [YF 11.1 - 11.3 ; LL 7.1]

Et stivt legeme forblir i ro ($\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$)
bare når netto ytre kraft og netto ytre dreiemoment er null:

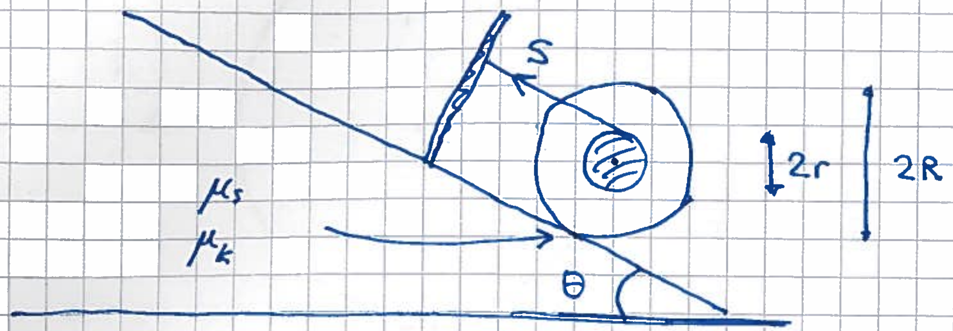
$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{konstant}$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{konstant}$$

f. eks. $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$

Eksempler, rotasjonsdynamikk

Eks 1 : Snelle på skråplan [Øving 6]



- Max vinkel θ_0 uten at snella slurer "baklengs" nedover skråplanet ?

- Hvis $\theta > \theta_0$, hva er snordraget S og akselerasjonen a ?

Tips:

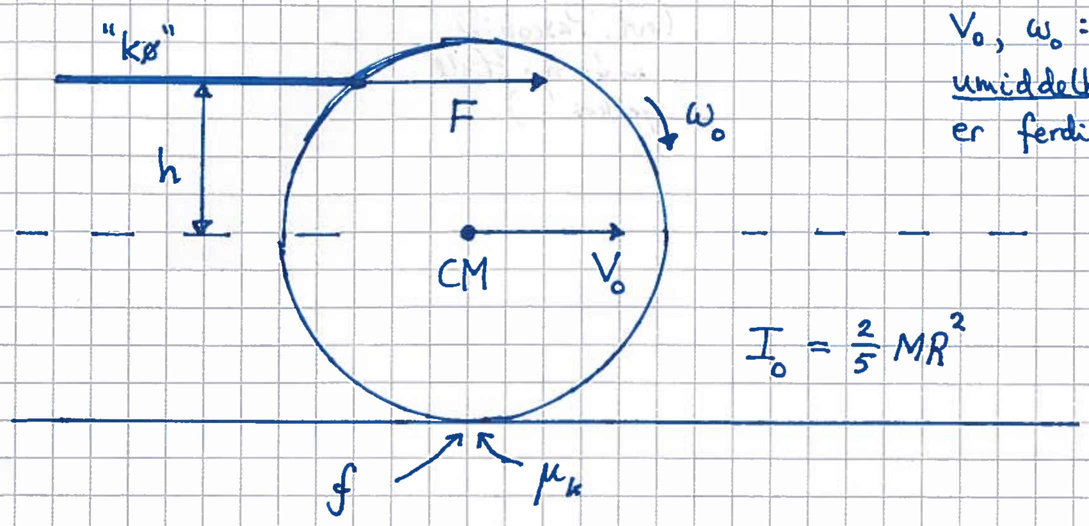
- N1 ∥ skråplan, N1 for rot. om CM, $f = f_{max} = \mu_s N$

  $\Rightarrow \theta_0$

- N2 ∥ skråplan, N2 for rot. om CM, $f = \mu_k N$

  $\Rightarrow S$ og a

Eks 2: Snooker [LL 6.7 ; øving 6]



V_0, ω_0: Hastighet, vinkelhast. <u>umiddelbart</u> etter at støtet er ferdig. Støtets varighet: Δt

Bestem kulas bevegelse!

Anta kortvarig støt i høyde h over senterlinja (evt. <u>under</u>; $h<0$).

Anta at friksjonskrafta f kan neglisjeres i selve støtet ($F \gg f$).

Tips:

N2 for transl. samt rotasjon om CM gir relasjon mellom V_0 og ω_0.

$$F = \Delta p / \Delta t \Rightarrow F \cdot \Delta t = \Delta p = M V_0$$

$$\tau = \Delta L / \Delta t \Rightarrow \tau \cdot \Delta t = \Delta L \Rightarrow F \cdot h \cdot \Delta t = I_0 \omega_0$$

Stor h : $\omega_0 > \frac{V_0}{R}$ ("topp-spinn") $\Rightarrow$ sluring og $\vec{f}$ mot høyre (<u>etter</u> støtet)

Liten (evt. negativ) h : omvendt ("underskru")

"Passelig" h = ... $\Rightarrow$ $\omega_0 = V_0/R$ og ren rulling fra start ($f=0$)

Vansett : ren rulling etter hvert!

[google gjerne worlds fastest 147]