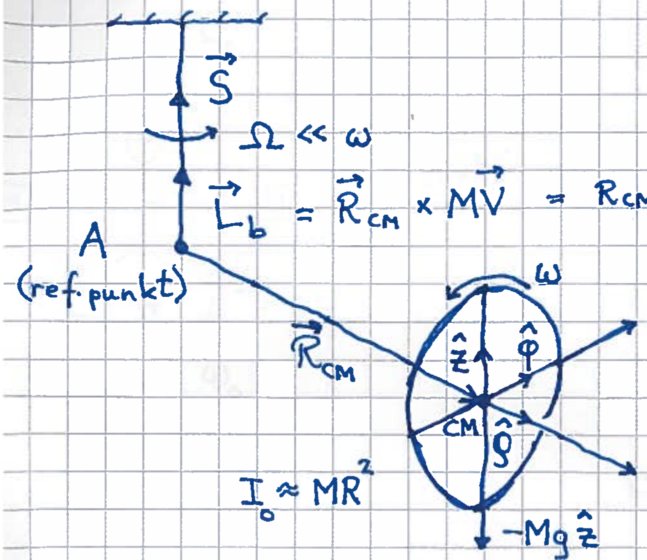
Eks 3: Presesjon [YF 10.7 ; LL 6.10]



$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = R_{CM} M V \,\hat{\rho} \times \hat{\varphi} = M R_{CM}^2 \Omega \,\hat{z}$$

$$\vec{V} = V\hat{\varphi} = R_{CM}\Omega\,\hat{\varphi}$$

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} = MR^2 \omega\,\hat{\rho}$$

Sykkelhjul: $M = 5$ kg, $R = 0.3$ m, $R_{CM} = 0.2$ m, $T_\Omega = \dfrac{2\pi}{\Omega} =$ ______

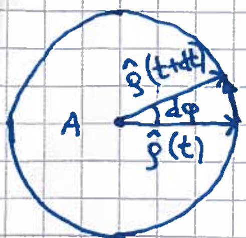
Finn $T_\omega = 2\pi/\omega$ uttrykt ved T_Ω (og øvrige størrelser).

Løsning: Bruker N2 for rotasjon relativt A, $\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A/dt$.

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} M g \,[\hat{\rho} \times (-\hat{z})] = R_{CM} M g\,\hat{\varphi}$$

$$\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M R_{CM}^2 \Omega\,\hat{z} + MR^2\omega\,\hat{\rho} \overset{\omega \gg \Omega}{\approx} MR^2 \omega\,\hat{\rho}$$

$$\Rightarrow d\vec{L}_A/dt = MR^2 \omega \, d\hat{\rho}/dt$$



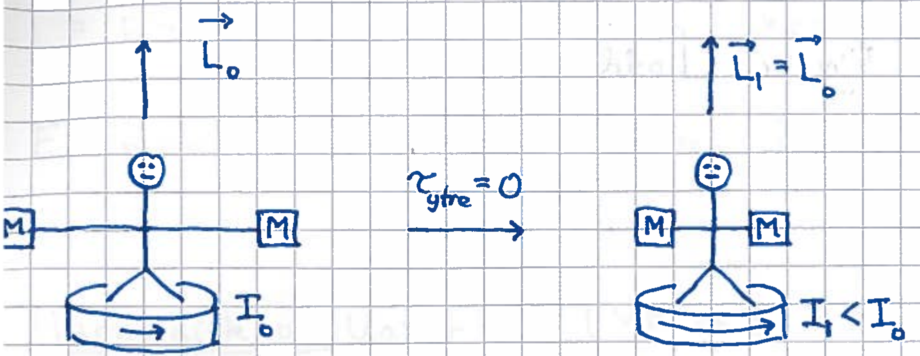
$$d\hat{\rho} = 1 \cdot d\varphi \cdot \hat{\varphi} \Rightarrow \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} = \Omega\,\hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow R_{CM} M g\,\hat{\varphi} = MR^2 \omega \Omega\,\hat{\varphi} \Rightarrow \omega = \frac{R_{CM}\, g}{R^2 \Omega}$$

$\Rightarrow$ Hjulets omløpstid: $T_\omega = \dfrac{(2\pi R)^2}{R_{CM}\, g\, T_\Omega}$

$$\approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot T_\Omega} \approx \frac{2\ s^2}{T_\Omega} \approx \underline{\underline{\qquad\ s}}$$

Eks 4 : Piruett [YF 10.6 ; LL 6.5]



$$I_1 \omega_1 = I_0 \omega_0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{I_0}{I_1} \omega_0 > \omega_0$$

$L_0 = I_0 \omega_0$ $\qquad$ $L_1 = I_1 \omega_1$

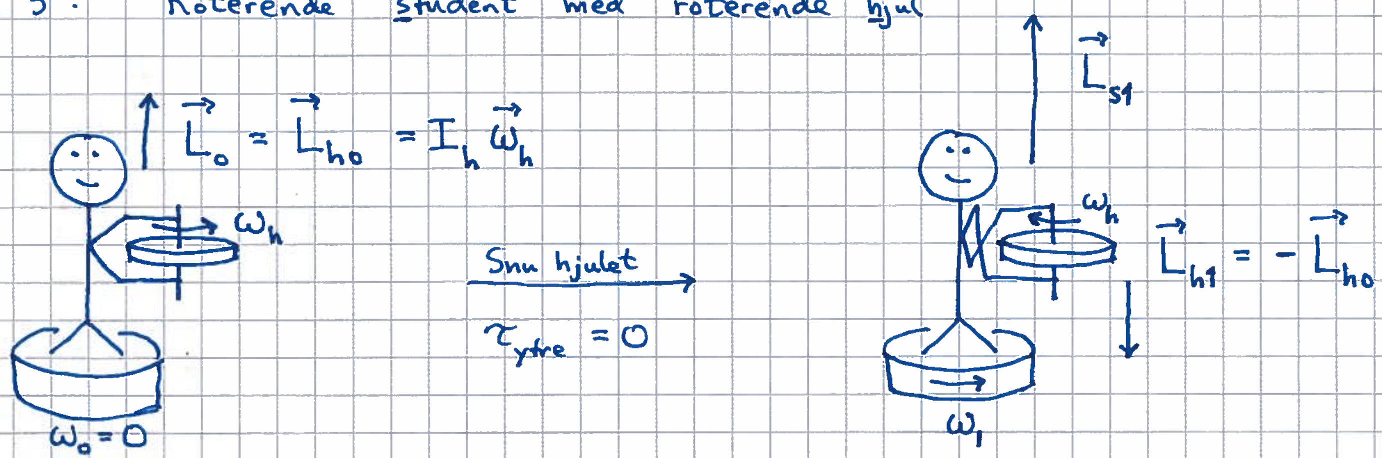
$K_0 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0 \omega_1 = K_0 \frac{\omega_1}{\omega_0}$$

$$= K_0 \, I_0 / I_1 > K_0$$

Arbeid utføres av musklene (kjemisk energi).

Eks 5 : Roterende student med roterende hjul



$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{s1} + \vec{L}_{h1} = \vec{L}_{s1} - \vec{L}_{h0}$$

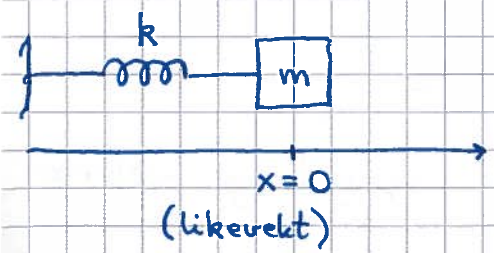
$$\Rightarrow \quad \vec{L}_{s1} = 2 \vec{L}_{h0}$$

Svingninger [YF 14 ; LL 9]

= periodisk oppførsel omkring likevekt = oscillasjoner

Eksempler: Masse/fjær, Pendler, Fiolinstreng, Atomer i molekyler, ...

Harmonisk oscillator [YF 14.2 ; LL 9.1–9.3]



x = posisjonen til m = fjæras forlengelse $(x>0)$,
evt. sammenpressing $(x<0)$

Hookes lov: $\boxed{\vec{F} = -kx\,\hat{x}}$; dvs kraften fra fjæra på m

er proporsjonal med fjæras forlengelse/sammenpressing.

k = fjærkonstanten ; $[k] = N/m$

N2 for m : $-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Dvs: $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ Harmonisk oscillator i 1D; her med $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

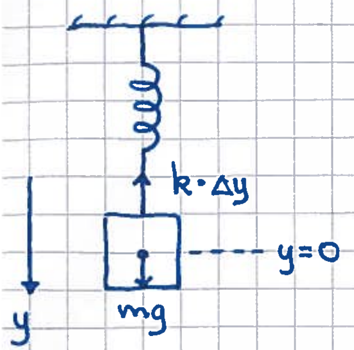
Generell løsning:

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ evt. $x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t$

A og φ, evt. B og C, fastlegges med to initialbetingelser,

f. eks. $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$

Vertikalt i tyngdefeltet:



Fjæra er nå strukket en lengde Δy når m er i likevekt $\Rightarrow mg = k\,\Delta y$

$\Rightarrow \Delta y = mg/k$

Anta $y=0$ for m i "strukket likevekt"

$\Rightarrow \sum F = mg - k(\Delta y + y) = -ky$

$\overset{N2}{\Rightarrow} -ky = m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ med $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Dvs: Samme ligning, samme (vinkel-)frekvens!

Størrelser og begreper knyttet til harmoniske svingninger:

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ = oscillatorens utsving (posisjon) ved tid t

A = amplitude = max utsving fra likevekt ; $[A] = [x]$

ω_0 = vinkelfrekvens ; $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hele svingning ; $[T] = s$

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet ; $[f] = \frac{1}{s} = Hz$

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstant ; $[\varphi] = 1$

Anta $\varphi = 0$, dvs $x = A\cos\omega_0 t$. Da er

hastigheten: $\dot{x} = -\omega_0 A \sin\omega_0 t = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \pi/2)$

akselerasjonen: $\ddot{x} = -\omega_0^2 A\cos\omega_0 t = -\omega_0^2 x$

$= \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \pi)$

Dvs: Faseforskjell $\pi/2$ mellom x og $\dot{x}$

— " — π mellom x og $\ddot{x}$ (i motfase)

Energi i en harmonisk oscillator [YF 14.3 ; LL 9.4]

Anta $\varphi = 0$ og $x = A \cos \omega_0 t$. Da er

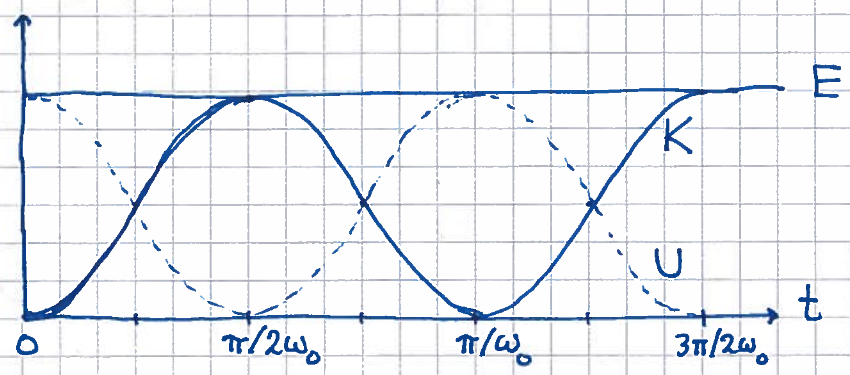
$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

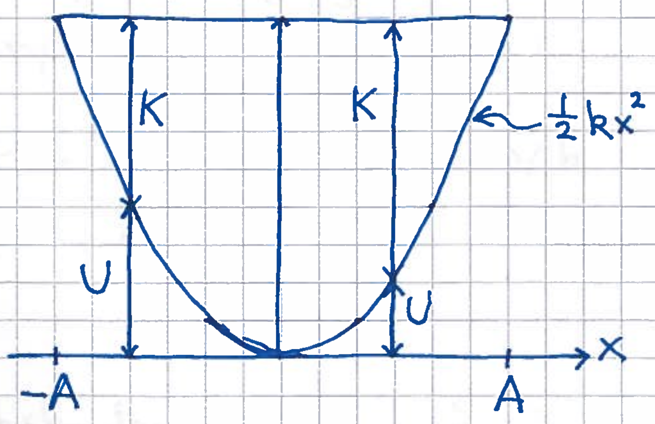
$$U = -\int_0^x F(x)\,dx = -\int_0^x (-kx)\cdot dx = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\Rightarrow U(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$\Rightarrow$ Total mekanisk energi er bevart ; systemet er konservativt :

$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 = \text{konstant}$$

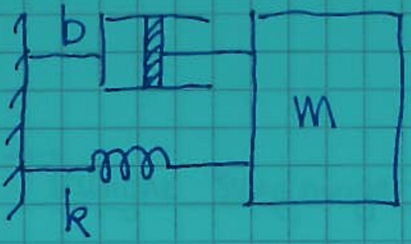




Dempet fri svingning [YF 14.7 ; LL 9.7]

Langsom bevegelse i fluid : $f = -b\dot{x}$; antas her.

[Rask bevegelse i fluid : $f = -D\dot{x}^2$. Tørr friksjon : $f = \mu_k N$]



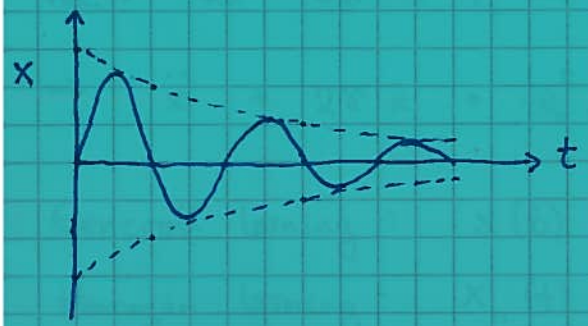
N2 : $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

der $\gamma = b/2m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Underkritisk demping , $\gamma < \omega_0$:

$$x(t) = A\, e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



------ $\pm A e^{-\gamma t}$ (omhylningskurve)

Dvs : Dempede svingninger med eksponentielt avtagende amplitude, $A \cdot \exp(-\gamma t)$.

Etter en tid $\gamma^{-1} = 2m/b$ er amplituden redusert fra A til $A/e \approx 0.37\,A$

Overkritisk demping , $\gamma > \omega_0$:

$$x(t) = A\, e^{-\alpha_1 t} + B\, e^{-\alpha_2 t}$$

med $\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, $\alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Dvs : Exp. avtagende $x(t)$, uten svingninger

Kritisk demping, $\gamma = \omega_0$:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + Bt\, e^{-\gamma t}$$

Gir god kjørekomfort når støtdemperne har $\gamma \approx \omega_0$!

Tvungne svingninger og resonans [YF 14.8; LL 9.9]

$F(t) = F_0 \cos \omega t$ = ytre, harmonisk kraft

N2 : $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad ; \quad 2\gamma = \frac{b}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Generell løsning : $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen løsning : $x_h(t) \sim \exp(-\gamma t) \approx 0$ for $t \gg \gamma^{-1}$; bare relevant for innsvingningsforløpet, $0 < t \lesssim \gamma^{-1}$

Partikulærløsning : $x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$

Innsetting i $\ddot{x}_p + 2\gamma \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$ gir

$$\boxed{A(\omega) = \frac{F_0/m}{\{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\}^{1/2}}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left\{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right\}$$

Resonans : Stor $A(\omega)$ hvis $\gamma \ll \omega_0$ (svak demping) og $\omega \approx \omega_0$:

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{F_0}{k} \frac{\omega_0}{2\gamma} = A_0 \frac{\omega_0}{2\gamma} \gg A_0$$

(der $A_0 = A(0) = F_0/k = F_0/m\omega_0^2$)

Hvis $\gamma \to 0$: $A(\omega_0) \to \infty$ (Tacoma bridge 1940)

Eks / Exp: Vi ser på oscillatorens energi

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad ; \quad E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{F_0^2}{2k}$$

for en stav med ett messinglodd festet til ei fjær, svak demping.

- Fri svingning : $T_0 = 0.63$ s ; $f_0 = 1.55$ Hz

- Måler A^2 som funksjon av f, omkring f_0

- Halvverdibredden til resonanskurven :

$E(\omega_0) = E_{max}$; $E(\omega_1) = E(\omega_2) = \frac{1}{2}E_{max}$, $\omega_1 = E_0 - \gamma$, $\omega_2 = E_0 + \gamma$

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma$ = halvverdibredden

- Resonanskurvens Q-faktor (Q = Quality) :

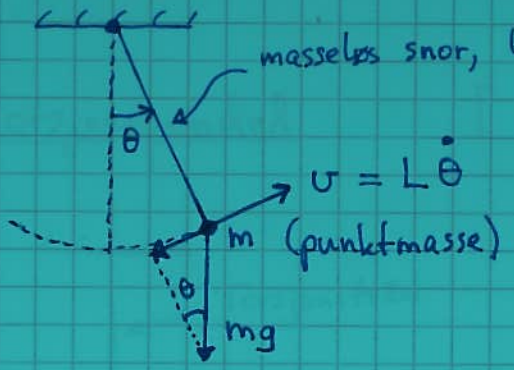
$$Q \overset{def}{=} \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\sqrt{k/m}}{b/m} = \frac{\sqrt{k \cdot m}}{b} ,$$

et dimensjonsløst mål for hvor <u>skarp</u> resonanstoppen er.

Liten demping γ $\Rightarrow$ Smal og høy resonanstopp

Pendler

Matematisk pendel [YF 14.5 ; LL 9.6]



N2 ∥ sirkelbanen:

$F = ma$, med

$F = -mg\sin\theta$ og

$a = \dot{v} = L\ddot{\theta}$

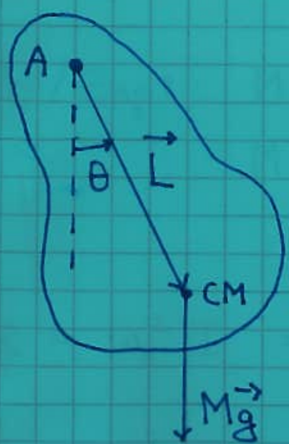
$$\Rightarrow \quad -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Anta små utsving fra likevekt, $|\theta| \ll 1$, slik at $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = g/L}$$

Dvs, harmonisk oscillator, med løsning $\theta(t) = \theta_0 \cos\omega_0 t$

Fysisk pendel [YF 14.6 ; LL 9.6]



Stivt legeme, masse M, treghetsmoment I mhp aksen A, $\vec{R}_{CM} = \vec{L}$. N2 for rotasjon om A:

$$\tau = I\ddot{\theta}$$

med $|\vec{\tau}| = |\vec{L} \times M\vec{g}| = MgL\sin\theta$.

Fortegn: $\vec{\tau}$ virker med klokka når $\theta > 0$ (som i fig.)

$$\Rightarrow \quad \tau = -MgL\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + (MgL/I)\sin\theta = 0$$

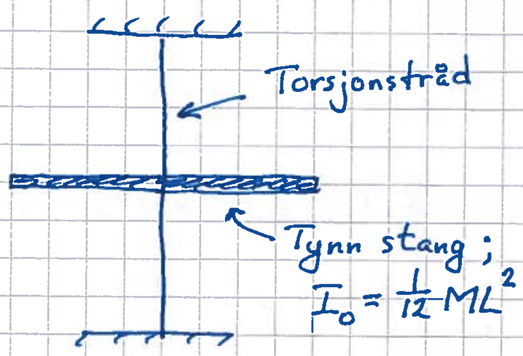
Anta små utsving $\Rightarrow \sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{MgL}{I}}$$

Harm. osc. igjen!

- Matematisk pendel : $I = ML^2 \Rightarrow \omega_0^2 = g/L$; OK
- Hvis A i CM : $L = 0 \Rightarrow \omega_0 = 0$; OK

Torsjonspendel [YF 14.4 ; LL 9.6]



Hookes lov : Torsjonstråden (typisk en metalltråd) motsetter seg vridning og virker på stanga med et dreiemoment som er proporsjonalt med vridningsvinkelen,

$$\tau = -\kappa\,\theta ,$$

med torsjonsstivhet κ.

$([\kappa] = [\tau] = \mathrm{Nm})$

N2 for rotasjon om trådens akse :

$$\tau = I_0 \ddot{\theta} \Rightarrow -\kappa\theta = I_0\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \; ; \quad \omega_0^2 = \frac{\kappa}{I_0}}$$

Harm. osc, nok en gang.

Eks / Exp : $M = 50\,\mathrm{g}$, $L = 11\,\mathrm{cm}$.

Mål $T = 2\pi/\omega_0$ og beregn κ !

$$\kappa = \omega_0^2 I_0 = 4\pi^2 I_0 / T^2 = \pi^2 ML^2 / 3T^2$$

$$= \pi^2 \cdot 0.050\,\mathrm{kg} \cdot (0.11\,\mathrm{m})^2 / 3 \cdot (0.8\,\mathrm{s})^2 \approx 0.003\,\mathrm{Nm}$$

[Torsjonsstivheten κ er prop. med trådens skjærmodul (G) og trådens diameter i fjerde potens (d^4), samt omvendt prop. med trådens lengde (ℓ) : $\kappa = \pi G \cdot d^4 / \ell \cdot 32$]

ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Alle

Kun TFY4104

(Magnetisme for MTPETR og MTTEK GEO i TPG 4100.)

YF 21-26 ; LHL 19-22

YF 27-31 ; LHL 23-27

I. Elektrostatikk. Ledere, isolatorer.

YF 21 – 24 ; LHL 19 – 20

II. Strøm. DC-kretser.

YF 25 – 26 ; LHL 21 – 22

Alle

III. Magnetostatikk. Magnetisme

YF 27 – 28 ; LHL 23, 26

IV. Elektromagnetisk induksjon. AC-kretser.

YF 29–31 ; LHL 24, 25, 27

TFY4104

TFY4102 (ca) uke 44 – 47:

Bølgefysikk

Termisk fysikk

Man 8-10 og Ons 10-12 i rom D5-106.

I. Elektrostatikk [YF 21 – 24 ; LHL 19 – 20]

Elektrisk ladning [YF 21.1 ; LHL 19.1]

Materie = atomer

Atom = kjerne + elektroner

Kjerne = protoner + nøytroner = kjernepartikler

Kjernepartikkel = 3 kvarker

Elementærpartikler = udelelige byggeklosser i naturen (elektron, kvarker, foton, nøytrinoer, Higgs-partikkelen osv.)

Noen av disse har elektrisk ladning, positiv eller negativ, og noen er elektrisk nøytrale.

Ladningen er kvantisert:

Partikkel		Ladning
Elektron	(e)	$-e$
Opp-kvark	(u)	$+2e/3$
Ned-kvark	(d)	$-e/3$
Elektron-nøytrino	(ν_e)	0
Foton	(γ)	0

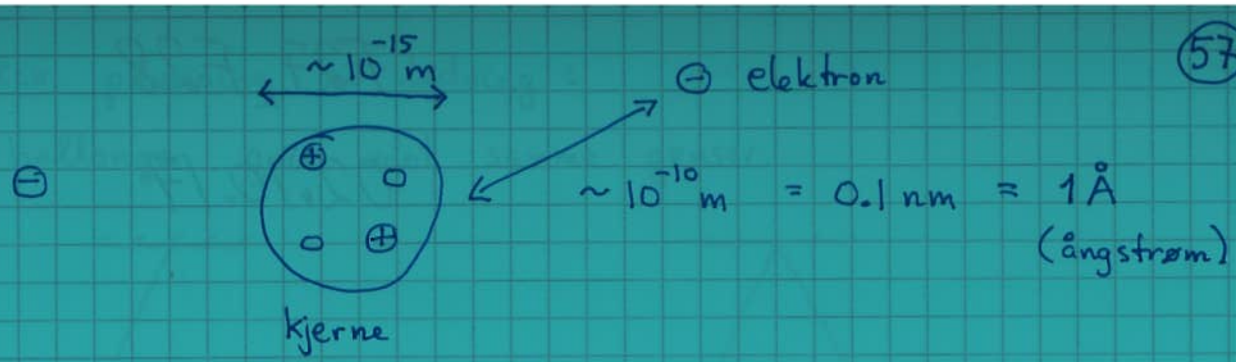
e = elementærladningen ; påvist av R. Millikan med små ladede oljedråper i 1909 (NP 1923 ; NP = Nobelpris)

Nøytron (n) = 1u + 2d $\Rightarrow$ $q_n = 0$

Proton (p) = 2u + 1d $\Rightarrow$ $q_p = e$

Symbol for el. ladning : q og Q ("quantity of electricity")

Atom :



$m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg

$m_n \approx m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg

$\Rightarrow$ Praktisk talt hele atommassen i kjernen.

Nøytralt atom med atomnummer Z :

Z protoner og Z elektroner $\Rightarrow Q = Z \cdot e - Z \cdot e = 0$

Ioner : Atomer og molekyler med flere eller færre elektroner enn protoner.

Eks : O^{2-} = oksygenatom med 10 elektroner ($Z = 8$) ; $q = -2e$

O_2^- = oksygenmolekyl med 17 elektroner ; $q = -e$

Ladningsbevarelse : Netto ladning i et lukket system er konstant.

Eks : β^- decay

antinøytrino

$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ (f.eks. ${}^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + e + \bar{\nu}_e$)

Ladning : $\underline{0} \rightarrow e - e + 0 = \underline{0}$