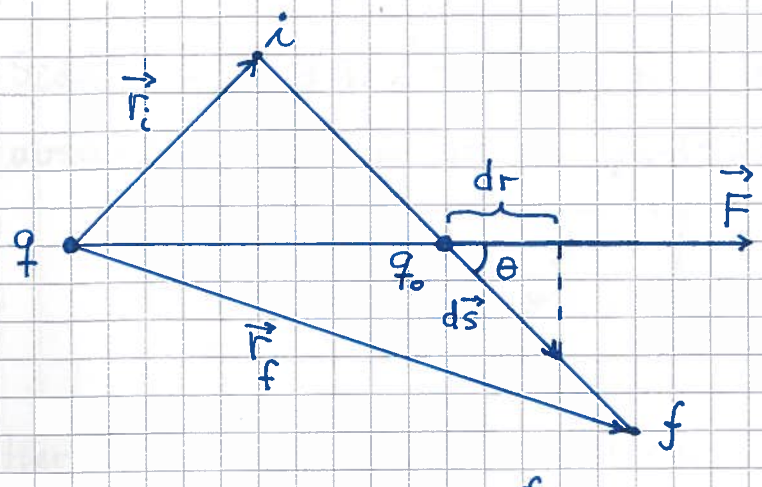
Potensiell energi og elektrisk potensial [YF 23.1, 23.2; LHL 19.9, 20.3]

Pot. energi for testladn. q_0 i $\vec{E}$-felt fra ref. ladn. q:



$$\vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cdot ds\cdot\cos\theta = F\cdot dr$$

$$\Delta U = U_f - U_i \overset{\text{def}}{=} -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_{r_i}^{r_f} F\cdot dr = -\frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_i}^{r_f}\frac{dr}{r^2}$$

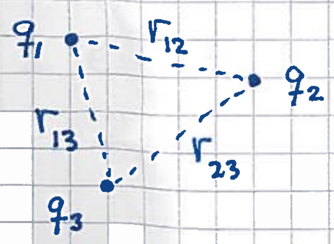
$$= \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_f} - \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

$\Rightarrow$ Naturlig å velge $U = 0$ for $r \to \infty$

$\Rightarrow$ Pot. energi for ladningspar q og q_0 i innbyrdes avstand r:

$$\boxed{U(r) = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Med flere ladninger: Alle ladn. i systemet vekselvirker parvis. Velger $U = 0$ når alle ladn. er uendelig langt fra hverandre



$$\Rightarrow U = U_{12} + U_{13} + \dots + U_{1n} + U_{23} + \dots + U_{2n} + \dots + U_{n-1,n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} U_{ij} = \sum_{i<j} U_{ij} = \underline{\underline{\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}}}$$

Elektrisk potensial $\stackrel{\text{def}}{=}$ pot. energi pr ladningsenhet

$$\boxed{V = U/q_0}$$

Enhet: $[V] = J/C = V$ (volt)

Siden $U = qq_0/4\pi\varepsilon_0 r$ for ladningspar q og q_0 i innbyrdes avstand r, ser vi at en punktladning q omgir seg med potensialet

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Coulombpotensialet

Har nå: $\vec{E} = \vec{F}/q_0$, $V = U/q_0$ og $\Delta U = -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s}$

Dermed:

$$\boxed{\Delta V = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}}$$

Pot. forskjell $\Delta V = V_f - V_i$ mellom posisjon f (final) og i (initial).

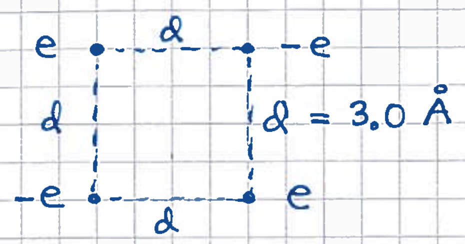
$\Rightarrow$ Alternativ enhet for $\vec{E}$: $[E] = V/m$ (mer brukt enn N/C)

Alternativ energienhet:

1 eV (elektronvolt) $=$ ΔU for elementærladning ($q = e$) som flyttes fra posisjon i med potensial V_i til posisjon f med potensial $V_f = V_i + 1\,V$; dvs $\Delta V = V_f - V_i = 1\,V$.

$$1\text{ eV} = 1 \cdot \underbrace{1.6\cdot 10^{-19}\,C}_{e} \cdot \underbrace{1\,\frac{J}{C}}_{1V} = 1.6\cdot 10^{-19}\,J$$

Eks 1: Beregn U for systemet



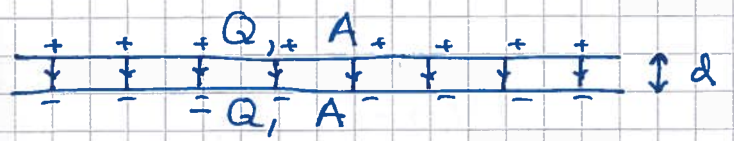
Løsn: Vi har her 6 ladningspar som bidrar til $U = \sum_{i<j} U_{ij}$

$$U = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left\{4\cdot(-1) + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \frac{(\sqrt{2}-4)e^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$$\approx 9\cdot10^9\cdot\frac{(\sqrt{2}-4)\cdot1.6\cdot10^{-19}}{3.0\cdot10^{-10}}\ \text{eV} = 4.8\cdot(\sqrt{2}-4)\ \text{eV} \approx \underline{\underline{-12\ \text{eV}}}$$

Eks 2: Beregn ΔV mellom to metallplater med jevnt fordelt ladning ± 5.5 nC, areal $200\ \text{cm}^2$ og plateavstand 1.0 mm.

Løsn:



$Q = 5.5\cdot10^{-9}$ C
$A = 200\cdot10^{-4}\ \text{m}^2$
$d = 1.0\cdot10^{-3}$ m

Fra eks s. 63: $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/A\varepsilon_0$ mellom platene

$$\Rightarrow \Delta V = -\int_{(-)}^{(+)}\vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{(+)}^{(-)} E\cdot ds = E\cdot d = \underline{\underline{\frac{Q\cdot d}{A\cdot\varepsilon_0}}}$$

Tallverdi:

$$\Delta V = \frac{5.5\cdot10^{-9}\cdot1.0\cdot10^{-3}}{200\cdot10^{-4}\cdot8.85\cdot10^{-12}}\ \text{V} = \underline{\underline{31\ \text{V}}}$$

Da $\vec{E}$ har retning fra positiv mot negativ ladning, blir potensialet høyest på pos. ladet plate og lavest på neg. ladet plate.

Beregning av $\vec{E}$ fra V [YF 23.5 ; LHL 19.9]

$$\vec{r} \xrightarrow{d\vec{s}} \vec{r} + d\vec{s} \qquad \text{(posisjon)}$$

$$V \qquad\qquad V + dV \qquad \text{(potensial)}$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz \qquad \text{(totalt differensial)}$$

$$= \underbrace{\left(\hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)}_{\nabla V} \cdot \underbrace{\left(\hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz\right)}_{d\vec{s}}$$

$$= \nabla V \cdot d\vec{s}$$

(gradienten til V) (veielement)

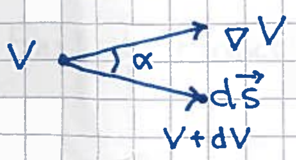
Fra s. 68:

$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s}$ = pot. forskjell mellom $\vec{r} + d\vec{s}$ og $\vec{r}$

Dermed : $\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$

Og siden $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ og $V = U/q_0$: $\vec{F} = -\nabla U$

Tolkning av ∇V :



$$dV = \nabla V \cdot d\vec{s} = |\nabla V| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos\alpha$$

Dvs: Max. pot. endring dV når forflytningen $d\vec{s}$ går i samme retning som ∇V ($\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$)

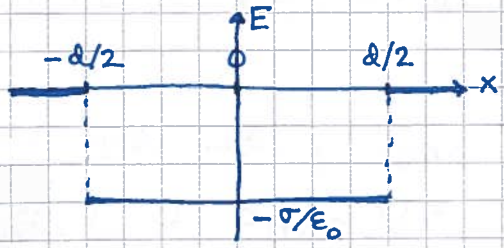
Dvs: ∇V er vektor i retning maksimalt økende V, med absoluttverdi lik endringen i V pr lengdeenhet, og lik den elektriske feltstyrken $|\vec{E}|$

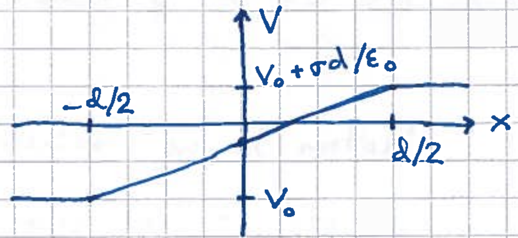
Eks: Skisser $E(x)$ og $V(x)$ for to store metallplater i $x = \pm d/2$ med ladning $\pm\sigma$ pr flateenhet.

Løsn: Fra s.63 og s.69: $|\vec{E}| = \sigma/\varepsilon_0$ mellom platene; $E = 0$ utenfor

Retning fra pos. mot neg. ladet plate $\Rightarrow \vec{E}(x) = -\hat{x}\,\sigma/\varepsilon_0$.

Siden $\vec{E} = -\nabla V$, må $V(x)$ her øke lineært fra $V(-d/2) = V_0$ til $V(d/2) = V_0 + \sigma d/\varepsilon_0$, med konstant potensial utenfor platene.





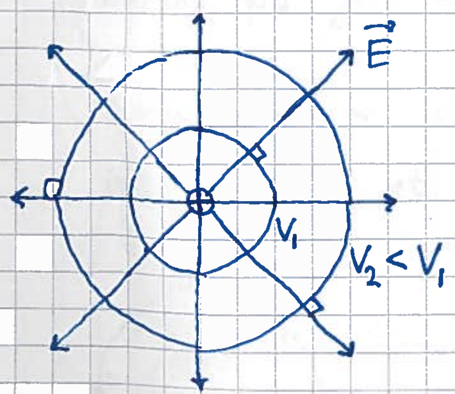
Ekvipotensialflater [YF 23.4; LHL 19.11]

.... er flater i rommet (evt. kurver i 2D) med konstant V

Dvs: Med en forflytning $d\vec{s}$ på en ekvipotensialflate er $dV = 0$, dvs $\vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$, dvs $\vec{E} \perp d\vec{s}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} \perp \text{ekvipotensialflatene}}$$

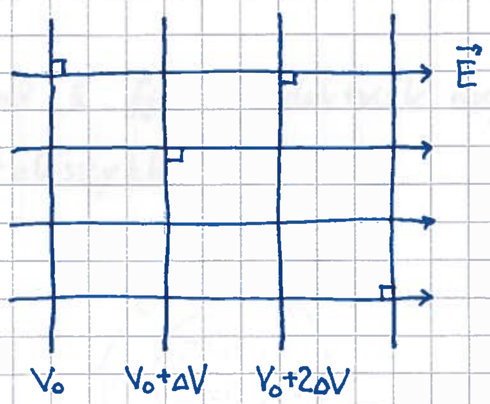
Eks 1: Punktladning



Radielt rettet $\vec{E}$

$\Rightarrow$ Ekvipot.flatene er <u>kuleskall</u>

Eks 2: Uniformt $\vec{E}$-felt



Ekvipot.flatene er <u>plan</u> $\perp \vec{E}$

Materialers elektriske egenskaper

Ledere (metaller) [YF 22.5 ; LHL 19.8]

Metaller har frie (mobile) elektroner (1 – 2 pr atom) som vil bevege seg hvis de utsettes for krefter. Konsekvensen:

- $\vec{E} = 0$ inne i metall (i elektrostatisk likevekt)

  [$\vec{E} \neq 0 \Rightarrow$ kraft $\vec{F} = q\vec{E}$ på fri ladning q $\Rightarrow$ har ikke likevekt]

- All netto ladning ligger på overflaten av et metall

  [Skyldes at $F(r) \sim 1/r^2$; se "Gauss' lov" ; ikke pensum]

- På metalloverflate: $\vec{E} \perp$ overflaten ; $|\vec{E}| = \sigma/\varepsilon_0$

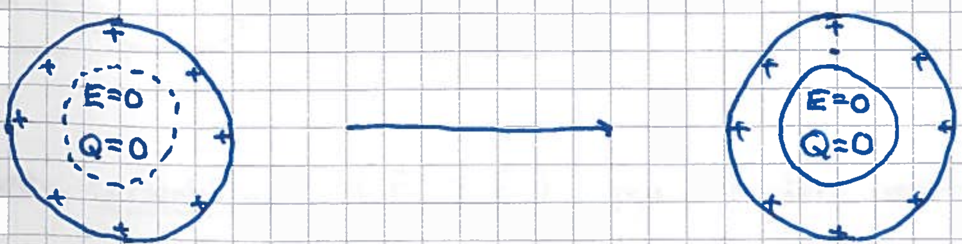
  [$E_{\parallel} \neq 0 \Rightarrow F_{\parallel} = qE_{\parallel} \neq 0 \Rightarrow$ ikke likevekt ; σ = overflateladning pr flateenhet]

- Metallbit i likevekt er et ekvipotensial

  [Med $d\vec{s}$ i metallbiten er $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$, for inni er $E = 0$ og på overflaten er $\vec{E} \perp d\vec{s}$]

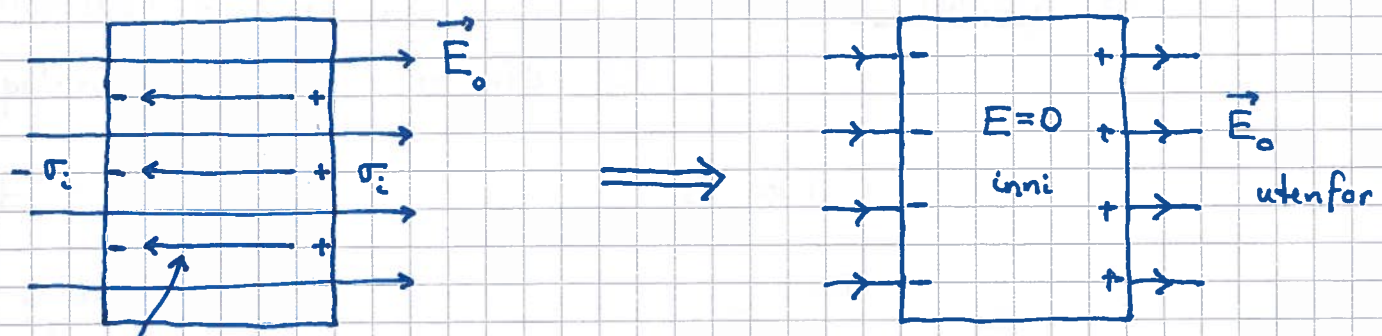
- Metall med hulrom har $E = 0$ i hulrommet og all netto-ladning på ytre overflate

  [Bevis: Lager hulrommet ved å fjerne elektrisk nøytral bit inne i et kompakt metallstykke:



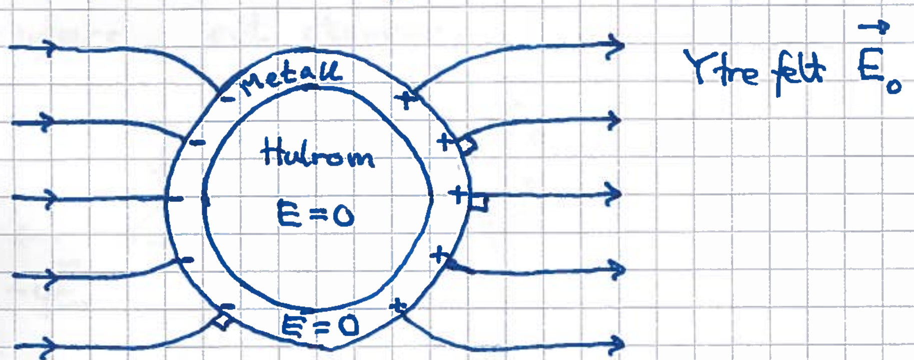
  fordi ingenting har skjedd fra et elektrostatisk synspunkt!]

Metall i ytre felt $\vec{E}_0$:

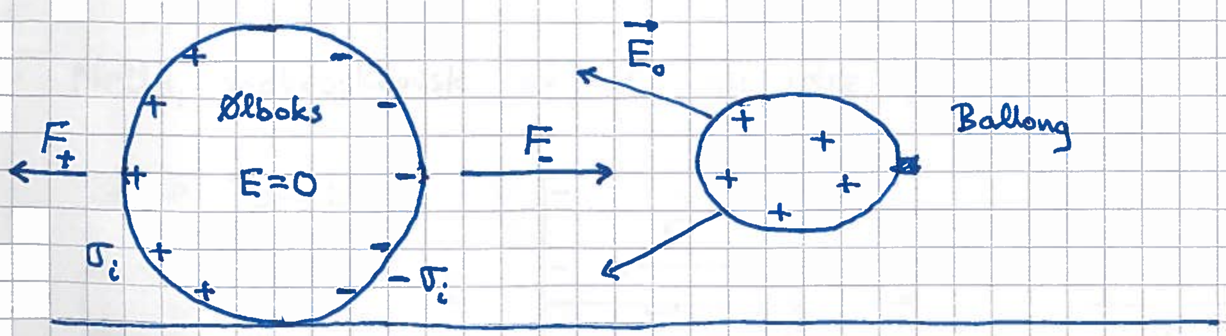


Indusert felt, $\vec{E}_i = -\vec{E}_0$, inni metallet pga indusert overflate-ladning $\pm\sigma_i$, slik at $E=0$ inni metallet i likevekt.

Elektrostatisk skjerming (Faradaybur) :



Eks : Metallboks i inhomogent ytre felt

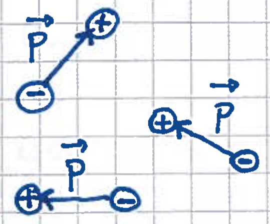


Netto tiltrekking ($F_- > F_+$) pga kortere avstand mellom ballongen og den negative induserte ladningen $-\sigma_i$

Dielektrika (isolatorer) [YF 24.4+5 ; LHL 20.5]

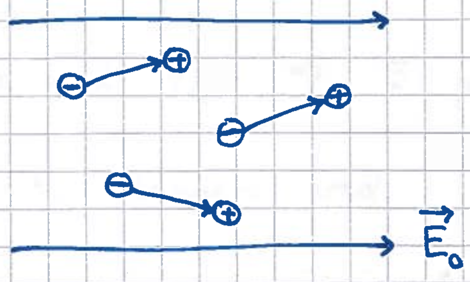
Har ikke frie ladninger, men har <u>bundet ladning</u> som polariseres i et ytre felt $\vec{E}_0$:

$E_0 = 0$:



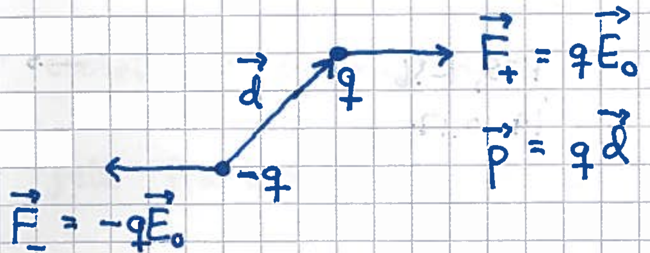
$\sum_i \vec{p}_i \approx 0$

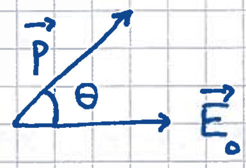
$\vec{E}_0 \neq 0$:



$\sum_i \vec{p}_i \neq 0$

Molekylære (evt. atomære) dipoler <u>rettes inn</u> langs det ytre feltet $\vec{E}_0$:



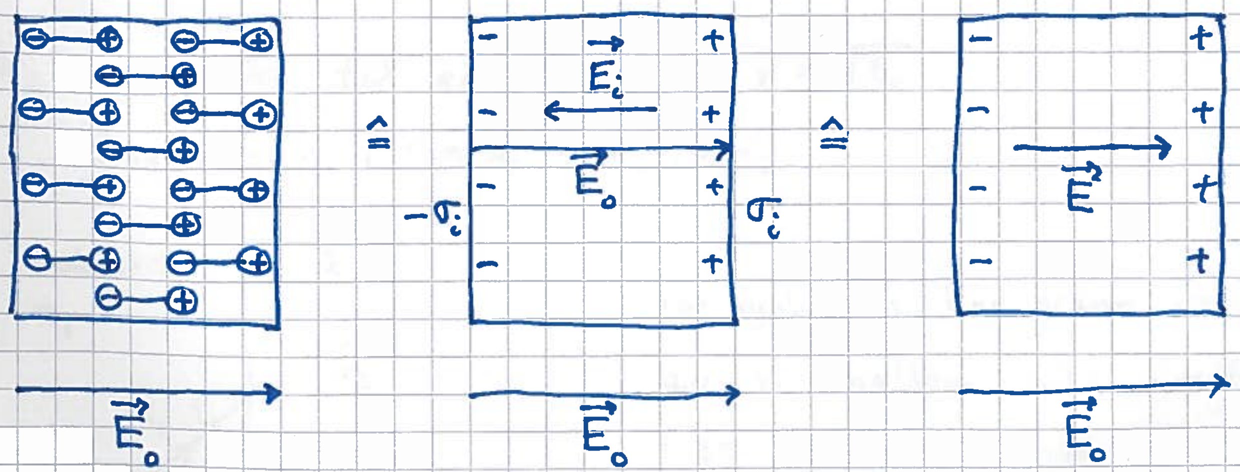


Ytre dreiemoment på dipolen :

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \text{.... se øving 9, oppg 3....} = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

$$|\vec{\tau}| = p\, E_0 \sin\theta$$

Netto, makroskopisk effekt av ytre felt $\vec{E}_0$:



- null netto ladning inni ; indusert ladning pr flateenhet $\pm\sigma_i$ på overflaten
- indusert felt $\vec{E}_i$ inni ; svekket totalt felt inni :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i \quad ; \quad |\vec{E}| = |\vec{E}_0| - |\vec{E}_i| \quad ; \quad E_i = \sigma_i / \varepsilon_0$$

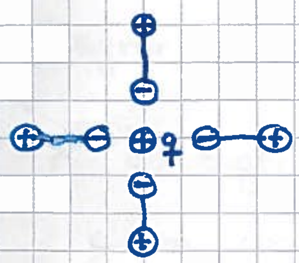
- lineær respons : E_i proporsjonal med E_0 $\Rightarrow$ E prop. med E_0
- isolatorens relative permittivitet ε_r defineres ved

$$\boxed{E = \frac{1}{\varepsilon_r} E_0} \qquad (\text{enhet: } [\varepsilon_r] = 1)$$

- tallverdier :

	Vakuum	Tørr luft	Plast	Rent vann	Perfekt metall
ε_r	1	1,00054	2–6	80	∞

- isolatorens permittivitet : $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$
- felt fra ladning q inni isolator med perm. ε :



Polarisering av mediet svekker feltet med faktoren $1/\varepsilon_r$:

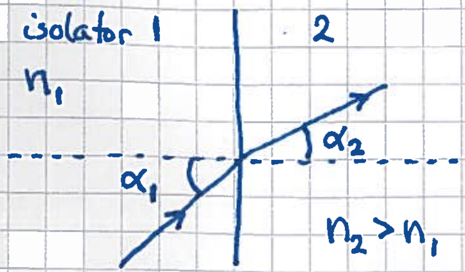
$$E(r) = E_{vac}(r)/\varepsilon_r = q/4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2 = \underline{q/4\pi\varepsilon r^2}$$

- lyshastigheten : $c \approx 3\cdot 10^8$ m/s i vakuum (eksakt 299 792 458 m/s)

$v = c/\sqrt{\varepsilon_r} < c$ i en isolator

- brytningsindeks til en isolator : $n = \sqrt{\varepsilon_r}$

Snells lov : $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$

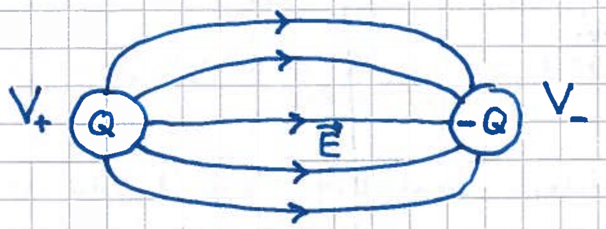


For synlig lys har vann verdier av n mellom 1.33 (rødt) og 1.35 (blått). Resulterer i f.eks. regnbuen!

Kondensator og kapasitans [YF 24 ; LHL 20]

(capacitor) (capacitance)

= to ledere, adskilt med isolerende materiale (luft, plast, ...)



$$V = V_+ - V_- = -\int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{er prop. med } Q$$

(fordi $\vec{E}$ er prop. med Q, pga Coulombs lov)

Kondensatorens kapasitans er : $\boxed{C \overset{\text{def}}{=} Q/V}$

- Enhet : $[C] = C/V = F$ (farad)
- Kretssymbol :

- Lagrer ladning og energi
- C avhenger av utforming (geometri) og type isolator mellom de to lederne
- Beregner C typisk slik :

  Anta ladning $\pm Q$ på de to lederne

  Regn ut V

  Da er $C = Q/V$

Eks 1: Beregn C for luftfylt platekondensator med $d = 1.0$ mm og $A = 314$ cm^2.

Løsn: $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/A\varepsilon_0$ mellom platene (når ladn. er $\pm Q$)

$\Rightarrow V = Ed = Qd/A\varepsilon_0$ = pot. forskjellen mellom platene

$\Rightarrow C = Q/V = \underline{\underline{\varepsilon_0 A/d}} = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 314 \cdot 10^{-4} / 10^{-3} = \underline{\underline{2.8 \cdot 10^{-10}\ \text{F}}}$

Eks 2: Som eks. 1, men fylt med dielektrikum med $\varepsilon_r = 5.5$.

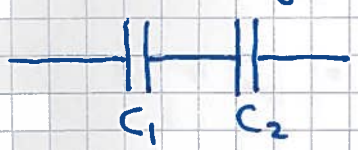
Løsn: $E = \sigma/\varepsilon = \sigma/\varepsilon_r\varepsilon_0 = Q/A\varepsilon_r\varepsilon_0 \Rightarrow V = Qd/A\varepsilon_r\varepsilon_0$

$\Rightarrow C = Q/V = \underline{\underline{\varepsilon_r\varepsilon_0 A/d}} = 5.5 \cdot 2.78 \cdot 10^{-10}\ \text{F} = \underline{\underline{1.5\ \text{nF}}}$

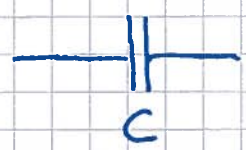
Vi ser at $[\varepsilon_0] = [\varepsilon] = [C \cdot d/A] = \underline{\text{F/m}}$

Kobling av flere kapasitanser [YF 24.2; LHL 20.2]

Seriekobling:

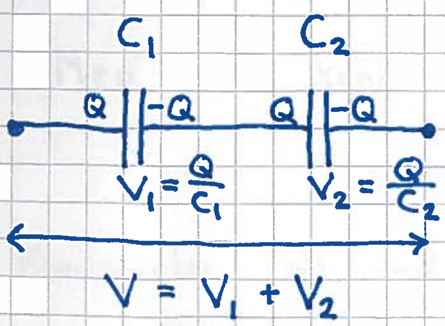


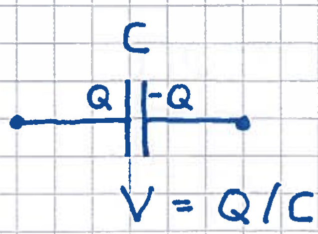
erstattes av



; hva er da C?

Har lik ladning $\pm Q$ på C_1 og C_2:

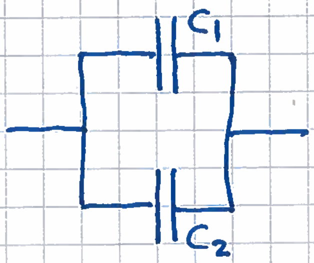




$$\Rightarrow \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Med N kond. i serie: $\boxed{C^{-1} = \sum_{j=1}^{N} C_j^{-1}}$

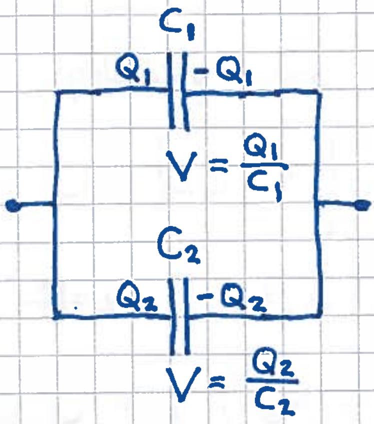
Parallellkobling:

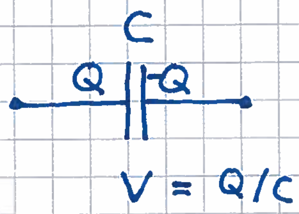


erstattes av

; hva er da C?

Har <u>lik potensialforskjell</u> <u>(spenning)</u> V mellom platene i de to kondensatorene 1 og 2:



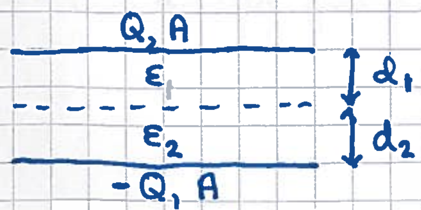


$$Q_1 + Q_2 = Q$$

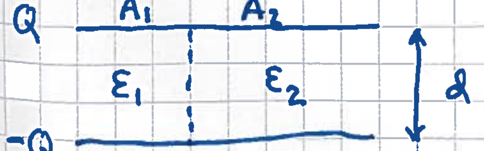
$$\Rightarrow \quad C_1 V + C_2 V = CV \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = C_1 + C_2}$$

Med N kond. i parallell: $\boxed{C = \sum_{j=1}^{N} C_j}$

Kondensator fylt med <u>ulike dielektrika</u> er essensielt som <u>kobling av flere</u>:



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 A} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 A} \quad \text{(Serie)}$$



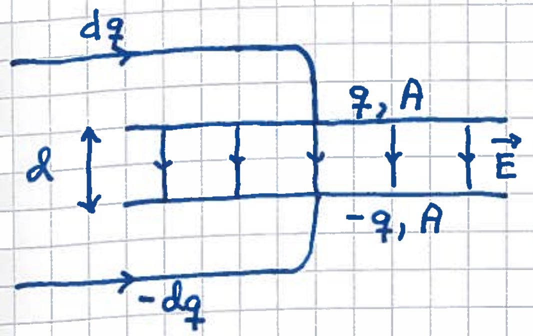
$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon_1 A_1 / d + \varepsilon_2 A_2 / d$$

(Parallell)

Energi i et elektrisk felt [YF 24.3 ; LHL 20.4]

Opplading av kondensator krever at det gjøres et arbeid W

$\Rightarrow$ Potensiell energi $U = W$ lagret i $\vec{E}$-feltet (mellom platene).



Økt ladning fra $\pm q$ til $\pm(q+dq)$ gir økt pot. energi:

$$dU = v(q)\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

$\Rightarrow$ Opplading fra $q=0$ til $q=Q$ gir pot. energi

$$U = \int dU = \int_0^Q q\,dq/C = Q^2/2C = (CV)^2/2C = \frac{1}{2}CV^2$$

Med $C = \varepsilon_0 A/d$ og $V = Ed$ fås

$$U = \frac{1}{2}\cdot(\varepsilon_0 A/d)\cdot(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot (Ad)$$

Her er $A \cdot d$ = volum mellom platene, der $E \neq 0$

Dermed:

Energi pr volumenhet i et elektrisk felt er

$$\boxed{u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

(Som gjelder generelt)